ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 517.983

Е.В. АРХАРОВ

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОГО ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ

В работе для решения задачи связанного псевдообращения построены двупараметрические явные и неявные итерационные методы. В случае существенной некорректности задачи исследована сходимость методов при возмущенных входных данных, а также установлена оценка погрешности и приведен вариант априорного выбора параметров регуляризации.

1. Введение

Рассмотрим следующую задачу: *найти элемент $x_* \in X$, удовлетворяющий условиям*

$$x_* \in X_1 = \operatorname{Arg}\min_X \|Ax - y\|^2, \quad x_* \in X_2 = \operatorname{Arg}\min_{X_1} \|Bx - z\|^2. \tag{1.1}$$

Элемент x_* называется связанным псевдорешением уравнения

$$Ax = y, \tag{1.2}$$

а связанное псевдорешение минимальной нормы называется нормальным и обозначается через x^*.

Задача нахождения псевдорешения x_*, удовлетворяющего дополнительному условию

$$Bx = z, \tag{1.3}$$

обобщающая классическую задачу псевдообращения, впервые поставлена в [1].

При отсутствии связей ($B = 0$, $z = 0$) x_* — псевдорешение уравнения (1.2). Классическая задача псевдообращения состоит в нахождении нормального псевдорешения, т. е. псевдорешения минимальной нормы. Для решения этой задачи в [2] предложен метод регуляризации. Для изучаемой задачи (1.1) метод регуляризации В.А. Морозова применим при следующем условии дополнительности операторов A, B:

$$\exists \gamma > 0 \text{ такое, что } \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \geq \gamma^2 \|x\|^2 \quad \forall x \in X,$$

что в терминах составного оператора $\Gamma = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ означает замкнутость его образа и тривиальность ядра.

Метод регуляризации вычисления нормального связанного псевдорешения, применимый без каких-либо ограничений типа замкнутости образов или тривиальности ядер как самих операторов, так и составного оператора Γ, предложен в [3], [4] (см. также [5]). В данной работе на базе этого общего метода построены явные и неявные итерационные схемы регуляризации задачи (1.1). При этом предполагается, что вместо точных данных известны приближенные данные и уровни их погрешностей:

$$\begin{aligned} \|A_t - A\| &\leq t, \quad \|B_h - B\| \leq h, \\ \|y_\tau - y\| &\leq \tau, \quad \|z_\delta - z\| \leq \delta. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Итерационные формулы удобно записать с помощью составного оператора $\widetilde{\Gamma}_r$ и вектора $\widetilde{g}_r$:

$$\widetilde{\Gamma}_r = \begin{bmatrix} A_t \\ \sqrt{r}B_h \end{bmatrix} : X \to Y \times Z, \quad \widetilde{g}_r = \begin{bmatrix} y_\tau \\ \sqrt{r}z_\delta \end{bmatrix} \in Y \times Z,$$

где $Y \times Z$ — декартово произведение гильбертовых пространств. При этом $\widetilde{\Gamma}_1$ будем писать без индекса, в невозмущенном случае составной оператор будем обозначать без волны. Возмущенная явная итерационная схема имеет вид

$$\widetilde{x}_{0,r} = x_0, \quad \widetilde{x}_{n,r} = \widetilde{x}_{n-1,r} - \mu\widetilde{\Gamma}_r^*(\widetilde{\Gamma}_r\widetilde{x}_{n-1,r} - \widetilde{g}_r), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 0 < r \leq 1, \quad 0 < \mu \leq 1/\|\widetilde{\Gamma}\|^2, \tag{1.5}$$

а неявная —

$$\alpha\widetilde{x}_{n,r} + \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r\widetilde{x}_{n,r} = \alpha\widetilde{x}_{n-1,r} + \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{g}_r, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad r > 0, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0. \tag{1.6}$$

Отметим, что для классической задачи псевдообращения эти методы переходят в методы (2.3), (2.4) из ([6], с. 24).

2. О задаче связанного псевдообращения

Приведем известные факты (напр., [4], [5]), касающиеся существования и характеризации связанных псевдорешений.

Для этого введем следующие обозначения: P, Q — ортопроекторы соответственно на ядро $N(A)$ оператора A и на пересечение ядер $N(A) \cap N(B)$ операторов A и B и, как обычно, $P^\perp = I - P$, $Q^\perp = I - Q$. Очевидно, $N(\Gamma) = N(A) \cap N(B)$. Кроме того, псевдообратные операторы к соответствующим операторам будем обозначать знаком "+".

