ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 514.76

А.А. ЕРМОЛИЦКИЙ

ТЕОРЕМА О ШЛЯПЕ И ПРОБЛЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ СТРУКТУР НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В работе рассматривается теорема о шляпе, позволяющая производить изгибание подрасслоения в главном G-расслоении над дифференцируемым многообразием. Далее с использованием ранее введенного автором понятия второго фундаментального тензорного поля G-структуры на римановом многообразии изучаются вопросы классификации таких структур. Получены теорема об "алгебраизации" проблемы классификации, а также пример почти эрмитовой структуры, принадлежащей разным классам в разных точках многообразия.

1. Теорема о шляпе и изгибание подрасслоения в главном G-расслоении

1°. Пусть M — связное многообразие, $P(M,G,\pi)$ — главное расслоение над M. На многообразии M возьмем риманову метрику g и для точки $p \in M$ рассмотрим геодезические шары $B(p;R/2) \subset B(p;R) \subset U$, где U — локальная карта $P(M,G,\pi)$. Таким образом, существует диффеоморфизм $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G : u \mapsto (\pi(u), \varphi(u))$, где $\varphi : \pi^{-1}(U) \mapsto G$, $\varphi(ua) = \varphi(u)a$ для всех $u \in \pi^{-1}(U)$ и $a \in G$.

Далее, если $\psi^{-1} : U \times G \to \pi^{-1}(U)$ — обратное отображение, то $\psi^{-1}|U \times \{e\}$ определяет сечение $s_1 : U \to \pi^{-1}(U)$. Рассмотрим сечение $s_2 : U \to \pi^{-1}(U)$ такое, что $s_1(p) = s_2(p)$. Пусть $v : U \to G$, $x \mapsto v(x)$, — отображение, определяемое соотношением $\varphi(s_2(x)) = \varphi(s_1(x)v(x))$. Если $\exp_p$ — экспоненциальное отображение римановой связности ∇ в точке p, то отображение $\exp_p^{-1}$ определено на $\overline{B}(p;R)$ и можно определить следующее сечение s над U:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & x \in U \setminus \overline{B}(p;R); \\ s_2(x)\left(v\left[\exp_p\left(\frac{2t-R}{t}\exp_p^{-1}(x)\right)\right]\right)^{-1}, & x \in \overline{B}(p;R) \setminus \overline{B}(p;R/2); \\ s_2(x), & x \in \overline{B}(p;R/2), \end{cases} \tag{1}$$

где $\exp_p^{-1}(x) = t\xi$, $\|\xi\| = 1$. В результате получена

Теорема 1 (о шляпе). *Если s_1, s_2 — локальные сечения главного расслоения $P(M,G,\pi)$ и $s_1(p) = s_2(p)$, то существуют последовательность окрестностей $U \supset B(p;R) \supset B(p;R/2) \ni p$ и локальное сечение $s : U \to P(M,G,\pi)$ такие, что $s = s_1$ на $U \setminus \overline{B}(p;R)$ и $s = s_2$ на $\overline{B}(p;R/2)$. Такое сечение может задаваться, например, формулой* (1).

Далее, пусть $P'(M,G',\pi)$ — редуцированное подрасслоение расслоения $P(M,G,\pi)$, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие на M с множеством функций перехода $\psi_{\beta\alpha}$, принимающих значения из G', а $U \ni p$ — одна из окрестностей этого покрытия.

Рассмотрим многообразие $M' = M \setminus \overline{B}(p;R)$ с соответствующим открытым покрытием $\{U'_\alpha\}$, $U'_\alpha = U_\alpha \setminus \overline{B}(p;R)$ и функциями перехода $\psi'_{\beta\alpha} = \psi_{\beta\alpha|M'}$, тогда открытое покрытие $\{U'_\alpha; U\}$ с функциями перехода $\psi'_{\beta\alpha}$ и сечением s над U, определенным формулой (1), задает некоторое новое подрасслоение расслоения $P(M,G,\pi)$. Таким образом, получена

Теорема 2. *Пусть $P'(M,G',\pi)$ — редуцированное подрасслоение расслоения $P(M,G,\pi)$, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие на M, $s_\alpha : U_\alpha \to P'(M,G',\pi)$ — соответствующие сечения, $p \in U_1$ и $s_1(p) = \overline{s}_2(p)$, где $\overline{s}_2 : U_1 \to P(M,G,\pi)$ — некоторое сечение. Тогда существует такое* *подрасслоение $\overline{P}'(M,G',\pi)$ расслоения $P(M,G,\pi)$, что сечение $s : U_1 \to \pi^{-1}(U_1)$, определяемое формулой* (1), *является сечением подрасслоения $\overline{P}'(M,G',\pi)$.*

Определение 1. Подрасслоение $\overline{P}'(M,G',\pi)$ будем называть изгибанием в $P(M,G,\pi)$ подрасслоения $P'(M,G',\pi)$ по формуле (1) в точке p.

