ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 517.956

Е.А. УТКИНА

К ОБЩЕМУ СЛУЧАЮ ЗАДАЧИ ГУРСА

Пусть $D=\{x_{10}<x_1<x_{11},\ x_{20}<x_2<x_{21},\dots,x_{n0}<x_n<x_{n1}\}$, $X_1,X_2,\dots,X_n$ — грани D при $x_1=x_{10}$, $x_2=x_{20},\dots,x_n=x_{n0}$ соответственно.

Речь пойдет об уравнении

$$L(u)\equiv\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}a_{i_1i_2\dots i_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}}=F(x_1,x_2,\dots,x_n),\qquad(1)$$

изучаемом в D, при этом $a_{m_1m_2\dots m_n}\equiv 1$, а гладкость остальных коэффициентов определяется включениями

$$a_{i_1i_2\dots i_n}\in C^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}i_\alpha}(\overline{D}),\quad F\in C^{0+0+\dots+0}(\overline{D}).$$

Здесь $C^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}$ — класс непрерывных функций в $\overline{D}$ вместе с их производными $\frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n}}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\dots\partial x_n^{r_n}}$ $(r_1=0,\dots,\alpha_1;\ r_2=0,\dots,\alpha_2;\dots;r_n=0,\dots,\alpha_n)$. Уравнение (1) представляет собой наиболее общее линейное уравнение данного класса.

На плоскости это уравнение исследовалось в [1]. При числе независимых переменных $n>2$ частные случаи (1) рассматривались в [2], [3] и др., в том числе автором данной статьи [4]–[6].

Задача Гурса. Найти в D регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{i_1}u}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10},x_2,\dots,x_n)=\varphi_{1\,i_1}(x_2,\dots,x_n)\quad(i_1=\overline{0,m_1-1}),\\&\frac{\partial^{i_2}u}{\partial x_2^{i_2}}(x_1,x_{20},\dots,x_n)=\varphi_{2\,i_2}(x_1,x_3,\dots,x_n)\quad(i_2=\overline{0,m_2-1}),\\&\qquad\qquad\dots\dots\dots\dots\\&\frac{\partial^{i_n}u}{\partial x_n^{i_n}}(x_1,x_2,\dots,x_{n0})=\varphi_{n\,i_n}(x_1,\dots,x_{n-1})\quad(i_n=\overline{0,m_n-1}),\end{aligned}\qquad(2)$$

$$\varphi_{1\,i_1}\in C^{\sum\limits_{\alpha=2}^{n}m_\alpha}(\overline{X}_1),\ \varphi_{2\,i_2}\in C^{\sum\limits_{\alpha=1,\,\alpha\neq2}^{n}m_\alpha}(\overline{X}_2),\dots,\varphi_{n\,i_n}\in C^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1}m_\alpha}(\overline{X}_n),$$

причем граничные значения из (2) на ребрах D согласуются:

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(x_{20},x_3,\dots,x_n)&=\varphi_{20}(x_{10},x_3,\dots,x_n),\\\varphi_{10}(x_2,x_{30},x_4,\dots,x_n)&=\varphi_{30}(x_{10},x_2,x_4,\dots,x_n),\dots,\\\varphi_{10}(x_{20},x_3,\dots,x_{n-1},x_{n0})&=\varphi_{n0}(x_{10},x_2,\dots,x_{n-1});\\\varphi_{20}(x_1,x_{30},x_4,\dots,x_n)&=\varphi_{30}(x_1,x_{20},x_4,\dots,x_n),\dots,\\\varphi_{20}(x_1,x_3,x_4,\dots,x_{n0})&=\varphi_{n0}(x_1,x_{20},x_3,\dots,x_{n-1}),\\\dots,\varphi_{n-1\,0}(x_2,x_3,x_4,\dots,x_{n0})&=\varphi_{n0}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1\,0}),\end{aligned}$$

а сами согласованные значения непрерывно дифференцируемы.

Решение сформулированной задачи можно получить путем развития варианта метода Римана из работ [4], [5].

