ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 514.752

С.Х. АРУТЮНЯН

ГЕОМЕТРИЯ ПОДМНОГООБРАЗИЙ СО СТРУКТУРОЙ ДВОЙНОГО РАССЛОЕНИЯ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ РАШЕВСКОГО

1. Введение

Пространством Рашевского называется четномерное псевдориманово пространство с метрикой половинного индекса. Это пространство было введено в [1] как пример риманова пространства с некоторыми интересными свойствами и как гиперболический аналог так называемых A-пространств эллиптического типа, введенных в [2]. Позднее оно было систематически изучено в [3], где введены параболические A-пространства, но без исследования возможных естественных приложений.

П.К. Рашевский изучил инвариантное скалярное поле $U(x^1,\dots,x^n,y_1,\dots,y_n)$ с невырожденной матрицей частных производных второго порядка

$$\det\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial y_i}\right) \neq 0, \quad i,j=1,2,\dots,n,$$

и ввел псевдориманову метрику индекса n на $2n$-мерном многообразии M с локальными переменными $x^1,\dots,x^n$, $y_1,\dots,y_n$ и соответствующую псевдориманову связность. Оно обладает следующими свойствами [1].

1. Скалярное поле $U(x^1,\dots,x^n,y_1,\dots,y_n)$, порождающее структуру псевдориманова пространства на M, определяется с произволом
$$U(x^i,y_j) \to U(x^i,y_j) + U_1(x^i) + U_2(y_j).$$
2. Многообразие M состоит из двух семейств n-мерных слоев. Каждая точка из M принадлежит одному и только одному слою из каждого семейства слоев, слои из разных семейств имеют пересечение не более чем в одной точке.
3. Слои обоих семейств изотропны.
4. Слои каждого семейства обладают свойством абсолютного параллелизма: векторы, касательные к слоям данного семейства, остаются касательными к ним после параллельного переноса вдоль произвольной гладкой кривой.

Из последних двух свойств следует, что оба семейства слоев являются вполне геодезическими в M.

Было установлено [4], что эти пространства естественным образом связаны с некоторыми классами n-кратных интегралов, зависящих от n параметров: если матрица частных производных второго порядка натурального логарифма подинтегральной функции такого интеграла невырождена, то этот интеграл на $2n$-мерном многообразии двойного расслоения переменных и параметров естественным образом порождает структуру $2n$-мерного пространства Рашевского. Более того, эта структура не изменяется, если подинтегральную функцию умножать на произвольную гладкую функцию, зависящую только от переменных или от параметров.

Пространство Рашевского можно рассматривать как двойное расслоение с двумя семействами n-мерных трансверсально геодезических слоев. Оно является обобщением прямого произведения двух многообразий: $2n$-мерное гладкое многообразие M называется двойным расслоением, если заданы два гладких отображения

$$\pi_i : M \to M_i, \quad i = 1, 2,$$

многообразия M на два n-мерных гладких многообразия M_1 и M_2; слои расслоения, т. е. полные прообразы точек из M_1 и M_2 относительно отображений π_1 и π_2 соответственно, являются n-мерными гладкими многообразиями, и в произвольной точке M касательные пространства к слоям расслоений π_1 и π_2 имеют лишь нулевое пересечение:

$$T_p(\pi_1^{-1}(x)) \cap T_p(\pi_2^{-1}(y)) = p, \quad \pi_1(p) = x, \quad \pi_2(p) = y, \quad x \in M_1, \quad y \in M_2.$$

Следовательно, касательное пространство к M в произвольной точке является прямой суммой двух n-мерных подпространств.

Было доказано [4], что структура $2n$-мерного псевдоевклидова пространства Рашевского порождается на M преобразованием Фурье. Отсюда следует, что интегралы, порождающие на соответствующем многообразии M структуру пространства Рашевского с нетривиальным тензором кривизны, являются естественными обобщениями классического преобразования Фурье, и отыскание соответствующих ядер интегралов является интересной задачей современной дифференциальной геометрии. Изучение некоторых обобщений исходной задачи, когда число переменных отлично от числа параметров, приводит к общей задаче изучения подмногообразий четной размерности псевдоевклидова пространства Рашевского. Это исследование было начато с изучения таких подмногообразий коразмерности два в псевдоевклидовом пространстве Рашевского E^n_{2n}.

Данная работа посвящена изучению подмногообразий M четной размерности со структурой двойного расслоения в E^n_{2n} в случае, когда размерность M является достаточно большой. Используется метод современных дифференциально-геометрических исследований, основанный на технике метода внешних форм Картана ([5], [6]). Доказано, что метрическая структура пространства E^n_{2n} порождает на $2m$-мерном подмногообразии структуру пространства аффинной связности специального типа. Найден канонический интеграл этой дифференциально-геометрической структуры и найдены параметрические уравнения подмногообразия M.

2. Четномерные подмногообразия со структурой двойного расслоения в псевдоевклидовом пространстве E^n_{2n}

Рассмотрим $2m$-мерное подмногообразие M со структурой двойного расслоения в $2n$-мерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой индекса n — псевдоевклидовом пространстве Рашевского E^n_{2n} в случае, когда $2m > n$. Это означает, что размерность подмногообразия M достаточно велика. Предположим, что в кобазисе линейных дифференциальных форм $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, адаптированных к структуре псевдоевклидова пространства Рашевского E^n_{2n}, структурные уравнения этого пространства представлены в виде [4]

$$\begin{aligned} dw^\alpha &= w^\alpha_\beta \wedge w^\beta, \\ dw_\alpha &= -w^\beta_\alpha \wedge w_\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n, \\ dw^\alpha_\beta &= w^\alpha_\gamma \wedge w^\gamma_\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

а подмногообразие M определено уравнениями

$$w^{m+i} = w_{2m-n+i}, \quad w_{m+i} = w^i, \quad i = 1, \ldots, n-m. \tag{2}$$

Отметим, что соотношения (2) задают наиболее общий класс $2m$-мерных подмногообразий со структурой двойного расслоения в E^n_{2n}. Этот класс является прямым обобщением соответствующих классов подмногообразий коразмерности два, изученных в [7], [8]. Заметим также, что структура двойного расслоения очень близка к структуре пространств декартовой композиции, введенных А.П. Норденом в [9].