Из (1.1) видно, что существование связанного псевдорешения равносильно непустоте множеств X_1 и X_2. Это накладывает следующие условия на правые части уравнений (1.2), (1.3):

$$y \in D(A^+) = R(A) \oplus N(A^*), \quad z - BA^+y \in D((BP)^+) = R(BP) \oplus N(PB^*).$$

При выполнении этих условий доказывается, что в множестве всех связанных псевдорешений X_2 существует единственный элемент минимальной нормы $x^* \in N(\Gamma)^\perp$ и любое связанное псевдорешение x_* имеет вид $x_* = x^* + Qh$, $h \in X$. Отсюда для любого $x_0 \in X$ инфимум $\|x_0 - x_*\|$ достигается на элементе

$$x_* = x^* + Qx_0, \tag{2.1}$$

и расстояние

$$\rho(x_0, X_2) = \inf_{x_*} \|x_0 - x_*\| = \|Q^\perp x_0 - x^*\|^2 + \inf_h \|Q(x_0 - h)\|^2.$$

Другими словами, ближайшее к x_0 связанное псевдорешение x_* определяется равенством (2.1) и характеризуется соотношением

$$x_0 - x_* \in N(\Gamma)^\perp. \tag{2.2}$$

Из (1.1) также следует, что x_* — точка безусловного минимума функционала $\|Ax - y\|^2$ и условного минимума функционала $\|Bx - z\|^2$, что равносильно тому, что x_* удовлетворяет равенствам

$$A^*(Ax_* - y) = 0, \quad PB^*(Bx_* - z) = 0. \tag{2.3}$$

3. Предварительные оценки

Как и в ([6], сс. 25, 26), рассмотрим следующие порождающие системы функций:

$$f_n(\lambda) = \mu \sum_{i=0}^{n-1} (1-\mu\lambda)^i, \tag{3.1}$$

$$f_{n,\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha(\alpha+\lambda)^{-1})^{i+1}. \tag{3.2}$$

Цель данной работы — получить оценки для некоторых операторов, в которых участвуют операторы $f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)$ и $f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)$. Для этого введем обозначения $S = I - \mu\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r$, $S_\alpha = \alpha(\alpha I + \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)^{-1}$. В силу предположения $0 < r \le 1$ имеем $\|\widetilde{\Gamma}_r\| \le \|\widetilde{\Gamma}\|$, а потому

$$0 < \mu \le \frac{1}{\|\widetilde{\Gamma}\|^2} \le \frac{1}{\|\widetilde{\Gamma}_r\|^2}.$$

Отсюда следует, что самосопряженный оператор S удовлетворяет соотношениям

$$S \ge 0, \quad \|S\| \le 1. \tag{3.3}$$

Из (3.3) с учетом того, что $f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r) = \mu \sum\limits_{i=0}^{n-1} S^i$, легко получить следующие оценки:

$$f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r) \ge 0, \quad \|f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\| \le \mu n, \tag{3.4}$$

$$S^k - S^n = S^k(I - S^{n-k}) = S^k\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r f_{n-k}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r) \ge 0 \ \ \forall k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Теперь имеем

$$I - \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r) = S^n \le S^{n-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1} \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S^i = \frac{1}{\mu n} f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r),$$

и значит,

$$\|(I - \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r))x\| \le \frac{1}{\sqrt{\mu n}} \|f_n^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)x\|. \tag{3.5}$$

Получим еще две оценки, если рассмотрим оператор $K = f_n^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*$. Тогда, очевидно, $0 \le KK^* = \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r) = I - S^n \le I$, и следовательно,

$$\|f_n^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*\| \le 1, \quad \|f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*\| \le \sqrt{\mu n}. \tag{3.6}$$

Аналогично (3.3) для оператора S_α имеем

$$S_\alpha \ge 0, \quad \|S_\alpha\| \le 1, \tag{3.7}$$

откуда, дословно повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\|f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\| \le \frac{n}{\alpha}, \quad \|f_{n,\alpha}^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\| \le \sqrt{\frac{n}{\alpha}}, \tag{3.8}$$

$$\|(I - \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r))x\| \le \sqrt{\frac{\alpha}{n}} \|f_{n,\alpha}^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)x\|, \tag{3.9}$$

$$\|f_{n,\alpha}^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*\| \le 1, \qquad \|f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*\| \le \sqrt{\frac{n}{\alpha}}. \tag{3.10}$$

4. Исследование явного метода

С помощью порождающей системы функций (3.1) приближение (1.5) можно выразить через начальное приближение

$$\widetilde{x}_{n,r} = A_{rn}x_0 + f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{g}_r, \quad A_{rn} = I - \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r). \tag{4.1}$$

Лемма 1. *Для любого* $x \in N(\Gamma)^\perp$

$$A_{rn}x \to 0 \tag{4.2}$$

при $n \to \infty$, $t, h \to 0$.