Для более компактной записи получающихся в процессе рассуждений формул будем пользоваться обозначениями, введенными в [1]. А именно, $D_t^k\varphi \equiv \frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}$ при $k=1,2,\ldots$ и $D_t^k\varphi \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{-k-1}\varphi(\tau)}{(-k-1)!}d\tau$ при $k=-1,-2,\ldots$, D_t^0 — оператор тождественного преобразования.

Функцией Римана $R(x_1,x_2,\ldots,x_n;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ назовем решение интегрального уравнения

$$\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}(-1)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}(m_\alpha-i_\alpha)}\prod_{\alpha=1}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha-m_\alpha}(a_{i_1i_2\ldots i_n}R)=1, \tag{3}$$

которое существует и единственно ([7], с. 181). Из (3) следует, что $R(\{x_k\};\{\xi_k\})$ по первым n аргументам является решением сопряженного с (1) уравнения

$$L^*(V)=\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}(-1)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}(m_\alpha-i_\alpha)}\prod_{\alpha=1}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(a_{i_1i_2\ldots i_n}V)=0.$$

Для дальнейшего потребуется

Лемма. *Для любой функции u из класса $C^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}m_\alpha}(D)$ имеет место тождество*

$$RL(u)+\sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+\cdots+i_n>0}}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}i_k-1}\prod_{k=1}^{n}D_{x_k}^{i_k}\Big[u\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1}\cdots\sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n}(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k-1}\prod_{k=1}^{n}D_{x_k}^{\alpha_k-i_k}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n}R)\Big]+$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1}\cdots\sum_{b_n=0}^{i_n}K_{i_1\ldots i_n\,b_1\ldots b_n}\prod_{k=1}^{n}D_{x_k}^{b_k}(u)\prod_{k=1}^{n}D_{x_k}^{i_k-b_k}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n}R)\equiv 0, \tag{4}$$

где

$$K_{i_1\ldots i_n\,b_1\ldots b_n}=\sum_{\alpha_1=b_1}^{i_1}(-1)^{i_1-\alpha_1}C_{\alpha_1}^{b_1}\sum_{\alpha_2=b_2}^{i_2}(-1)^{i_2-\alpha_2}C_{\alpha_2}^{b_2}\cdots\sum_{\alpha_n=b_n}^{i_n}(-1)^{i_n-\alpha_n}C_{\alpha_1}^{b_1}-M_{b_1\ldots b_n},$$

$M_{b_1\ldots b_n}=1$, если $b_k=i_k$ $(k=1,\ldots,n)$, и $M_{b_1\ldots b_n}=0$ в противном случае.
Здесь $a_{i_1i_2\ldots i_n}$ зависят от $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а R и ее производные — от $(x_1,x_2,\ldots,x_n;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

Для доказательства достаточно переписать последнее слагаемое (4) в виде

$$\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1}\cdots\sum_{b_n=0}^{i_n}(-1)^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}(i_\alpha-b_\alpha)}\prod_{k=1}^{n}D_{x_k}^{b_k}\Big(u\prod_{p=1}^{n}D_{x_p}^{i_p-b_p}(a_{i_1\ldots i_n}R)\Big)-$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\prod_{\alpha=1}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u)(a_{i_1\ldots i_n}R)$$

и учесть, что R является решением уравнения (4). Далее удобно представить это слагаемое в форме

$$\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}D_{x_1}^{b_1+1}\Big\{C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}D_{x_1}^{i_1-2-2b_1}\prod_{\alpha=2}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u)D_{x_1}^{b_1+1}(a_{i_1\ldots i_n}R)\Big\}+$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=2}^{m_2}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_2=0}^{i_2/2-1}D_{x_2}^{b_2+1}\Big\{C_{i_2-1-b_2}^{i_2-2-2b_2}D_{x_2}^{i_2-2-2b_2}\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq 2}}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u)D_{x_2}^{b_2+1}(a_{i_1\ldots i_n}R)\Big\}+\cdots+$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{n-1}=0}^{m_{n-1}}\sum_{i_n=2}^{m_n}\sum_{b_n=0}^{i_n/2-1}D_{x_n}^{b_n+1}\Big\{C_{i_n-1-b_n}^{i_n-2-2b_n}D_{x_n}^{i_n-2-2b_n}\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq n}}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u)D_{x_n}^{b_n+1}(a_{i_1\ldots i_n}R)\Big\}+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{i_2=2}^{m_2}\sum_{i_3=0}^{m_3}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}\sum_{b_2=0}^{i_2/2-1}D_{x_1}^{b_1+1}D_{x_2}^{b_2+1}\Big\{C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}C_{i_2-1-b_2}^{i_2-2-2b_2}\times$$