Возможны три случая: 1) $2(n-m)<m$, 2) $2(n-m)=m$, 3) $2(n-m)>m$. В данной работе рассматривается первый случай. Метрическая форма объемлющего пространства Рашевского E^n_{2n}, определяемая инвариантной замкнутой невырожденной билинейной формой $d\varphi=\omega^\alpha\wedge\omega_\alpha$, порождает на M билинейную форму

$$d\varphi^*=w^i\wedge w_i+w^a\wedge w_a+w^{2m-n+i}\wedge w_{2m-n+i}+w_{2m-n+i}\wedge w^i$$

$(a=n-m+1,\dots,2m-n)$. Подстановка соотношений (2) в (1) приводит к следующей системе общих структурных уравнений подмногообразия M:

$$\begin{aligned}
&dw^i=w^i_k\wedge w^k+w^i_a\wedge w^a+w^i_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}+w^i_{m+k}\wedge w_{2m-n+k},\\
&dw^a=w^a_b\wedge w^b+w^a_i\wedge w^i+w^a_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}+w^a_{m+k}\wedge w_{2m-n+k},\\
&dw^{2m-n+i}=w^{2m-n+i}_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}+w^{2m-n+i}_k\wedge w^k+w^{2m-n+i}_a\wedge w^a+w^{2m-n+i}_{m+k}\wedge w_{2m-n+k},\\
&dw_i=-w^k_i\wedge w_k-w^a_i\wedge w_a-w^{2m-n+k}_i\wedge w_{2m-n+k}-w^{m+k}_i\wedge w^k,\\
&dw_a=-w^b_a\wedge w_b-w^k_a\wedge w_k-w^{2m-n+k}_a\wedge w_{2m-n+k}-w^{m+k}_a\wedge w^k,\\
&dw_{2m-n+i}=-w^{2m-n+k}_{2m-n+i}\wedge w_{2m-n+k}-w^k_{2m-n+i}\wedge w_k-w^a_{2m-n+i}\wedge w_a-w^{m+k}_{2m-n+i}\wedge w^k,\\
&dw^i_k=w^i_p\wedge w^p_k+w^i_a\wedge w^a_k+w^i_{2m-n+p}\wedge w^{2m-n+p}_k+w^i_{m+p}\wedge w^{m+p}_k,\\
&dw^a_b=w^a_c\wedge w^c_b+w^a_k\wedge w^k_b+w^a_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}_b+w^a_{m+k}\wedge w^{m+k}_b,\\
&dw^{2m-n+i}_{2m-n+k}=w^{2m-n+i}_{2m-n+p}\wedge w^{2m-n+p}_{2m-n+k}+w^{2m-n+i}_p\wedge w^p_{2m-n+k}+w^{2m-m+i}_a\wedge w^a_{2m-n+k}+w^{2m-n+i}_{m+p}\wedge w^{m+p}_{2m-n+k},\\
&dw^a_i=w^a_k\wedge w^k_i+w^a_b\wedge w^b_i+w^a_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}_i+w^a_{m+k}\wedge w^{m+k}_i,\\
&dw^i_a=w^i_k\wedge w^k_a+w^i_b\wedge w^b_a+w^i_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}_a+w^i_{m+k}\wedge w^{m+k}_a,\\
&dw^i_{2m-n+k}=w^i_p\wedge w^p_{2m-n+k}+w^i_a\wedge w^a_{2m-n+k}+w^i_{2m-n+p}\wedge w^{2m-n+p}_{2m-n+k}+w^i_{m+p}\wedge w^{m+p}_{2m-n+k},\\
&dw^{2m-n+i}_k=w^{2m-n+i}_p\wedge w^p_k+w^{2m-n+i}_a\wedge w^a_k+w^{2m-n+i}_{2m-n+p}\wedge w^{2m-n+p}_k+w^{2m-n+i}_{m+p}\wedge w^{m+p}_k,\\
&dw^a_{2m-n+k}=w^a_p\wedge w^p_{2m-n+k}+w^a_b\wedge w^b_{2m-n+k}+w^a_{2m-n+p}\wedge w^{2m-n+p}_{2m-n+k}+w^a_{m+p}\wedge w^{m+p}_{2m-n+k},\\
&dw^{2m-n+i}_a=w^{2m-n+i}_k\wedge w^k_a+w^{2m-n+i}_b\wedge w^b_a+w^{2m-n+i}_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}_a+w^{2m-n+i}_{m+k}\wedge w^{m+k}_a,
\end{aligned}\tag{3}$$

где вторичные формы w^i_k, w^i_a, w^i_{2m-n+k}, w^i_{m+k}, w^a_b, w^a_i, w^a_{2m-n+k}, w^a_{m+k}, w^{2m-n+i}_{2m-n+k}, w^{2m-n+i}_k, w^{2m-n+i}_a, w^{2m-n+i}_{m+k} и w^{m+k}_i, w^{m+k}_a, w^{m+k}_{2m-n+i} заданы на многообразии касательных реперов второго порядка $T^{(2)}M$, ассоциированных к многообразию M и адаптированных к его структуре. Следовательно, учитывая то обстоятельство, что многообразие M имеет структуру двойного расслоения, т.е. следующая система линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&w^i=0,\quad w^a=0,\quad w^{2m-n+i}=0,\quad i=1,\dots,n-m;\quad a=n-m+1,\dots,2m-n;\\
&w_i=0,\quad w_a=0,\quad w_{2m-n+i}=0,\quad i=1,\dots,n-m;\quad a=n-m+1,\dots,2m-n,
\end{aligned}$$

вполне интегрируема, приходим к системе тождеств

$$\begin{gathered}
w^i_{m+k}\wedge w_{2m-n+k}=0,\quad w^a_{m+k}\wedge w_{2m-n+k}=0,\quad w^{2m-n+k}_{m+k}\wedge w_{2m-n+k}=0;\\
w^{m+k}_i\wedge w^k=0,\quad w^{m+k}_a\wedge w^k=0,\quad w^{m+k}_{2m-n+i}\wedge w^k=0.
\end{gathered}\tag{4}$$

Отсюда следует, что вторичные формы w^i_{m+k}, w^a_{m+k}, w^{m+k}_{2m-n+i} и w^{m+k}_i, w^{m+k}_a, w^{m+k}_{2m-n+i} являются линейными комбинациями базисных линейных дифференциальных форм w_{2m-n+i} и w^i соответственно $(i=1,\dots,n-m)$. С другой стороны, внешнее дифференцирование соотношений (2), которые являются тождествами на M, приводит к тождествам

$$\begin{gathered}
\left(w^{m+i}_{m+k}+w^{2m-n+k}_{2m-n+i}\right)\wedge w_{2m-n+k}+\left(w^{m+k}_{2m-n+i}+w^{m+i}_k\right)\wedge w^k+w^{m+i}_a\wedge w^a+\\
+w^{m+i}_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}+w^k_{2m-n+i}\wedge w_k+w^a_{2m-n+i}\wedge w_a=0,\\
\left(w^{m+i}_{m+k}+w^k_i\right)\wedge w^i+\left(w^{2m-n+i}_{m+k}+w^k_{m+i}\right)\wedge w_{2m-n+i}+w^i_{m+k}\wedge w_i+\\
+w^a_{m+k}\wedge w_a+w^k_a\wedge w^a+w^k_{2m-n+i}\wedge w^{2m-n+i}=0.
\end{gathered}\tag{5}$$