2°. Напомним, что связность Γ в расслоении $P(M,G,\pi)$ — это сопоставление подпространства Q_u из $T_u(P)$ каждой точке $u \in P$ такое, что

(a) $T_u(P) = G_u \oplus Q_u$, где G_u — подпространство из $T_u(P)$, касательное к слою, проходящему через u;
(b) $Q_{ua} = (R_a)_* Q_u$, $u \in P$, $a \in G$, $R_a u = ua$;
(c) Q_u зависит дифференцируемо от u.

Теорема 3. *Пусть для некоторого $u_0 \in P(M,G,\pi)$ задано некоторое подпространство Q_{u_0} из $T_{u_0}(P)$ такое, что $T_{u_0}(P) = G_{u_0} \oplus Q_{u_0}$ и $P'(M,G',\pi)$ — редуцированное подрасслоение расслоения $P(M,G,\pi)$. Тогда существуют подрасслоение $\overline{P}'(M,G',\pi)$ и связность Γ в расслоении $P(M,G,\pi)$ такие, что*

1) *связность Γ в P редуцируема к связности Γ' в $\overline{P}'$,*
2) *Q_{u_0} есть горизонтальное подпространство в $T_{u_0}(P)$ связности Γ.*

Доказательство. Пусть $p = \pi(u_0)$, тогда для любого $u = u_0 a \in \pi^{-1}(p)$ определим $Q_u = (R_a)_* Q_{u_0}$. Если $U \ni p$ — локальная карта подрасслоения $P'(M,G',\pi)$ с соответствующим сечением $s_1 : U \to \pi^{-1}(U)$, $s_1(p) = u_1$, то $\pi^{-1}(U)$ диффеоморфно $U \times G$, и, выбрав римановы метрики на U и G соответственно, можно ввести риманову метрику прямого произведения $\widetilde{g}$ на $\pi^{-1}(U)$, считая диффеоморфизм ψ^{-1} изометрией. Взяв геодезический шар $B(u_1) = \widetilde{\exp}_{u_1}(V)$, где $V \subset T_{u_1}(P)$, можно определить подмногообразие $\widetilde{\exp}_{u_1}(V \cap Q_{u_1})$ в $B(u_1)$ такое, что π есть диффеоморфизм на $\widetilde{\exp}_{u_1}(V \cap Q_{u_1})$ и касательное подпространство к этому подмногообразию в точке u_1 совпадает с Q_{u_1}. Таким образом, определяется сечение $s_2 : B(p;R) \to P(M,G,\pi)$, $x \mapsto \pi^{-1}(x) \cap \widetilde{\exp}_{u_1}(V \cap Q_{u_1})$, где $B(p;R) = \pi(B(u_1))$.

Используя теорему 2, построим по формуле (1) изгибание $\overline{P}'(M,G',\pi)$ подрасслоения $P'(M,G',\pi)$. Далее, для каждого $u = s_2(x)$, $x \in B(p;R/2)$, определим горизонтальное подпространство Q_u как касательное пространство к подмногообразию $s_2(B(p;R/2))$, а в остальных точках из $\pi^{-1}(B(p;R/2))$ определим горизонтальное подпространство, исходя из правой инвариантности. Таким образом, получили главное расслоение $\overline{P}'(M,G',\pi)$ и связность Γ' в расслоении $P'(M,G',\pi)$, определенную над $B(p;R/2)$. Тогда эта связность может быть продолжена до связности в $\overline{P}'(M,G',\pi)$ над M, если M паракомпактно [1], и из правой инвариантности, до связности Γ в $P(M,G,\pi)$ над M. Горизонтальное подпространство в $T_{u_0}(P)$ связности Γ совпадает с Q_{u_0} по построению. □