$$\times D_{x_1}^{i_1-2-2b_1}\prod_{\alpha=3}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u)D_{x_1}^{b_1+1}D_{x_2}^{b_2+1}(a_{i_1\ldots i_n}R)\Big\}+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_3=2}^{m_3}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}\sum_{b_3=0}^{i_3/2-1}D_{x_1}^{b_1+1}D_{x_3}^{b_3+1}\Big\{C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}C_{i_3-1-b_3}^{i_3-2-2b_3}\times$$

$$\times D_{x_1}^{i_1-2-2b_1}D_{x_3}^{i_3-2-2b_3}\prod_{\substack{\alpha=2\\ \alpha\neq 3}}^{n}D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u)D_{x_1}^{b_1+1}D_{x_3}^{b_3+1}(a_{i_1\ldots i_n}R)\Big\}+\cdots+$$

$$+\sum_{i_1=2}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=2}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}\cdots\sum_{b_n=0}^{i_n/2-1}\prod_{\alpha=1}^{n}D_{x_\alpha}^{b_\alpha+1}\Big\{\prod_{\alpha=1}^{n}(C_{i_\alpha-1-b_\alpha}^{i_\alpha-2-2b_\alpha}D_{x_\alpha}^{i_\alpha-2-2b_\alpha})(u)\prod_{\alpha=1}^{n}D_{x_\alpha}^{b_\alpha+1}(a_{i_1\ldots i_n}R)\Big\}. \quad (5)$$

Проверку этой записи начнем со случая $m_2=m_3=\cdots=m_n=0$. Здесь достаточно установить, что

$$\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{b_1=0}^{i_1}\Big[\sum_{\alpha_1=b_1}^{i_1}(-1)^{i_1-\alpha_1}C_{\alpha_1}^{b_1}-M_{b_1}\Big]D_{x_1}^{b_1}(u)D_{x_1}^{i_1-b_1}(a_{i_1\,0\ldots0}R)=$$
$$=\sum_{i_1=2}^{m_1}\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}D_{x_1}^{b_1+1}\{C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}D_{x_1}^{i_1-2-2b_1}(u)D_{x_1}^{b_1+1}(a_{i_1\,0\ldots0}R)\},$$

где $M_{b_1}=1$, если $b_1=i_1$, $M_{b_1}=0$ в остальных случаях.

При этом потребуется вспомогательный результат

$$\sum_{b_1=0}^{i_1}\Big[\sum_{\alpha_1=b_1}^{i_1}(-1)^{i_1-\alpha_1}C_{\alpha_1}^{b_1}-M_{b_1}\Big]D_{x_1}^{b_1}(u)D_{x_1}^{i_1-b_1}(a_{i_1\,0\ldots0}R)=$$
$$=\sum_{b_1=0}^{i_1}\Big[\sum_{k=0}^{b_1/2}C_{\frac{i_1}{2}-(\frac{b_1}{2}-k)}^{2k+1}C_{\frac{i_1}{2}+(\frac{b_1}{2}-k)}^{b_1-(2k+1)}-M_{b_1}\Big]D_{x_1}^{b_1}(u)D_{x_1}^{i_1-b_1}(a_{i_1\,0\ldots0}R).$$