Из сделанного выше замечания следует, что система (5) равносильна системе следующих тождеств:

$$
\begin{aligned}
\left(w^{m+i}_{m+k}+w^{2m-n+k}_{2m-n+i}\right)\wedge w_{2m-n+k}+w^{k}_{2m-n+i}\wedge w_k+w^{a}_{2m-n+i}\wedge w_a&=0,\\
\left(w^{m+k}_{2m-n+i}+w^{m+i}_{k}\right)\wedge w^{k}+w^{m+i}_{a}\wedge w^a+w^{m+i}_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}&=0,\\
\left(w^{m+i}_{m+k}+w^{k}_{i}\right)\wedge w^{i}+w^{k}_{a}\wedge w^a+w^{k}_{2m-n+i}\wedge w^{2m-n+i}&=0,\\
\left(w^{2m-n+i}_{m+k}+w^{k}_{m+i}\right)\wedge w_{2m-n+i}+w^{i}_{m+k}\wedge w_i+w^{a}_{m+k}\wedge w_a&=0.
\end{aligned}
\tag{5'}
$$

Легко показать, что $w^k_{2m-n+i}=0$. Действительно, из первого тождества этой системы следует, что вторичная форма w^k_{2m-n+i} является линейной комбинацией базисных линейных дифференциальных форм w_i, w_a, w_{2m-n+i}, $i=1,\dots,n-m$; $a=n-m+1,\dots,2m-n$. Но как легко видеть из третьего тождества, та же самая форма разлагается только по базисным линейным дифференциальным формам w^i, w^a, w^{2m-n+i} ($i=1,\dots,n-m$; $a=n-m+1,\dots,2m-n$), следовательно, она обращается в нуль.

Сравнивая соотношения (5′) и (4), легко доказать, что

$$w^a_{m+k}=0\quad ,w^i_{m+k}=0,\quad w^{m+i}_a=0,\quad w^{m+i}_{2m-n+k}=0.$$

Действительно, из тождеств (4) следует, что в последнем из тождеств (5′) все вторичные формы являются линейными комбинациями базисных линейных дифференциальных форм w_{2m-n+i}. Это означает, в частности, что имеют место тождества

$$\left(w^{2m-n+i}_{m+k}+w^{k}_{m+i}\right)\wedge w_{2m-n+i}=0,\quad w^i_{m+k}\wedge w_i=0,\quad w^a_{m+k}\wedge w_a=0.$$

Следовательно, $w^i_{m+k}=0$, $w^a_{m+k}=0$ и $w^{2m-n+i}_{m+k}\wedge w_{2m-n+i}=0$. Используя лемму Картана [5], получаем разложение

$$w^{2m-n+i}_{m+k}=C^{2m-n+i\,2m-n+p}_{m+k}w_{2m-n+p},\quad C^{2m-n+i\,2m-n+p}_{m+k}=C^{2m-n+p\,2m-n+i}_{m+k}.$$

Как легко видеть из условий (4), вторичные формы w^{m+i}_a, w^{m+i}_{2m-n+k}, w^{m+i}_k являются линейными комбинациями лишь базисных линейных дифференциальных форм w^i. Следовательно, имеют место тождества

$$\left(w^{m+k}_{2m-n+i}+w^{m+i}_{k}\right)\wedge w^k=0,\quad w^{m+i}_a\wedge w^a=0,\quad w^{m+i}_{2m-n+k}\wedge w^{2m-n+k}=0.$$

Теперь, очевидно, $w^{m+i}_a=0$, $w^{m+i}_{2m-n+k}=0$ и

$$w^{m+i}_k=C^{m+i}_{kp}w^p,\quad C^{m+i}_{kp}=C^{m+i}_{pk}.$$

В силу условий (4), величины $C^{2m-n+i\;2m-n+p}_{m+k}$ и C^{m+i}_{kp} являются симметричными относительно индексов k, p и i, p соответственно:

$$C^{2m-n+i\;2m-n+p}_{m+k}=C^{2m-n+i\;2m-n+k}_{m+p},\quad C^{m+i}_{kp}=C^{m+p}_{ik}.$$

Тождества (5′) приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
\left(w^{m+i}_{m+k}+w^{2m-n+k}_{2m-n+i}\right)\wedge w_{2m-n+k}+w^{a}_{2m-n+i}\wedge w_a&=0,\\
\left(w^{m+i}_{m+k}+w^{k}_{i}\right)\wedge w^{i}+w^{k}_{a}\wedge w^a&=0.
\end{aligned}
\tag{5''}
$$

Если M имеет структуру двойного расслоения, то нетрудно показать прямым вычислением, что форма $w^i\wedge w_i+w^a\wedge w_a+w^{2m-n+i}\wedge w_{2m-n+i}$ является замкнутой: ее внешний дифференциал тождественно равен нулю как алгебраическое следствие структурных уравнений (3) и условий (4). Это означает, что билинейная форма $w_{2m-n+i}\wedge w^i$ также должна быть замкнутой, соответствующее условие может быть записано в виде

$$\left(w^{2m-n+k}_{2m-n+i}-w^k_i\right)\wedge w_{2m-n+k}\wedge w^i+w^a_{2m-n+i}\wedge w_a\wedge w^i-w^i_a\wedge w_{2m-n+i}\wedge w^a=0.$$

Нетрудно проверить, что это тождество является следствием тождеств (5″).

