ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 519.214

*О.В. АНТОНОВА, С.А. БРОННИКОВА, В.В. ДАВЫДОВА, М. ОРДОНЬЕЗ КАБРЕРА*

# О СЛАБОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МАРТИНГАЛЬНОГО ТИПА $p$ ПРИ ОБЩЕМ УСЛОВИИ ТИПА ЧЕЗАРО

## Введение

Статья посвящена доказательству слабого закона больших чисел (СЗБЧ) общего вида

$$S_n = \sum_{j=1}^{N_n} a_{nj}(V_{nj} - c_{nj}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $\{a_{nj},\ j \geq 1,\ n \geq 1\}$ — схема серий вещественных чисел, $\{c_{nj},\ j \geq 1,\ n \geq 1\}$ — так называемая "центрирующая" схема серий, составленная из специально подобранных условных ожиданий, $\{N_n,\ n \geq 1\}$ — последовательность целочисленных случайных величин и $\{V_{nj},\ j \geq 1,\ n \geq 1\}$ — схема серий случайных элементов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значения в сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ с нормой $\|\cdot\|$. Случайный элемент $S_n$ называется *взвешенной суммой* со *взвешенными коэффициентами*

$$\{a_{nj},\ j \geq 1,\ n \geq 1\}.$$

Предполагается, что банахово пространство $\mathcal{X}$ имеет мартингальный тип $p$, т. е. существует такая постоянная $C$, что для всех мартингалов $\{S_n,\ n \geq 1\}$ со значениями в $\mathcal{X}$ выполняется неравенство

$$\sup_{n\geq 1} E\|S_n\|^p \leq C \sum_{n=1}^{\infty} E\|S_n - S_{n-1}\|^p,$$

где $S_0 \equiv 0$.

Заметим, что любое вещественное сепарабельное банахово пространство имеет мартингальный тип 1, тогда как пространства $L_p$ и $l_p$ $(1 \leq p < \infty)$ имеют мартингальный тип $\min\{p, 2\}$. Хорошо известно, что если банахово пространство имеет мартингальный тип $p$, то оно имеет и радемахеровский тип $p$. Однако понятие мартингального типа $p$ только поверхностно схоже с понятием радемахеровского типа $p$. Более подробное обсуждение можно найти в [1].

Основной результат данной работы — теорема 3. Она является расширением и обобщением на случай банахового пространства мартингального типа $p$ и взвешенных сумм утверждений, доказанных в [2]–[7], которые были установлены в схеме серий вещественнозначных случайных величин. Заметим, что СЗБЧ доказывается в предположении выполнимости условия типа Чезаро, которое более общо, чем условие из [4].

Вопрос о выполнимости СЗБЧ при условии типа Чезаро был впервые поставлен в [2]. Далее тот же вопрос рассматривался в [4], но с изменением условия типа Чезаро на условие типа Чезаро–Хонга. Причем оба результата были установлены в схеме серий вещественнозначных случайных величин. Существенное продвижение в этом направлении было осуществлено в [8], где результаты [2] и [4] были перенесены на случай банаховых пространств мартингального типа и неслучайных взвешенных сумм. Следующие работы улучшали полученные результаты. Так, например, в [3] СЗБЧ рассматривался для случайных взвешенных сумм, в [9] меняются условия на взвешенные коэффициенты, [10] обобщает [3] на случай банахового пространства мартингального типа.

В данной статье найдено универсальное условие типа Чезаро. Оно более общее, чем условие Чезаро–Хонга и позволяет получить все предыдущие результаты как простые следствия. При этом ослабляется условие (4) из теоремы статьи [9]. Кроме этого, накладываются условия на скорость возрастания взвешенных коэффициентов $\{a_{nj},\ j \geq 1,\ n \geq 1\}$ и на маргинальные распределения случайных величин $\{\|V_{nj}\|,\ j \geq 1,\ n \geq 1\}$, тем самым получается другой, более подходящий для решения конкретных задач, закон больших чисел. Следует отметить, что все исследования по этой тематике вдохновлены замечательной статьей Аллана Гута [2].

## Основной результат

Прежде чем сформулировать основной результат, приведем две теоремы, которые доказаны в [10] и [9] соответственно.

**Теорема 1** ([10]). I. *Пусть* $\{V_{nj},\ j \geq 1,\ n \geq 1\}$ *— схема серий случайных элементов в вещественном сепарабельном банаховом пространстве мартингального типа* $p$ $(1 \leq p \leq 2)$, $\{N_n,\ n \geq 1\}$ *— последовательность целочисленных случайных величин и* $k_n$ $(\to \infty)$ *— некоторая неслучайная последовательность натуральных чисел, для которых*

$$P\{N_n > k_n\} = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1}$$

*Пусть схема серий вещественных чисел* $\{a_{nj},\ j \geq 1,\ n \geq 1\}$ *и последовательность* $\{f(n),\ n \geq 1\}$*, определенная как* $f(n) = 1/\max\limits_{1\leq j\leq k_n} |a_{nj}|$*, удовлетворяют условию*

$$k_n f^{-p}(n) = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

II. *Пусть* $\{g(m),\ m \geq 0\}$ *— такая неубывающая последовательность неотрицательных чисел, что выполняется*

$$\sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{g^p(m+1) - g^p(m)}{m} = O(f^p(n)/k_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{3}$$