Его доказательство осуществляется методом математической индукции. Далее переставляем знаки суммирования и получаем

$$\sum_{b_1=0}^{i_1}\Big[\sum_{k=0}^{b_1/2}C_{\frac{i_1}{2}-(\frac{b_1}{2}-k)}^{2k+1}C_{\frac{i_1}{2}+(\frac{b_1}{2}-k)}^{b_1-(2k+1)}-M_{b_1}\Big]D_{x_1}^{b_1}(u)D_{x_1}^{i_1-b_1}(a_{i_1\,0\ldots0}R)=$$
$$=\sum_{b_1=0}^{i_1/2-1}\sum_{k=0}^{b_1+1}C_{b_1+1}^{k}C_{i_1-1-b_1}^{i_1-2-2b_1}D_{x_1}^{k+i_1-2-2b_1}(u)D_{x_1}^{2+2b_1-k}(a_{i_1\,0\ldots0}R).$$

Вернемся теперь к общему случаю. К каждому множителю вида $\sum\limits_{\alpha_1=b_1}^{i_1}(-1)^{i_1-\alpha_1}C_{\alpha_1}^{b_1}$ прибавим и вычтем соответствующее M_{b_1}. Тогда

$$\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{b_1=0}^{i_1}\cdots\sum_{b_n=0}^{i_n}K_{i_1\ldots i_n\,b_1\ldots b_n}\prod_{k=1}^{n}D_{x_k}^{b_k}(u)\prod_{k=1}^{n}D_{x_k}^{i_k-b_k}(a_{i_1\ldots i_n}R)=$$

$$
= \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \sum_{b_1=0}^{i_1} \cdots \sum_{b_n=0}^{i_n} \left[\left(\sum_{\alpha_1=b_1}^{i_1} (-1)^{i_1-\alpha_1} C_{\alpha_1}^{b_1} - M_{b_1} + M_{b_1} \right) \times \right.
$$

$$
\times \left(\sum_{\alpha_2=b_2}^{i_2} (-1)^{i_2-\alpha_2} C_{\alpha_2}^{b_2} - M_{b_2} + M_{b_2} \right) \cdot \ldots \cdot \left. \left(\sum_{\alpha_n=b_n}^{i_n} (-1)^{i_n-\alpha_n} C_{\alpha_n}^{b_n} - M_{b_n} + M_{b_n} \right) \right] \times
$$

$$
\times \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{b_k}(u) \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{i_k-b_k}(a_{i_1\ldots i_n} R). \quad (6)
$$

Осталось только раскрыть скобки и получить представление левой части (6) в виде (5).

Проинтегрируем (4) с учетом (6). Для этого потребуются следующие тождества, получаемые из (4):

$$
\sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{s=1}^{n}(m_s-\alpha_s)} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} \prod_{s=2}^{n} D_{x_s}^{\alpha_s}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(x_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = 0. \quad (7)
$$

Положим теперь в (4) $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$ и вычислим от левой и правой частей тождества n-кратный интеграл в пределах $x_{10} < \xi_1 < x_1$, $x_{20} < \xi_2 < x_2, \ldots, x_{n0} < \xi_n < x_n$. При этом используются (7) и (6):

$$
\prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{m_k-1}(u)(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{-1}[RL(u)] - \prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{-1} \sum_{i_1=1}^{m_1} (-1)^{i_1-1} D_{x_1}^{i_1-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} \prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(x_{10},\xi_2,\ldots,\xi_n) -
$$

$$
- \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n} D_{x_k}^{-1} \sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_2-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(\xi_1,x_{20},\xi_3,\ldots,\xi_n) - \cdots -
$$

$$
- \prod_{k=1}^{n-1} D_{x_k}^{-1} \sum_{i_n=1}^{m_n} (-1)^{i_n-1} D_{x_n}^{i_n-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=0}^{m_1} \sum_{\alpha_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} D_{x_n}^{\alpha_n-i_n} \prod_{k=1}^{n-1} D_{x_k}^{\alpha_k}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},x_{n0}) -
$$

$$
- \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{-1} \sum_{i_1=1}^{m_2} \sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_1+i_2-1} D_{x_1}^{i_1-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(x_{10},x_2,\xi_3,\ldots,\xi_n) +
$$

$$
+ \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{-1} \sum_{i_1=1}^{m_2} \sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_1+i_2-1} D_{x_1}^{i_1-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k}(a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(x_1,x_{20},\xi_3,\ldots,\xi_n) -
$$