Используя тождества $(5'')$, легко показать, что структурные уравнения форм w^i, w_{2m-n+i} могут быть записаны в виде

$$dw^i = -w^{m+k}_{m+i} \wedge w^k, \quad dw_{2m-n+i} = w^{m+i}_{m+k} \wedge w_{2m-n+k}$$

и тем самым в системе (3) формы $w^i_a \wedge w^a$ и $w^a_{2m-n+i} \wedge w_a$ обращаются в нуль. Используя это замечание и применяя лемму Картана [5] к тождествам $(5'')$, получаем разложения

$$\begin{gathered} w^{m+i}_{m+k} + w^{2m-n+k}_{2m-n+i} = C^{2m-n+k\,2m-n+p}_{2m-n+i} w_{2m-n+p}, \quad C^{2m-n+k\,2m-n+p}_{2m-n+i} = C^{2m-n+p\,2m-n+k}_{2m-n+i}; \\ w^a_{2m-n+i} = C^{ab}_{2m-n+i} w_b, \quad C^{ab}_{2m-n+i} w_b = C^{ba}_{2m-n+i}; \\ w^{m+i}_{m+k} + w^k_i = C^k_{ip} w^p, \quad C^k_{ip} = C^k_{pi}; \\ w^i_a = C^i_{ab} w^b, \quad C^i_{ab} = C^i_{ba}. \end{gathered} \tag{6}$$

В этих разложениях вторичных форм по базисным линейным дифференциальным формам некоторые коэффициенты являются инвариантами и их обращение в нуль имеет инвариантный геометрический смысл. Чтобы найти его, необходимо найти дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложений (6). Внешнее дифференцирование соотношений (6), применение структурных уравнений (3), условий (4) и их следствий приводят к тождествам

$$\begin{aligned} \big(\nabla C^{2m-n+k\;2m-n+p}_{2m-n+i} - C^{2m-n+t\;2m-n+r}_{2m-n+i} C^{2m-n+k\;2m-n+p}_{2m-n+t}\big) w_{2m-n+r} \wedge w_{2m-n+p} + \\ + C^{ab}_{2m-n+i} w^{2m-n+k}_b \wedge w_a = 0, \\ \nabla C^{ab}_{2m-n+i} \wedge w_b - C^{ab}_{2m-n+i} w^{2m-n+k}_b \wedge w_{2m-n+k} - C^{ab}_{2m-n+i} C^k_{bc} w^c \wedge w_k = 0, \\ \big(\nabla C^k_{ip} - C^t_{ir} C^k_{ip} w^r\big) \wedge w^p + C^k_{ab} w^b_i \wedge w^a = 0, \\ C^i_{ab} w^b_k \wedge \omega^k + \nabla C^i_{ab} \wedge w^b + C^i_{ab} w^b_k \wedge w^k + C^i_{ab} C^{bc}_{2m-n+k} w_c \wedge w^{2m-n+k} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую систему алгебраических соотношений:

$$\begin{aligned} C^{m+i}_{kp} C^p_{ab} &= 0, \\ C^{ab}_{2m-n+i} C^{2m-n+i\;2m-n+k}_{m+p} &= 0, \\ C^i_{ab} C^{bc}_{2m-n+k} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

которые являются основой для дальнейшей классификации допустимых дифференциально-геометрических структур. Кроме того, из последних тождеств следует, что величины C^i_{ab}, C^{ab}_{2m-n+i} являются инвариантами. Структурные уравнения подмногообразия M могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} & d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k, \\ & d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \omega^a_i \wedge \omega^i + C^{ab}_{2m-n+i} \omega_b \wedge \omega^{2m-n+i}, \\ & d\omega^{2m-n+i} = \omega^{2m-n+i}_{2m-n+k} \wedge \omega^{2m-n+k} + \omega^{2m-n+i}_k \wedge \omega^k + \omega^{2m-n+i}_a \wedge \omega^a, \\ & d\omega_i = -\omega^k_i \wedge \omega_k - \omega^a_i \wedge \omega_a - \omega^{2m-n+k}_i \wedge \omega_{2m-n+k}, \\ & d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b - C^i_{ab} \omega^b \wedge \omega_i - \omega^{2m-n+i}_a \wedge \omega_{2m-n+i}, \\ & d\omega_{2m-n+i} = -\omega^{2m-n+k}_{2m-n+i} \wedge \omega_{2m-n+k}, \\ & d\omega^i_k = \omega^i_p \wedge \omega^p_k - C^i_{ab} \omega^a_k \wedge \omega^c, \\ & d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + C^i_{bc} \omega^a_i \wedge \omega^c - C^{ac}_{2m-n+i} \omega^{2m-n+i}_b \wedge \omega_c, \\ & d\omega^{2m-n+i}_{2m-n+k} = \omega^{2m-n+i}_{2m-n+p} \wedge \omega^{2m-n+p}_{2m-n+k} + C^{ab}_{2m-n+k} \omega^{2m-n+i}_a \wedge \omega_b, \\ & d\omega^{2m-n+i}_k = \omega^{2m-n+i}_p \wedge \omega^p_k + \omega^{2m-n+i}_a \wedge \omega^a_k + \omega^{2m-n+i}_{2m-n+p} \wedge \omega^{2m-n+p}_k, \\ & d\omega^{2m-n+i}_a = \omega^{2m-n+i}_b \wedge \omega^b_a + \omega^{2m-n+i}_{2m-n+k} \wedge \omega^{2m-n+k}_a + C^k_{ab} \omega^{2m-n+i}_k \wedge \omega^b, \\ & d\omega^a_i = \omega^a_b \wedge \omega^b_i + \omega^a_k \wedge \omega^k_i - C^{ab}_{2m-n+k} \omega^{2m-n+k}_i \wedge \omega_b. \end{aligned} \tag{8}$$

Легко видеть из этих структурных уравнений, что каждая из следующих систем линейных диференциальных уравнений:

$$\omega^i = 0, \quad i = 1, \dots, n-m;$$
$$\omega_{2m-n=i} = 0, \quad i = 1, \dots, n-m,$$

вполне интегрируема и, следовательно, определяет подмногообразие размерности $2m-(n-m) = 3m-n$ в псевдоевклидовом пространстве E^n_{2n}. Более того, пересечение этих подмногообразий является подмногообразием $N \subset E^n_{2n}$ размерности $2m-2(n-m) = 2(2m-n)$ со структурными уравнениями

$$\begin{array}{l}
d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + C^{ab}_{2m-n+i}\omega_b \wedge \omega^{2m-n+i}, \\
d\omega^{2m-n+i} = \omega^{2m-n+i}_{2m-n+k} \wedge \omega^{2m-n+k} + \omega^{2m-n+i}_a \wedge \omega^a, \\
d\omega_i = -\omega^k_i \wedge \omega_k - \omega^a_i \wedge \omega_a, \\
d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b - C^i_{ab}\omega^b \wedge \omega_i, \\
d\omega^i_k = \omega^i_p \wedge \omega^p_k - C^i_{ab}\omega^a_k \wedge \omega^b, \\
d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + C^i_{ab}\omega^a_i \wedge \omega^b - C^{ac}_{2m-n+i}\omega^{2m-n+i}_b \wedge \omega_c, \\
d\omega^{2m-n+i}_{2m-n+k} = \omega^{2m-n+i}_{2m-n+p} \wedge \omega^{2m-n+p}_{2m-n+k} + C^{ab}_{2m-n+k}\omega^{2m-n+i}_a \wedge \omega_b, \\
d\omega^{2m-n+i}_k = \omega^{2m-n+i}_p \wedge \omega^p_k + \omega^{2m-n+i}_a \wedge \omega^a_k + \omega^{2m-n+i}_{2m-n+p} \wedge \omega^{2m-n+p}_k, \\
d\omega^{2m-n+i}_a = \omega^{2m-n+i}_b \wedge \omega^b_a + \omega^{2m-n+i}_{2m-n+k} \wedge \omega^{2m-n+k}_a + C^k_{ab}\omega^{2m-n+i}_k \wedge \omega^b, \\
d\omega^a_i = \omega^a_b \wedge \omega^b_i + \omega^a_k \wedge \omega^k_i - C^{ab}_{2m-n+k}w^{2m-n+k}_i \wedge \omega_b.
\end{array} \tag{9}$$

Изучение системы алгебраических соотношений (7) приводит к рассмотрению частных случаев. Рассмотрим один из них.