2. Проблемы классификации G-структур на римановых многообразиях

1°. Пусть $L(M)$ — расслоение линейных реперов над многообразием M, $P(G)$ — G-структура над M, допускающая редукцию к максимальной компактной подгруппе H группы G, $H = G \cap O(n)$. Расширяя $P(H)$ до группы $O(n)$, получим подрасслоение ортонормальных реперов $O(M)$, определяющее специальную риманову метрику $g = \langle , \rangle$ структуры $P(G)$ [2]. Для алгебр Ли $\underline{o}$, $\underline{h}$ групп Ли $O(n)$ и H имеем $\underline{o} = \underline{h} \oplus \underline{m}$, где $\underline{m}$ — ортогональное дополнение относительно формы Киллинга, $\mathrm{ad}(H)\underline{m} = \underline{m}$ из биинвариантности формы Киллинга. Если ω — o-значная форма римановой связности в $O(M)$, то $\overline{\omega} = \omega_{|\underline{h}}$ определяет некоторую связность в $P(H)$. Связности ω, $\overline{\omega}$ могут быть расширены до линейных связностей с соответствующими ковариантными производными ∇, $\overline{\nabla}$.

Определение 2 ([3]). Тензорное поле $h = \nabla - \overline{\nabla}$ называется вторым фундаментальным тензорным полем структуры $(P(G), g)$; связность $\overline{\nabla}$ называется канонической связностью; пара $(P(G), g)$ называется квазиоднородной структурой, если $\overline{\nabla} h = 0$ на M.

Отметим, что понятие квазиоднородности рассматривалось в [4].

Пусть $\widetilde{g}$ — произвольная риманова метрика на множестве M, $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Следующие примеры можно найти в [2]:

1) (P,g), $P^2=I$, $g(X,Y)=\widetilde{g}(X,Y)+\widetilde{g}(PX,PY)$, $\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+P\nabla_X PY)$,

2) (J,g), $J^2=-I$, $g(X,Y)=\widetilde{g}(X,Y)+\widetilde{g}(JX,JY)$, $\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y-J\nabla_X JY)$,

3) (F,g), $F^3+F=0$, $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}F\nabla_X FY+\nabla_X F^2 Y+F^2\nabla_X Y+\frac{3}{2}F^2\nabla_X F^2 Y$,

4) (S,g), $S^k=I$, $g(X,Y)=\sum\limits_{j=0}^{k-1}\widetilde{g}(S^jX,S^jY)$, $\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}S^j\nabla_X S^{k-j}Y$.

Следующие примеры приводятся впервые:

5) (P_1,P_2,g), $P_1^2=P_2^2=I$, $P_1P_2=-P_2P_1=J$, $g(X,Y)=\widetilde{g}(X,Y)+\widetilde{g}(P_1X,P_1Y)+\widetilde{g}(P_2X,P_2Y)+\widetilde{g}(JX,JY)$, $\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{4}(\nabla_X Y+P_1\nabla_X P_1Y+P_2\nabla_X P_2Y-J\nabla_X JY)$,

6) (J_1,J_2,g), $J_1^2=J_2^2=-I$, $J_1J_2=-J_2J_1=J_3$, $g(X,Y)=\widetilde{g}(X,Y)+\widetilde{g}(J_1X,J_1Y)+\widetilde{g}(J_2X,J_2Y)+\widetilde{g}(J_3X,J_3Y)$, $\overline{\nabla}_X Y=\frac{1}{4}(\nabla_X Y-J_1\nabla_X J_1Y-J_2\nabla_X J_2Y-J_3\nabla_X J_3Y)$.

2°. Напомним, что для каждого $\xi\in\mathbf{R}^n$ и $u\in L(M)$ существует единственный вектор $(B(\xi))_u$ в Q_u такой, что $\pi((B(\xi))_u)=u(\xi)$. $B(\xi)$ называется стандартным горизонтальным векторным полем, соответствующим $\xi\in\mathbf{R}^n$. Если A^* — фундаментальное векторное поле, соответствующее $A\in\underline{o}$, то на $O(M)$ определяется риманова метрика g_∇:

$g_\nabla(B(\xi),B(\eta))=\langle\xi,\eta\rangle$, $\xi,\eta\in\mathbf{R}^n$;

$g_\nabla(A_1^*,A_2^*)=-\operatorname{tr}(A_1A_2)$, $A_1,A_2\in\underline{o}$;

$g_\nabla(B(\xi),A^*)=0$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, $A\in\underline{o}$.