Доказательство. В силу принципа равномерной ограниченности (напр., [7], с. 98) достаточно установить ограниченность семейства операторов из (4.2) и показать, что (4.2) имеет место на плотном в $N(\Gamma)^\perp$ множестве. Из определения порождающей системы функций (3.1) следует $1 - \lambda f_n(\lambda) = (1-\mu\lambda)^n$. Поэтому, пользуясь обозначением $S = I - \mu\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r$ и оценкой (3.3), имеем

$$\|A_{rn}\| \le \|S^n\| \le 1,$$

и равномерная ограниченность семейства операторов проверена. Очевидно, $N(\Gamma_r) = N(\Gamma) \quad \forall r$. Поэтому $\overline{R(\Gamma_r^*)} = N(\Gamma)^\perp$. Таким образом, плотным в $N(\Gamma)^\perp$ множеством является $R(\Gamma_r^*)$ при любом r. Пусть $x \in R(\Gamma_r^*)$, r фиксировано. Тогда $\exists g \in Y \times Z$ такая, что $x = \Gamma_r^* g$, и

$$A_{rn}\Gamma_r^* g = A_{rn}\widetilde{\Gamma}_r^* g + A_{rn}(\Gamma_r^* - \widetilde{\Gamma}_r^*)g.$$

Подставляя первую оценку (3.6) в (3.5), получаем

$$\|A_{rn}\widetilde{\Gamma}_r^* g\| \le \frac{1}{\sqrt{\mu n}}\|g\|. \tag{4.3}$$

Из (3.5) с учетом оценки (3.4) имеем

$$\|A_{rn}(\Gamma_r^* - \widetilde{\Gamma}_r^*)g\| \le \|(\Gamma_r^* - \widetilde{\Gamma}_r^*)g\|, \tag{4.4}$$

и значит, в силу условий аппроксимации (1.4) правая часть в (4.4) стремится к нулю при $t, h \to 0$. Таким образом, предельное соотношение (4.2) на плотном в $N(\Gamma)^\perp$ множестве следует из (4.3) и (4.4). □

Лемма 2. *Для любого* $x \in D(A^{*+})$

$$\|f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)P^\perp x\| \le (\mu n t + \sqrt{\mu n})\|A^{*+}x\|. \tag{4.5}$$

Доказательство. Для $x \in D(A^{*+})$ имеем

$$P^\perp x = A^* A^{*+} x = (A^* - A_t^*)A^{*+}x + \widetilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} A^{*+}x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)P^\perp x = f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)(A^* - A_t^*)A^{*+}x + f_n(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} A^{*+}x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оценивая по норме это равенство с помощью (3.4), (3.6) и (1.4), получим (4.5). □

Теорема 1. *Пусть задача связанного псевдообращения разрешима и выполнено условие*

$$B^*(Bx^* - z) \in D(A^{*+}). \tag{4.6}$$

Если в возмущенном явном итерационном методе (1.5) *параметры* $n = n(\eta, \sigma)$, $r = r(\eta, \sigma)$, *где* $\eta = \eta(t, \tau)$, $\sigma = \sigma(h, \delta)$, *выбрать такими, что*

$$n \to \infty, \quad r \to 0, \quad r\sqrt{n} \to 0, \quad n(\tau^2 + t) \to 0, \quad \sqrt{n}(\delta^2 + h) \to 0 \tag{4.7}$$

при $\eta \to 0$, $\sigma \to 0$, то

$$\widetilde{x}_{n,r} \to x_* \quad \text{при} \quad \eta \to 0, \quad \sigma \to 0, \tag{4.8}$$

где x_* — ближайшее к x_0 связанное псевдорешение уравнения (1.2).