Используя условия (7), предположим, что по крайней мере для одного значения индекса i $(= 1, \dots, n-m)$ матрицы $\left(C^{2m-n+i\,2m-n+p}_{m+k}\right)$ и $\left(C^{m+i}_{kp}\right)$ являются невырожденными. Тогда

$$C^i_{ab} = 0, \quad C^{ab}_{2m-n+i} = 0, \quad \text{т. е.} \quad w^i_a = 0, \quad w^a_{2m-n+i} = 0.$$

Легко заметить из (8), что тензор Риччи этой дифференциально-геометрической структуры равен нулю:

$$d(\omega^i_i + \omega^a_a + \omega^{2m-n+i}_{2m-n+i}) = 0.$$

Но, вообще говоря, тензор римановой кривизны нетривиален: ненулевыми компонентами являются величины $C^{2m-n+i\,2m-n+p}_{m+k}C^{m+k}_{tq}$.

Система дифференциальных уравнений $\omega^i_k = 0$, $\omega^a_b = 0$, $\omega^{2m-n+i}_{2m-n+k} = 0$, $\omega^{2m-n+i}_a = 0$, $\omega^a_i = 0$ вполне интегрируема. Теперь легко можно доказать, что система дифференциальных форм ω^i, ω^a, ω^{2m-n+i}, ω_i, ω_a, ω^{2m-n+i}_k и функций $C^{2m-n+i\,2m-n+p}_{m+k}$ и C^{m+i}_{kp}, удовлетворяющих структурным уравнениям (8), замкнута и, следовательно, в силу теоремы Картана–Лаптева [5] имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Метрическая связность псевдоевклидова пространства Рашевского E^n_{2n} порождает на $2m$-мерном подмногообразии M, заданном уравнениями (2), дифференциально-геометрическую структуру аффинной связности, определяемой линейными дифференциальными формами ω^i, ω^a, ω^{2m-n+i}, ω_i, ω_a, ω_{2m-n+i}, ω^{2m-n+i}_k, удовлетворяющими структурным уравнениям (8). Если по крайней мере для одного значения индекса i $(= 1, \dots, n-m)$ матрицы $\left(C^{2m-n+i\,2m-n+p}_{m+k}\right)$ и $\left(C^{m+i}_{kp}\right)$ невырождены, то структурные уравнения подмногообразия M*

приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
&d\omega^i = 0,\\
&d\omega^a = 0,\\
&d\omega^{2m-n+i} = \omega_k^{2m-n+i} \wedge \omega^k,\\
&d\omega_i = -\omega_i^{2m-n+k} \wedge \omega_{2m-n+k},\\
&d\omega_a = 0,\\
&d\omega_{2m-n+i} = 0,\\
&d\omega_k^{2m-n+i} = C_{m+p}^{2m-n+i\,2m-n+t} C_{kr}^{m+p} \omega_{2m-n+t} \wedge \omega^r.
\end{aligned}
\tag{8$'$}
$$

Заметим, что эта дифференциально-геометрическая структура является аналогом структуры, изученной в [7].

Нетрудно проверить, что на подмногообразии $N \subset E_{2n}^n$ величины $C_{m+k}^{2m-n+i\,2m-n+p}$ и C_{kp}^{m+i} становятся постоянными.

3. Канонический интеграл

Используя структурные уравнения (8$'$), представим основные главные и вторичные формы в виде линейных комбинаций дифференциалов переменных:

$$
\begin{aligned}
&\omega^i = dx^i,\\
&\omega^a = dx^a,\\
&\omega^{2m-n+i} = dx^{2m-n+i} - \frac{1}{2} C_{m+p}^{2m-n+i} C_k^{m+p} dx^k,\\
&\omega_i = dy_i - \frac{1}{2} C_{m+p}^{2m-n+k} C_i^{m+p} dy_{2m-n+k},\\
&\omega_a = dy_a,\\
&\omega_{2m-n+i} = dy_{2m-n+i},\\
&\omega_k^{2m-n+i} = \frac{1}{2}\big(- C_{m+p}^{2m-n+i} C_{kp}^{m+p} dx^p + C_{m+p}^{2m-n+i\,2m-n+t} C_k^{m+p} dy_{2m-n+t}\big),
\end{aligned}
$$

так что эти формы удовлетворяют структурным уравнениям (8$'$) и имеют место следующие дифференциальные уравнения:

$$
\begin{aligned}
dC_{m+k}^{2m-n+i} &= -C_{m+k}^{2m-n+i\,2m-n+p} dy_{2m-n+p},\\
dC_k^{m+i} &= -C_{kp}^{m+i} dx^p.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Рассмотрим полубазовую форму

$$
\Omega = \lambda \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-m} \wedge \omega^{n-m+1} \wedge \cdots \wedge \omega^{2m-n} \wedge \omega^{2m-n+1} \wedge \cdots \wedge \omega^m
$$