*а также равномерное условие типа Чезаро*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq 1} \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} mP\{\|V_{nj}\| > g(m)\} = 0. \tag{4}$$

*Тогда имеет место СЗБЧ*

$$\sum_{j=1}^{N_n} a_{nj}(V_{nj} - E(V'_{nj} \mid \mathcal{F}_{n,j-1})) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{5}$$

*где* $V'_{nj} = V_{nj} I(\|V_{nj}\| \leq g(k_n))$, $\mathcal{F}_{nj} = \sigma(V_{ni},\ 1 \leq i \leq j)$, $j \geq 1$, $n \geq 1$, *и* $\mathcal{F}_{n0} = \{\emptyset, \Omega\}$, $n \geq 1$.

**Теорема 2** ([9]). *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *за исключением* (3)*, которое заменено на*

$$\sum_{m=1}^{g(k_n)-1} \frac{m^{p-1}}{h(m)} = O(f^p(n)/k_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{6}$$

*где* $h(m) = \min\{n \geq 0 : g(n) \geq m\}$ *— обратная последовательность к* $g(m)$*. Тогда имеет место* (5).

Теперь сформулируем результат, из которого обе теоремы могут быть получены как простые следствия.

**Теорема 3.** *Пусть выполняется часть* I *теоремы* 1. *Пусть* $\{\beta(m),\ m\ge 1\}$, $\{\alpha(m),\ m\ge 1\}$ *и* $\{\widetilde{g}(m),\ m\ge 0\}$ *— неубывающие последовательности положительных чисел и* $\{m_n,\ n\ge 1\}$ *— последовательность натуральных чисел, для которых*

$$\beta(m_n)=\widetilde{g}(n),\quad \alpha(m_n)\ge k_n \tag{7}$$

*и*

$$\sum_{m=1}^{m_n-1}\frac{\beta^p(m+1)-\beta^p(m)}{\alpha(m)}=O(f^p(n)/k_n)\quad \text{при}\quad n\to\infty. \tag{8}$$

*Предположим, что выполняется равномерное условие типа Чезаро*

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\ge 1}\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n}\alpha(m)P\{\|V_{nj}\|>\beta(m)\}=0. \tag{9}$$

*Тогда имеет место СЗБЧ* (5), *где* $V'_{nj}=V_{nj}I(\|V_{nj}\|\le\widetilde{g}(n))$.

**Доказательство.** Из условий (1), (6), (7) и (9) следует, что для любого $\varepsilon>0$ и $n\ge 1$

$$P\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{N_n}a_{nj}V_{nj}-\sum_{j=1}^{N_n}a_{nj}V'_{nj}\Big\|>\varepsilon\Big\}\le P\{N_n>k_n\}+P\Big\{\bigcup_{j=1}^{k_n}[V_{nj}\ne V'_{nj}]\Big\}\le$$
$$\le o(1)+\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n}k_nP\{\|V_{nj}\|>\widetilde{g}(n)\}\le o(1)+\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n}\alpha(m_n)P\{\|V_{nj}\|>\beta(m_n)\}=o(1).$$

Поэтому $\sum\limits_{j=1}^{N_n}a_{nj}V_{nj}-\sum\limits_{j=1}^{N_n}a_{nj}V'_{nj}\xrightarrow{P}0$ и достаточно доказать, что $\sum\limits_{j=1}^{N_n}a_{nj}V'_{nj}-\sum\limits_{j=1}^{N_n}a_{nj}c_{nj}\xrightarrow{P}0$, где $c_{nj}=E(V'_{nj}\mid\mathcal{F}_{n,j-1})$.

Для $n\ge 1$ и $m\ge 1$ обозначим $B_m^n=\Big\{\|\sum\limits_{j=1}^{m}a_{nj}V'_{nj}-\sum\limits_{j=1}^{m}a_{nj}c_{nj}\|>\varepsilon\Big\}$ и $D_n=\bigcup_{m=1}^{k_n}B_m^n$. Тогда по (1)

$$P\{B_{N_n}^n\}\le P\{B_{N_n}^n,\ N_n\le k_n\}+P\{N_n>k_n\}\le P\{D_n\}+o(1)$$

и осталось доказать, что $P\{D_n\}=o(1)$.