Если начальная погрешность представима в виде

$$x_0 - x_* = A^* u, \tag{4.9}$$

то справедлива оценка погрешности

$$\|\widetilde{x}_{n,r} - x_*\| \le \left(\frac{1}{\sqrt{\mu n}} + t\right)\|u\| + \sqrt{\mu n}[(t + \sqrt{r}h)\|x_*\| + \tau + \sqrt{r}\delta] + \\ + \mu n(t\|P_{N(A^*)}y\| + rh\|Bx_* - z\|) + r(\mu n t + \sqrt{\mu n})\|A^{*+}B^*(Bx_* - z)\|. \tag{4.10}$$

Доказательство. Для погрешности приближения (4.1) имеем равенство

$$\widetilde{x}_{n,r} - x_* = A_{rn}(x_0 - x_*) + f_n(\widetilde{\Gamma}_r^* \widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*(\widetilde{g}_r - \widetilde{\Gamma}_r x_*). \tag{4.11}$$

Согласно (2.2) и лемме 1 первое слагаемое в (4.11) стремится к нулю при $n \to \infty$. Преобразуем выражение $\widetilde{\Gamma}_r^*(\widetilde{g}_r - \widetilde{\Gamma}_r x_*) = A_t^*(y_\tau - A_t x_*) + rB_h^*(z_\delta - B_h x_*)$. Используя равенства (2.3), имеем

$$A_t^*(y_\tau - A_t x_*) = (A^* - A_t^*)(Ax_* - y) + A_t^*((A - A_t)x_* + (y_\tau - y)),$$
$$B_h^*(z_\delta - B_h x_*) = (B^* - B_h^*)(Bx_* - z) + B_h^*((B - B_h)x_* + (z_\delta - z)) + P^\perp B^*(z - Bx_*).$$

Следовательно, второе слагаемое в (4.11)

$$f_n(\widetilde{\Gamma}_r^* \widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*(\widetilde{g}_r - \widetilde{\Gamma}_r^* x_*) = f_n(\widetilde{\Gamma}_r^* \widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} (A - A_t)x_* + (y_\tau - y) \\ \sqrt{r}(B - B_h)x_* + \sqrt{r}(z_\delta - z) \end{bmatrix} + \\ + f_n(\widetilde{\Gamma}_r^* \widetilde{\Gamma}_r)(A^* - A_t^*)(Ax_* - y) + rf_n(\widetilde{\Gamma}_r^* \widetilde{\Gamma}_r)(B^* - B_h^*)(Bx_* - z) + rf_n(\widetilde{\Gamma}_r^* \widetilde{\Gamma}_r)P^\perp B^*(z - Bx_*).$$

Используя оценки (1.4), (3.4), (3.6), (4.5) и учитывая, что $Ax_* - y = P_{N(A^*)}y$, получаем

$$\|f_n(\widetilde{\Gamma}_r^* \widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*(\widetilde{g}_r - \widetilde{\Gamma}_r x_*)\| \le \sqrt{\mu n}((t + \sqrt{r}h)\|x_*\| + \tau + \sqrt{r}\delta) + \\ + \mu n(t\|P_{N(A^*)}y\| + rh\|Bx_* - z\|) + r(\mu n t + \sqrt{\mu n})\|A^{*+}B^*(Bx_* - z)\|. \tag{4.12}$$

Значит, при выполнении условий (4.7) второе слагаемое в (4.11) стремится к нулю, и (4.8) доказано.

Пусть начальной погрешностью является (4.9). Тогда ее можно записать в виде $x_0 - x_* = \Gamma_r^* \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$. Подставляя в оценки (4.3) и (4.4) $g = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$, получим

$$\|A_{rn}(x_0 - x_*)\| \le \left(\frac{1}{\sqrt{\mu n}} + t\right)\|u\|. \tag{4.13}$$

Теперь оценка погрешности (4.10) вытекает из (4.12) и (4.13). $\square$

Замечание. Если параметры n и r выбирать из условия $nr \to 0$, то уровни возмущений дополнительного уравнения (1.3) можно не согласовывать с параметрами. Тогда (4.7) примет вид $n \to \infty$, $r \to 0$, $nr \to 0$, $n(\tau^2 + t) \to 0$.

5. Исследование неявного итерационного метода

Через начальное приближение последовательность (1.6) выражается в виде

$$\widetilde{x}_{n,r} = A_{rn,\alpha}x_0 + f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{g}_r, \quad A_{rn,\alpha} = I - \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r), \tag{5.1}$$

где $f_{n,\alpha}(\lambda)$ — функция, определенная в (3.2).