на двойном расслоениии M. Для того чтобы решить обратную задачу и найти канонический m-кратный интеграл, зависящий от m параметров, для дифференциально-геометрической структуры (8$'$), (10), порождающей эту структуру на $2m$-мерном многообразии переменных интегрирования и параметров, необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&d \ln \lambda = \lambda_i \omega^i + \lambda_a \omega^a + \lambda_{2m-n+i} \omega^{2m-n+i} + \lambda^i \omega_i + \lambda^a \omega_a + \lambda^{2m-n+i} \omega_{2m-n+i},\\
&d(\lambda^i \omega_i + \lambda^a \omega_a + \lambda^{2m-n+i} \omega_{2m-n+i}) =\\
&\qquad\qquad = \omega^i \wedge \omega_i + \omega^a \wedge \omega_a + \omega^{2m-n+i} \wedge \omega_{2m-n+i} + \omega_{2m-n+i} \wedge \omega^i.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Введем формальные разложения для дифференциалов коэффициентов уравнений (11)

$$\begin{aligned}
&d\lambda^i = \lambda^i_k\omega^k + \lambda^i_a\omega^a + \lambda^i_{2m-n+k}\omega^{2m-n+k} + \lambda^{ik}\omega_k + \lambda^{ia}\omega_a + \lambda^{i\,2m-n+k}\omega_{2m-n+k},\\
&d\lambda^a = \lambda^a_k\omega^k + \lambda^a_b\omega^b + \lambda^a_{2m-n+k}\omega^{2m-n+k} + \lambda^{ak}\omega_k + \lambda^{ab}\omega_b + \lambda^{a\,2m-n+k}\omega_{2m-n+k},\\
&d\lambda^{2m-n+i} = \lambda^{2m-n+i}_k\omega^k + \lambda^{2m-n+i}_a\omega^a + \lambda^{2m-n+i}_{2m-n+k}\omega^{2m-n+k} + \lambda^{2m-n+i\,k}\omega_k +\\
&\qquad +\lambda^{2m-n+i\,b}\omega_b + \lambda^{2m-n+i\,2m-n+k}\omega_{2m-n+k},\\
&d\lambda_i = \mu_{ik}\omega^k + \mu_{ia}\omega^a + \mu_{i\,2m-n+k}\omega^{2m-n+k} + \mu^k_i\omega_k + \mu^a_i\omega_a + \mu^{2m-n+k}_i\omega_{2m-n+k},\\
&d\lambda_a = \mu_{ai}\omega^i + \mu_{ab}\omega^b + \mu_{a\,2m-n+i}\omega^{2m-n+i} + \mu^i_a\omega_i + \mu^b_a\omega_b + \mu^{2m-n+i}_a\omega_{2m-n+i},\\
&d\lambda_{2m-n+i} = \mu_{2m-n+i\,k}\omega^k + \mu_{2m-n+i\,a}\omega^a + \mu_{2m-n+i\,2m-n+k}\omega^{2m-n+k} + \mu^k_{2m-n+i}\omega_k +\\
&\qquad +\mu^a_{2m-n+i}\omega_a + \mu^{2m-n+k}_{2m-n+i}\omega_{2m-n+k}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь подставим выражения базисных форм в эти разложения и в результат внешнего дифференцирования первого из уравнений (11) и во второе из уравнений (11). В результате получим систему алгебраических соотношений

$$\lambda^i_a = \mu^i_a = 0,\ \mu^i_{2m-n+k} = \lambda^i_{2m-n+k} = 0,\ \ \lambda^a_{2m-n+i} = \mu^a_{2m-n+i} = 0,\ \ \mu^i_k = \lambda^i_k = \delta^i_k,$$
$$\lambda^{ik} = \lambda^{ki},\ \ \lambda^{ia} = \lambda^{ai},\ \ \lambda^{ab} = \lambda^{ba},\ \ \lambda^{a\,2m-n+i} = \lambda^{2m-n+i\,a},\ \ \lambda^{i\,2m-n+k} = \lambda^{2m-n+k\,i},$$
$$\lambda^{2m-n+i\,2m-n+k} = \lambda^{2m-n+k\,2m-n+i},\ \ \lambda^a_i = \mu^a_i = 0,\ \ \mu^a_b = \lambda^a_b = \delta^a_b,$$
$$\mu^{2m-n+i}_a = \lambda^{2m-n+i}_a = 0,\ \ \mu^{2m-n+i}_{2m-n+k} = \lambda^{2m-n+i}_{2m-n+k} = \delta^{2m-n+i}_{2m-n+k},$$
$$\lambda^{2m-n+i}_k = -\frac{1}{2}\lambda^t C^{2m-n+t}_{m+p}C^{m+p}_{tk} - \delta^i_k,\ \ \mu_{ia} = \mu_{ai},\ \ \mu_{ik} = \mu_{ki},\ \ \mu_{ab} = \mu_{ba},$$
$$\mu_{a\,2m-n+i} = \mu_{2m-n+i\,a},\ \ \mu_{2m-n+i\,2m-n+k} = \mu_{2m-n+k\,2m-n+i},\ \ \mu_{i\,2m-n+k} = \mu_{2m-n+k\,i},$$
$$\mu^{2m-n+i}_k = \frac{1}{2}\lambda_{2m-n+t}C^{2m-n+t\,2m-n+i}_{m+p}C^{m+p}_k - \delta^i_k.$$

Подстановка этих соотношений в систему разложений (12) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\lambda^i}{\partial x^k} = \delta^i_k,\ \ \frac{\partial\lambda^i}{\partial x^a} = 0,\ \ \frac{\partial\lambda^i}{\partial x^{2m-n+k}} = 0,\ \ \frac{\partial\lambda^i}{\partial y_k} = \lambda^{ik},\ \ \frac{\partial\lambda^i}{\partial y_a} = \lambda^{ia},$$
$$\frac{\partial\lambda^i}{\partial y_{2m-n+k}} = \lambda^{i\,2m-n+k} - \frac{1}{2}\lambda^{it}C^{2m-n+k}_{m+p}C^{m+p}_t;$$
$$\frac{\partial\lambda^a}{\partial x^k} = 0,\ \ \frac{\partial\lambda^a}{\partial x^b} = \delta^a_b,\ \ \frac{\partial\lambda^a}{\partial x^{2m-n+k}} = 0,\ \ \frac{\partial\lambda^a}{\partial y_k} = \lambda^{ka},\ \ \frac{\partial\lambda^a}{\partial y_b} = \lambda^{ab},$$
$$\frac{\partial\lambda^a}{\partial y_{2m-n+k}} = \lambda^{a\,2m-n+k} - \frac{1}{2}\lambda^{ia}C^{2m-n+k}_{m+p}C^{m+p}_i;$$
$$\frac{\partial\lambda^{2m-n+i}}{\partial x^k} = -\left[\delta^i_k + \frac{1}{2}C^{2m-n+i}_{m+p}\left(\lambda^r C^{m+p}_{kr} + C^{m+p}_k\right)\right],\ \ \frac{\partial\lambda^{2m-n+i}}{\partial x^a} = 0,\ \ \frac{\partial\lambda^{2m-n+i}}{\partial x^{2m-n+k}} = \delta^{2m-n+i}_{2m-n+k},$$
$$\frac{\partial\lambda^{2m-n+i}}{\partial y_k} = \lambda^{k\,2m-n+i},\ \ \frac{\partial\lambda^{2m-n+i}}{\partial y_a} = \lambda^{a\,2m-n+i},$$
$$\frac{\partial\lambda^{2m-n+i}}{\partial y_{2m-n+k}} = \lambda^{2m-n+i\,2m-n+k} - \frac{1}{2}\lambda^{2m-n+t}C^{2m-n+k}_{m+p}C^{m+p}_t;$$
$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial x^k} = \mu_{ik} - \frac{1}{2}\mu_{i\,2m-n+t}C^{2m-n+t}_{m+p}C^{m+p}_k,\ \ \frac{\partial\lambda_i}{\partial x^a} = \mu_{ia},\ \ \frac{\partial\lambda_i}{\partial x^{2m-n+k}} = \mu_{i\,2m-n+k},$$
$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial y_k} = \delta^k_i,\ \ \frac{\partial\lambda_i}{\partial y_a} = 0,$$
$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial y_{2m-n+k}} = -\left(\delta^{2m-n+k}_{2m-n+i} + \frac{1}{2}C^{2m-n+k}_{m+p}C^{m+p}_i\right) + \frac{1}{2}\lambda_{2m-n+t}C^{2m-n+k\,2m-n+t}_{m+p}C^{m+p}_i;$$