Отметим, что по неравенству Маркова

$$P\{D_n\}=P\Big\{\max_{1\le m\le k_n}\Big\|\sum_{j=1}^{m}a_{nj}(V'_{nj}-c_{nj})\Big\|>\varepsilon\Big\}\le CE\max_{1\le m\le k_n}\Big\|\sum_{j=1}^{m}a_{nj}(V'_{nj}-c_{nj})\Big\|^p.$$

Так как рассматриваемое банахово пространство имеет мартингальный тип $p$, то

$$P\{D_n\}\le C\sum_{j=1}^{k_n}E(|a_{nj}|\,\|V'_{nj}-c_{nj}\|)^p\le C2^{p-1}f^{-p}(n)\sum_{j=1}^{k_n}E(\|V'_{nj}\|^p+E\|c_{nj}\|^p)\le C2^pf^{-p}(n)\sum_{j=1}^{k_n}E\|V'_{nj}\|^p$$

(во второй оценке применяем неравенство Йенсена для условных ожиданий (напр., [11], с. 209) для выпуклой функции $|\cdot|^p$). Более того,

$$\sum_{j=1}^{k_n} E\|V'_{nj}\|^p = \sum_{j=1}^{k_n}\sum_{m=1}^{m_n} E\|V_{nj}\|^p I(\beta(m-1) < \|V_{nj}\| \le \beta(m)) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{k_n}\sum_{m=1}^{m_n} \beta^p(m)(P\{\|V_{nj}\| > m-1\} - P\{\|V_{nj}\| > m\}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n}[\beta^p(1)P\{\|V_{nj}\| > 0\} - \beta^p(m_n)P\{\|V_{nj}\| > \beta(m_n)\} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m_n-1}(\beta^p(m+1) - \beta^p(m))P\{\|V_{nj}\| > \beta(m)\}] \le$$

$$\le \beta^p(1)k_n + k_n\sum_{m=1}^{m_n-1}\frac{\beta^p(m+1)-\beta^p(m)}{\alpha(m)}b_{nm},$$

где $b_{nm} = \frac{1}{k_n}\sum\limits_{j=1}^{k_n}\alpha(m)P\{\|V_{nj}\| > \beta(m)\}$. Тогда по равномерному условию типа Чезаро (9) получим $\sup\limits_{n\ge1} b_{nm} = o(1)$ при $m\to\infty$. Далее, по (2), (8) и лемме Теплица (см., напр., [12], с. 250) имеем $P\{D_n\} = o(1)$, чем завершается доказательство теоремы 3. □

**Следствие 1.** Если $\widetilde{g}(n) = g(k_n)$, $\beta(m) = g(m)$, $\alpha(m) = m$ в теореме 3, то справедливо утверждение теоремы 1.

При $\widetilde{g}(n) = g(k_n)$, $\beta(m) = m$ и $\alpha(m) = h(m)$ в теореме 3 получим

**Следствие 2.** Пусть в условиях теоремы 1 условие (3) заменено на (6), где $h(m) = \min\{n \ge 0 : g(n) \ge m\}$ — обратная к $g(m)$ последовательность, а условие (4) заменено на

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\ge1}\frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} h(m)P\{\|V_{nj}\| > m\} = 0. \tag{10}$$

Тогда имеет место (5).

Заметим, что можно ослабить условие (4) теоремы 2, заменив его на условие (10). Доказательство того, что (10) слабее условия (4), приводится в [9].

## Литература


1. Pisier G. *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces* // Lect. Notes Math. – 1986. – V. 1206. – P. 167–241.
2. Gut A. *The weak law of large numbers for arrays* // Statist. Probab. Lett. – 1992. – V. 14. – P. 49–52.
3. Hong D.H. *On the weak law of large numbers for randomlyindexed partial sums for arrays* // Statist. Probab. Lett. – 1996. – V. 28. – P. 127–130.
4. Hong D.H., Oh K.S. *On the weak law of large numbers for arrays* // Statist. Probab. Lett. – 1995. – V. 22. – P. 55–57.
5. Hong D.H., Sung S.H., Volodin A.I. *On the weak law for randomly indexed partial sums for arrays* // Preprint of Pai Chai University. Submitted to Statist. Probab. Lett. – 1998. – 7 p.
6. Kovalski P., Rychlik Z. *On the weak law of large numbers for randomly idexed partial sums for arrays* // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodovska. Sect. A. – 1997. – V. LI. – № 1. – P. 109–119.
7. Sung S.H. *Weak law of large numbers for arrays* // Statist. Probab. Lett. – 1998. – V. 38. – P. 101–105.

8. Adler A., Rosalsky A., Volodin A.I. *A meanconvergence theorem and weak law for arrays of random elements inmartingale type p Banach spaces* // Statist. Probab. Lett. – 1977. – V. 32. – P. 167–174.
9. Hong D.H., Ordóñez Cabrera M., Sung S.H., Volodin A.I. *Again on the weak law for randomly indexed partial sums for arrays of random elements in martingale type p Banach spaces* // Extracto Math. – 1999. – V. 14. – № 1. – P. 45–50.
10. Hong D.H., Ordóñez Cabrera M., Sung S.H., Volodin A.I. *On the weak law for randomly indexed partial sums for arrays of random elements in martingale type p Banach spaces* // Statist. Probab. Lett. – 1999. – P. 177-185.
11. Chow Y.S. Teicher H. *Probability theory*: *independence, interchangeability, martingales.* – N. Y.: Springer-Verlag, 1997.
12. Лоэв М. *Теория вероятностей.* – М.: Ин. лит., 1962. – 720 с.

*Казанский государственный университет*
*Университет Севильи* (*Испания*)

*Поступила*
23.04.1999