Справедлива аналогичная лемме 1

Лемма 3. *Для любого* $x \in N(\Gamma)^\perp$

$$A_{rn,\alpha}x \to 0 \tag{5.2}$$

при $n \to \infty$*,* $t, h \to 0$*.*

Ограниченность семейства (5.2) следует из равенства $A_{rn,\alpha} = S_\alpha^n$, где $S_\alpha = \alpha(\alpha I + \widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)^{-1}$, и второй оценки (3.7).

Неравенства

$$\|A_{rn,\alpha}\widetilde{\Gamma}_r^* g\| \le \sqrt{\frac{\alpha}{n}}\|g\|, \tag{5.3}$$

$$\|A_{rn,\alpha}(\Gamma_r^* - \widetilde{\Gamma}_r^*)g\| \le \|(\Gamma_r^* - \widetilde{\Gamma}_r^*)g\| \tag{5.4}$$

следуют из (3.9) аналогично (4.3) и (4.4) с учетом второй оценки (3.8) и первой оценки (3.10) соответственно.

Аналогично лемме 2 доказывается

Лемма 4. *Для любого* $x \in D(A^{*+})$

$$\|f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)P^\perp x\| \le \left(\sqrt{\frac{n}{\alpha}} + \frac{n}{\alpha}t\right)\|A^{*+}x\|. \tag{5.5}$$

Для этого используются оценки (3.8) и (3.10).

Погрешность приближения (5.1) имеет вид

$$\widetilde{x}_{n,r} - x_* = A_{rn,\alpha}(x_0 - x_*) + f_{n,\alpha}(\widetilde{\Gamma}_r^*\widetilde{\Gamma}_r)\widetilde{\Gamma}_r^*(\widetilde{g}_r - \widetilde{\Gamma}_r x_*).$$

Сходимость $\widetilde{x}_{n,r} \to x_*$ при $\eta \to 0$, $\sigma \to 0$ и выполнении условий (4.7) имеет место согласно лемме 3 и оценке, аналогичной (4.12). При выполнении условия (4.9) с использованием (5.3)–(5.5) доказывается оценка погрешности:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x}_{n,r} - x_*\| \le \left(\sqrt{\frac{\alpha}{n}} + t\right)\|u\| + \sqrt{\frac{n}{\alpha}}[(t + \sqrt{r}h)\|x_*\| + \tau + \sqrt{r}\delta] + \\ + \frac{n}{\alpha}(t\|P_{N(A^*)}y\| + rh\|Bx_* - z\|) + r\left(\sqrt{\frac{n}{\alpha}} + \frac{n}{\alpha}t\right)\|A^{*+}B^*(Bx_* - z)\|.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Таким образом, для неявного итерационного метода справедлива теорема 1, в которой оценку погрешности (4.10) следует заменить на (5.6).

6. О выборе параметров регуляризации

Оценки (4.10) и (5.6) позволяют высказать принцип априорного выбора параметров регуляризации.

Введем обозначение

$$\beta = \begin{cases} \mu^{-1}, \\ \alpha \end{cases} \tag{6.1}$$

и запишем оценки (4.10) и (5.6) в виде

$$\|\widetilde{x}_{n,r} - x_*\| \leq \sqrt{\beta}\|u\|n^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}[(t\|x_*\| + \tau) + \sqrt{r}(h\|x_*\| + \delta) + r\|A^{*+}B^*(Bx_* - z)\|]n^{\frac{1}{2}} + \\ + \frac{1}{\beta}[t\|P_{N(A^*)}y\| + r(h\|Bx_* - z\| + t\|A^{*+}B^*(Bx_* - z)\|)]n + t\|u\|. \tag{6.2}$$

Теорема 2. *Пусть задача связанного псевдообращения разрешима и выполнено условие* (4.6).