$$
-\prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{-1} \sum_{i_1=1}^{m_2} \sum_{i_2=1}^{m_2} (-1)^{i_1+i_2-1} D_{x_1}^{i_1-1} D_{x_2}^{i_2-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=i_2}^{m_2} \sum_{\alpha_3=0}^{m_3} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \prod_{k=3}^{n} D_{x_k}^{\alpha_k} (a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(x_{10}, x_{20}, \xi_3, \ldots, \xi_n) - \cdots -
$$

$$
-\sum_{i_1=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} (-1)^{i_1+\cdots+i_n-1} D_{x_1}^{i_1-1} \ldots D_{x_n}^{i_n-1}(u) \times
$$

$$
\times \sum_{\alpha_1=i_1}^{m_1} \cdots \sum_{\alpha_n=i_n}^{m_n} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k} D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n-i_n} (a_{\alpha_1\ldots\alpha_n} R)(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}). \quad (8)
$$

Осталось только проинтегрировать (8) по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно $m_1-1, m_2-1, \ldots, m_n-1$ раз. Обозначим через $H(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n)$ правую часть (8) без первого слагаемого. Тогда

$$
u(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{-m_k}[RF] + \prod_{k=1}^{n} D_{x_k}^{-m_k+1}[H] + F_1, \quad (9)
$$

где

$$
F_1 = \sum_{i_1=0}^{m_1-2} D_{x_1}^{-i_1}(\varphi_{i_1}(x_2, \ldots, x_n)) + \sum_{i_2=0}^{m_2-2} D_{x_2}^{-i_2}(\varphi_{i_2}(x_1, x_3, \ldots, x_n)) + \cdots +
$$

$$
+ \sum_{i_n=0}^{m_n-2} D_{x_n}^{-i_n}(\varphi_{i_n}(x_1, \ldots, x_{n-1})) - \sum_{i_1=0}^{m_1-2} \sum_{i_2=0}^{m_2-2} D_{x_1}^{-i_1} D_{x_2}^{-i_2}(D_{x_2}^{i_2} \varphi_{i_1}(x_{20}, x_3, \ldots, x_n)) -
$$

$$
- \sum_{i_1=0}^{m_1-2} \sum_{i_3=0}^{m_3-2} D_{x_1}^{-i_1} D_{x_3}^{-i_3}(D_{x_3}^{i_3} \varphi_{i_1}(x_2, x_{30}, x_4, \ldots, x_n)) - \cdots -
$$

$$
- \sum_{i_1=0}^{m_1-2} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n-2} D_{x_1}^{-i_1} \ldots D_{x_n}^{-i_n}(D_{x_2}^{i_2} \ldots D_{x_n}^{i_n} \varphi_{i_1}(x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0})).
$$

Из формулы (9) видно, что условия гладкости на коэффициенты уравнения (1) обеспечивают принадлежность решения классу $C^{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}(D)$.

На основании вышеизложенного доказана

Теорема. *Задача* (1), (2) *имеет единственное решение, определяемое формулой* (9).

Если считать функции φ_{1i_1} $(i_1 = \overline{0, m_1}), \ldots, \varphi_{n\,i_n}$ $(i_n = \overline{0, m_n})$ произвольными, то можно рассматривать (9) как общее представление решения уравнения (1) подобно тому, как это делается в ([8], с. 66).

Литература

1. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // Докл. РАН. – 1987. – Т. 297.– № 3. – С. 547–552.
2. Mangeron D. *New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena* // Bul. Inst. politehn. Jaşi. – 1968. – V. 14. – № 1–2. – P. 433–436.
3. Mangeron D., Oguztoreli M.N. *Darboux problem for polyvibrating equation: solutions as F-function* // Proc. Nat. Acad. USA. – 1970. – V. 67. – № 3. – P. 1488–1492.
4. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.

5. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 1. – С. 93–97.
6. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 77–81.
7. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения.* Т 1. – М.: ГТТИ, 1934. – 330 с.
8. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила
06.05.2003