$$\frac{\partial\lambda_a}{\partial x^i}\mu_{ia} - \frac{1}{2}\mu_{a\,2m-n+k}C_{m+p}^{2m-n+k}C_i^{m+p}, \quad \frac{\partial\lambda_a}{\partial x^b} = \mu_{ab}, \quad \frac{\partial\lambda_a}{\partial x^{2m-n+k}} = \mu_{a\,2m-n+k},$$

$$\frac{\partial\lambda_a}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial\lambda_a}{\partial y_b} = \delta_a^b, \quad \frac{\partial\lambda_a}{\partial y_{2m-n+k}} = 0;$$

$$\frac{\partial\lambda_{2m-n+i}}{\partial x^k} = \mu_{k\,2m-n+i} + \frac{1}{2}\mu_{2m-n+i\,2m-n+t}C_{m+p}^{2m-n+t}C_k^{m+p}, \quad \frac{\partial\lambda_{2m-n+i}}{\partial x^a} = \mu_{a\,2m-n+i},$$

$$\frac{\partial\lambda_{2m-n+i}}{\partial x^{2m-n+k}} = \mu_{2m-n+i\,2m-n+k}, \quad \frac{\partial\lambda_{2m-n+i}}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial\lambda_{2m-n+i}}{\partial y_a} = 0, \quad \frac{\partial\lambda_{2m-n+i}}{\partial y_{2m-n+k}} = \delta_{2m-n+i}^{2m-n+k}.$$

Решение этой системы можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\lambda^i = x^i + \psi^i(y),\\
&\lambda^a = x^a + \psi^a(y),\\
&\lambda^{2m-n+i} = x^{2m-n+i} - x^i - \frac{1}{2}C_{m+p}^{2m-n+t}C_k^{m+p}x^k - \frac{1}{2}C_{m+p}^{2m-n+t}C_k^{m+p}\psi^k(y) + \psi^{2m-n+i}(y),\\
&\lambda_i = y_i - y_{2m-n+i} - \frac{1}{2}C_{m+p}^{2m-n+k}C_i^{m+p}y_{2m-n+k} - \frac{1}{2}C_{m+p}^{2m-n+k}C_i^{m+p}\varphi_{2m-n+k}(x) + \varphi_i(x),\\
&\lambda_a = y_a + \varphi_a(x),\\
&\lambda_{2m-n+i} = y_{2m-n+i} + \varphi_{2m-n+i}(x),
\end{aligned}$$

где $\psi^i(y)$, $\psi^a(y)$, $\psi^{2m-n+i}(y)$, $\varphi_i(x)$, $\varphi_a(x)$, $\varphi_{2m-n+i}(x)$ суть гладкие функции от соответствующих переменных. Подстановка этих выражений в первое уравнение системы (11) приводит к формуле

$$d\ln\lambda = d\big(x^iy_i + x^ay_a + x^{2m-n+i}y_{2m-n+i} - x^iy_{2m-n+i} - C_{m+p}C^{m+p}\big) + d\varphi(x) + d\psi(y),$$

где $\varphi(x) = \varphi\,(x^1, \ldots, x^m)$ и $\psi(y) = \psi\,(y_1, \ldots, y_m)$ суть некоторые гладкие функции. Следовательно, имеет место

Теорема 2. *Зависящий от m параметров m-кратный интеграл, порождающий дифференциально-геометрическую структуру $(8')$ на $2m$-мерном многообразии M переменных интегрирования и параметров, может быть приведен к интегралу от формы*

$$\Omega = P(x)Q(y)\exp\big(x^iy_i + x^ay_a + x^{2m-n+i}y_{2m-n+i} - x^iy_{2m-n+i} - C_{m+p}C^{m+p}\big)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

где $P(x) = P\,(x^1, \ldots, x^m)$ и $Q(y) = Q\,(y_1, \ldots, y_m)$ являются экспонентами функций $\varphi(x) = \varphi\,(x^1, \ldots, x^m)$ и $\psi(y) = \psi\,(y_1, \ldots, y_m)$ соответственно, а вторые частные производные функций C_{m+p} и C^{m+p} по параметрам $y_{2m-n+1}, \ldots, y_m$ и переменным $x^1, \ldots, x^{n-m}$ образуют соответственно матрицы $(C_{m+p}^{2m-n+i\,2m-n+k})$ и (C_{ik}^{m+p}).

Нетрудно проверить, что ограничение формы Ω на подмногообразии $N \subset E_{2n}^n$ (9) может быть представлено в виде

$$\Omega_0 = P\big(x^{n-m+1}, \ldots, x^m\big)Q\,(y_1, \ldots, y_{2m-n})\exp\,(x^ay_a)dx^{n-m+1} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

а это означает, что подмногообразие $N \subset E_{2n}^n$ со структурными уравнениями (9) имеет структуру псевдоевклидова пространства Рашевского $E_{2(2m-n)}^{2m-n}$.