Если в возмущенных методах (1.5) *и* (1.6) *параметры выбрать такими, что*

$$n \to \infty, \quad r \to 0, \quad nr \to 0, \quad n(\tau^2 + t) \to 0 \tag{6.3}$$

при $\eta = \eta(t, \tau) \to 0$, $\sigma = \sigma(h, \delta) \to 0$, *то*

$$\widetilde{x}_{n,r} \to x_* \quad \textit{при} \quad \eta \to 0, \quad \sigma \to 0, \tag{6.4}$$

где x_* — *ближайшее к* x_0 *связанное псевдорешение уравнения* (1.2)

Если начальная погрешность представима в виде (4.9), *то при выборе параметров*

$$n = \mathrm{int}(\beta\gamma^{\frac{2}{3}}(\tau + t)^{-\frac{2}{3}}), \quad r = (\tau + t)^{\frac{4}{3}}, \tag{6.5}$$

где $\gamma = \|u\|/(2\|P_{N(A^*)}y\|)$, *а* β *определено в* (6.1), *то имеет место асимптотическая оценка погрешности*

$$\overline{\lim_{\eta \to 0,\ \sigma \to 0}} \frac{\|\widetilde{x}_{n,r} - x_*\|}{(\tau + t)^{\frac{1}{3}}} \leq \|u\|\gamma^{-\frac{1}{3}} + \gamma^{\frac{2}{3}}\|P_{N(A^*)}y\|. \tag{6.6}$$

Доказательство. При выборе параметров в виде (6.5) легко видеть, что выполняются предельные соотношения (6.3), и значит, имеет место сходимость (6.4).

Параметр n в (6.5) выбирается из условия минимизации суммы первого и третьего членов оценки (6.2). Параметр r выбран из условия $\sqrt{r}(\tau + t)^{-\frac{1}{3}} = (\tau + t)^{\frac{1}{3}}$. Тогда второе слагаемое в (6.2) — бесконечно малая более высокого порядка, чем $(\tau + t)^{\frac{1}{3}}$. Поэтому асимптотическая оценка (6.6) вытекает из (6.2). $\square$

Отметим, что теорема 2 доказана при самом общем предположении относительно разрешимости задачи (1.1), а именно, разрешимости уравнения (1.2): $y \in D(A^+)$, иначе $P_{R(A)}y \in R(A)$.

Если предположить, что

$$y \in R(A),$$

то $P_{N(A^*)}y = 0$, и оценка (6.2) примет вид

$$\|\widetilde{x}_{n,r} - x_*\| \leq \sqrt{\beta}\|u\|n^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}[(t\|x_*\| + \tau) + \sqrt{r}(h\|x_*\| + \delta) + \\ + r\|A^{*+}B^*(Bx_* - z)\|]n^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{\beta}(h\|Bx_* - z\| + t\|A^{*+}B^*(Bx_* - z)\|)n + t\|u\|. \tag{6.7}$$

Тогда условия (6.3) заменятся на

$$n \to \infty, \quad r \to 0, \quad nr \to 0, \quad \sqrt{n}(\tau + t) \to 0$$

при $\eta \to 0$, $\sigma \to 0$.

Параметр n найдем из условия минимума суммы первого и второго членов в (6.7), а r — из условия $\sqrt{r}(\tau + tc)^{-1} = \text{const}$, т. е.

$$n = \text{int}(\beta\|u\|(\tau + tc)^{-1}), \quad r = (\tau + tc)^2,$$

где $c \geq \|x_*\|$. С этими параметрами асимптотическая оценка примет вид

$$\overline{\lim_{\eta\to 0,\ \sigma\to 0}} \frac{\|\widetilde{x}_{n,r} - x_*\|}{(\tau + tc)^{\frac{1}{2}}} \leq 2\|u\|^{\frac{1}{2}}.$$

В заключение отметим, что следствия из полученных результатов для случая $B = 0$, $z = 0$ согласуются с соответствующими результатами из теорем 2.3 и 2.4 из ([6], сс. 99, 100).

Литература

1. Морозов В.А., Кирсанова Н.Н. *Об одном обобщении метода регуляризации* // Вычислит. методы и программ. – М.: МГУ, 1970. – Вып. 14. – С. 40–45.
2. Морозов В.А. *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.* – М.: Наука, 1987. – 240 с.
3. Шафиев Р.А. *О регулярных методах вычисления L-псевдообратных операторов* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1983. – Т. 23. – № 3. – С. 536–544.
4. Шафиев Р.А. *К теории методов регуляризации Тихонова–Лаврентьева* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 282. – № 4. – С. 804–808.
5. Шафиев Р.А. *Псевдообращение операторов и некоторые приложения.* – Баку: Элм, 1989. – 152 с.
6. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 181 с.
7. Садовничий В.А. *Теория операторов.* Учеб. для вузов. – М.: Высш. школа, 1999. – 368 с.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступила
01.04.2003