Пусть $Q=\operatorname{Ker}\omega$, $\overline{Q}=\operatorname{Ker}\overline{\omega}$. Рассмотрим распределения $V^{\underline{h}}=\{A^*:A\in\underline{h}\}$, $V^{\underline{m}}=\{A^*:A\in\underline{m}\}$. Тогда очевидно, что $V^{\underline{m}}\perp V^{\underline{h}}$ и $T_uP(H)\cap V_u=V_u^{\underline{h}}$, где $u\in P(H)$, V_u — касательное пространство к слою в $O(M)$.

Предложение. *Горизонтальное распределение $\overline{Q}_u=\operatorname{Ker}\overline{\omega}$ канонической связности структуры $(P(H),g)$ определяется по формуле*

$$u\to\overline{Q}_u=T_u(P(H))\cap V_u^{\underline{h}^\perp}=T_u(P(H))\cap(V_u^{\underline{m}}\oplus Q_u),\quad u\in P(H).$$

Доказательство. Так как $\omega(\overline{Q}_u)\subset\underline{m}$, то $\overline{\omega}(\overline{Q}_u)=0$, $T_u(P(H))=V_u^{\underline{h}}\oplus\overline{Q}_u$, следовательно, $\dim\overline{Q}_u=n$ и $\overline{Q}_u=\operatorname{Ker}\overline{\omega}$. □

Для некоторого $u_0\in O(M)$, $\pi(u_0)=p$, рассмотрим произвольное подпространство $\overline{Q}_{u_0}$ размерности n из $V_u^{\underline{h}}\oplus Q_{u_0}$ такое, что $\overline{Q}_{u_0}\cap V_{u_0}^{\underline{m}}=0$. Тогда $T_{u_0}(O(M))=V_{u_0}\oplus\overline{Q}_{u_0}$ и по теореме 3 существуют такая структура $P'(H)$ и связность $\overline{\Gamma}'$ в $P'(H)$, что $\overline{Q}_{u_0}$ есть горизонтальное подпространство в $T_{u_0}(P)$ связности $\overline{\Gamma}'$. Пусть $\overline{\Gamma}$ — каноническая связность структуры $P'(H)$ из определения 1. По доказанному выше предложению $\overline{Q}_{u_0}$ является горизонтальным подпространством связности $\overline{\Gamma}$ в $T_{u_0}(P)$.

Далее, пусть $\varphi\in\operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n,\underline{m})$ и $\xi_1,\dots,\xi_n\in\mathbf{R}^n$ — базисные векторы, $V_i=(\varphi(\xi_i))_{u_0}^*+(B(\xi_i))_{u_0}$. Тогда определяется линейная оболочка $\overline{Q}_{u_0}=[V_1,\dots,V_n]$ такая, что $T_{u_0}(O(M))=V_{u_0}\oplus\overline{Q}_{u_0}$. Обратно, для такого подпространства $\overline{Q}_{u_0}$ линейное отображение φ определяется формулой $\varphi=\omega_{u_0}\circ\overline{B}$, где $(\overline{B}(\xi))_{u_0}$ — единственный вектор в $\overline{Q}_{u_0}$ такой, что $\pi(\overline{B}(\xi)_{u_0})=u_0(\xi)$.

Таким образом, из вышесказанного следует

Теорема 4. *Пусть на многообразии M существует структура $P(H)$, $H\subset O(n)$, $p\in M$, и $\{P(H)\}$ — множество всевозможных H-структур в расслоении $O(M)$, которое получено расширением H до $O(n)$. Тогда множество горизонтальных распределений в точке p канонических связностей этих H-структур находится во взаимно однозначном соответствии с $\operatorname{Hom}(\mathbf{R}^n,\underline{m})$.*

Для точки $p=\pi(u_0)$ рассмотрим $T=T_p(M)$, $X,Y,Z\in T$, $h=\nabla-\overline{\nabla}$, $\tau=\omega-\overline{\omega}$, где $\overline{\omega}$ — форма связности, а $\overline{\nabla}$ — ковариантная производная канонической связности H-структуры