4. Параметрические уравнения подмногообразия

Найдем параметрические уравнения подмногообразия M. Рассмотрим уравнения инфинитезимального перемещения подвижного репера $(P,\, e^i,\, e^a,\, e^{2m-n+i},\, e^{m+i},\, e_i,\, e_a,\, e_{2m-n+i},\, e_{m+i})$ в пространстве аффинной связности M

$$
\begin{aligned}
&de^i=\omega^i_k e^k+\omega^i_a e^a+\omega^i_{2m-n+i}e^{2m-n+k}+\omega^i_{m+k}e^{m+k},\\
&de^a=\omega^a_i e^i+\omega^a_b e^b+\omega^a_{2m-n+k}e^{2m-n+k}+\omega^a_{m+k}e^{m+k},\\
&de^{2m-n+i}=\omega^{2m-n+i}_k e^k+\omega^{2m-n+i}_a e^a+\omega^{2m-n+i}_{2m-n+k}e^{2m-n+k}+\omega^{2m-n+i}_{m+k}e^{m+k},\\
&de^{m+i}=\omega^{m+i}_k e^k+\omega^{m+i}_a e^a+\omega^{m+i}_{2m-n+k}e^{2m-n+k}+\omega^{m+i}_{m+k}e^{m+k},\\
&de_i=-\omega^k_i e_k-\omega^a_i e_a-\omega^{2m-n+k}_i e_{2m-n+k}-\omega^{m+k}_i e_{m+k},\\
&de_a=-\omega^i_a e_i-\omega^b_a e_b-\omega^{2m-n+i}_a e_{2m-n+i}-\omega^{m+k}_a e_{m+k},\\
&de_{2m-n+i}=-\omega^k_{2m-n+i}e_k-\omega^a_{2m-n+i}e_a-\omega^{2m-n+k}_{2m-n+i}e_{2m-n+k}-\omega^{m+k}_{2m-n+i}e_{m+k},\\
&de_{m+i}=-\omega^k_{m+i}e_k-\omega^a_{m+i}e_a-\omega^{2m-n+k}_{m+i}e_{2m-n+k}-\omega^{m+k}_{m+i}e_{m+k}.
\end{aligned}
$$

Подстановка выражений вторичных форм в эти уравнения и решение полученной системы дифференциальных уравнений приводят к выражениям базисных векторов

$$
\begin{aligned}
&e^i=\left(e^i\right)_0,\\
&e^a=\left(e^a\right)_0,\\
&e^{2m-n+i}=\frac{1}{2}C^{2m-n+i}_{m+p}C^{m+p}_k e^k+C^{2m-n+i}_{m+p}e^{m+p}+\left(e^{2m-n+i}\right)_0,\\
&e^{m+i}=C^{m+i}_k e^k+\left(e^{m+i}\right)_0,\\
&e_i=\frac{1}{2}C^{2m-n+k}_{m+p}C^{m+p}_i\left(e_{2m-n+k}\right)_0-C^{m+k}_i\left(e_{m+k}\right)_0+\left(e_i\right)_0,\\
&e_a=\left(e_a\right)_0,\\
&e_{2m-n+i}=\left(e_{2m-n+i}\right)_0,\\
&e_{m+i}=-C^{2m-n+k}_{m+i}e_{2m-n+k}+\left(e_{m+i}\right)_0.
\end{aligned}
$$

Подстановка этих соотношений в уравнение

$$
dP=-w^ie_i-w^ae_a-w^{2m-n+i}e_{2m-n+i}-w_{2m-n+i}e_{m+i}-w_ie^i-w_ae^a-w_{2m-n+i}e^{2m-n+i}-w^ie^{m+i}
$$

и его последующее интегрирование приводят к равенству

$$
\begin{aligned}
P=-x^ie_i-x^ae_a-\left(x^{2m-n+i}-C^{2m-n+i}\right)e_{2m-n+i}-\left(y_{2m-n+i}-C^{m+i}\right)e_{m+i}-\\
-y_ie^i-y_ae^a-y_{2m-n+i}e^{2m-n+i}-\left(x^i+C_{m+i}\right)e^{m+i}
\end{aligned}
$$

и тем самым имеет место

Теорема 3. *Уравнения подмногообразия M могут быть представлены в виде*

$$
\begin{aligned}
&X^i=x^i,\quad X^a=x^a,\\
&X^{2m-n+i}=x^{2m-n+i}-C^{2m-n+i}\left(y_{2m-n+1},\dots,y_m\right),\\
&X^{m+i}=y_{2m-n+i}-C^{m+i}\left(x^1,\dots,x^{n-m}\right),\\
&Y_i=y_i,\quad Y_a=y_a,\\
&Y_{2m-n+i}=y_{2m-n+i},\quad Y_{m+i}=x^i+C_{m+i}\left(y_{2m-n+1},\dots,y_m\right),\\
&i=1,\dots,n-m;\quad a=n-m+1,\dots,2m-n,
\end{aligned}
$$

где величины C^{2m-n+i}, C^{m+i}, C_{m+i} *суть гладкие функции, заданные следующими дифференциальными уравнениями*:

$$dC^{2m-n+i} = C^{2m-n+i}_{m+k}\, dy_{2m-n+k},$$
$$dC^{m+i} = C^{m+i}_{k}\, dx^k,$$
$$dC_{m+i} = C^{2m-n+k}_{m+i}\, dy_{2m-n+k}$$

и, кроме того, матрицы производных второго порядка функций C^{m+i} *и* C_{m+i} *соответственно по переменным* $x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}$ *и параметрам* $y_{2m-n+1}, y_{2m-n+2}, \ldots, y_m$ *являются невырожденными по крайней мере для одного значения индекса* $i = 1, \ldots, n-m$.

Из параметрических уравнений подмногообразия M непосредственно видно, что это подмногообразие расположено в $2(3n-4m)$-мерной плоскости псевдоевклидова пространства Рашевского E^n_{2n}.

Литература

1. Рашевский П.К. *Скалярное поле в расслоенном пространстве* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М.: МГУ. – 1948. – Вып. 6. – С. 225–248.
2. Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в римановых пространствах* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. – 1925. – Т. 2. – № 25. – С. 86–114.
3. Вишневский В.В. *О параболическом аналоге А-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 1. – С. 29–38.
4. Арутюнян С.Х. *Геометрия n-кратного интеграла, зависящего от n параметров* // ДАН АрмССР. – 1975. – Т. 61. – № 1. – С. 7–14.
5. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Васильев А.М. *Теория дифференциально-геометрических структур.* – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 190 с.
7. Арутюнян С.Х. *О некоторых классах дифференциально-геометрических структур псевдоевклидова пространства $E^{n+1}_{2(n+1)}$* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 10. – С. 3–11.
8. Haroutunian S. *Geometry of multiple integrals depending on parameters and submanifolds of codimension two in pseudoeuclidean space $E^{n+1}_{2(n+1)}$* // Rendiconti del Seminario matematico di Messina, Serie 2. – 1994. – V. 1. – P. 129–140.
9. Норден А.П. *Пространства декартовой композиции* // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 4. – С. 117–128.

Армянский государственный
педагогический университет
(*Республика Армения, Ереван*)

Поступила
15.04.2004