$P(H)$, имеющей в u_0 горизонтальное распределение $\overline{Q}_{u_0}$. Тогда $h_X Y = u_0 \tau(B(\xi)) u_0^{-1} Y$, где $u_0 \xi = X$ [5]. Так как $u_0 : \mathbf{R}^n \to T$ есть изометрия, то

$$h_{XYZ} = \langle h_X Y, Z\rangle = \langle u_0 \tau(B(\xi)) u_0^{-1} Y, Z\rangle = \langle -\overline{\omega}(B(\xi)) u_0^{-1} Y, u_0^{-1} Z\rangle = -\langle \overline{\omega}(B(\xi))\eta, v\rangle = \langle \omega(\overline{B}(\xi))\eta, v\rangle,$$

где $u_0 \eta = Y$, $u_0 v = Z$.

Для множества $\{P(H)\}$ всевозможных H-структур в расслоении $O(M)$ рассмотрим подмножество $\overline{\mathbf{T}}(T)$ в $\overset{3}{\oplus} T^*$, состоящее из всех тензоров h_p, где h — второе фундаментальное тензорное поле $P(H)$. Определяется взаимно однозначное соответствие

$$\Phi : \overline{\mathbf{T}}(T) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m}), \quad h_p \mapsto \varphi = \omega_{u_0} \circ \overline{B} = -\overline{\omega}_{u_0} \circ B$$

(h_p и $\overline{\omega}_{u_0}$ определяют друг друга взаимно однозначно).

Нетрудно убедиться, что отображение Φ линейно, и мы имеем линейный изоморфизм между $\overline{\mathbf{T}}(T)$ и $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m})$.

3°. Риманова метрика g превращает пространство $T = T_p(M)$ в евклидово пространство. Если $E_1, \ldots, E_n$ — произвольный ортонормальный базис T, то $\overline{\mathbf{T}}(T)$ является евклидовым пространством относительно следующего скалярного произведения:

$$\langle h, h'\rangle = \sum_{i,j,k} h_{E_i E_j E_k} \cdot h'_{E_i E_j E_k}, \quad h, h' \in \overline{\mathbf{T}}(T).$$

Естественное действие группы H на T индуцирует действие этой группы на $\overline{\mathbf{T}}(T)$ по формуле

$$(ah)_{XYZ} = h_{a^{-1}Xa^{-1}Ya^{-1}Z}, \quad X, Y, Z \in T, \quad a \in H.$$

Пусть $\overline{\mathbf{T}}(T) = \bigoplus_{\alpha \in A} \overline{\mathbf{T}}_\alpha$ — разложение пространства $\overline{\mathbf{T}}(T)$ на инвариантные и неприводимые компоненты относительно действия группы H. Заметим, что изоморфизм Φ индуцирует скалярное произведение на $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m})$.

Теорема 5. *Изоморфизм Φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\{\overline{\mathbf{T}}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и множеством всех инвариантных и неприводимых компонент пространства $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m})$ относительно следующего действия группы H:*

$$H \times \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m}) \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m}), \quad \varphi \mapsto a\varphi, \quad (a\varphi)\xi = \mathrm{ad}(a)\varphi(a^{-1}\xi), \quad a \in H, \quad \xi \in \mathbf{R}^n. \qquad (2)$$

Доказательство. Так как h_{XYZ} не зависит от выбора репера $u \in O(M)$, то $\langle \overline{\omega}_u(B(\xi))\eta, v\rangle = \langle \overline{\omega}_{ua}(B(a^{-1}\xi))a^{-1}\eta, a^{-1}v\rangle$, где $u\xi = X$, $u\eta = Y$, $uv = Z$.

$$\begin{aligned}(ah)_{XYZ} = h_{a^{-1}Xa^{-1}Ya^{-1}Z} &= -\langle \overline{\omega}_u(B(a^{-1}\xi))u^{-1}a^{-1}Y, u^{-1}a^{-1}Z\rangle = -\langle \overline{\omega}_u(B(a^{-1}\xi))a^{-1}\eta, a^{-1}v\rangle = \\ &= -\langle \overline{\omega}_{ua^{-1}}(B(\xi))\eta, v\rangle = -\langle \overline{\omega}_{ua^{-1}}(R_{a_*^{-1}} R_{a_*} B(\xi))\eta, v\rangle = -\langle \mathrm{ad}(a)\overline{\omega}_u(B(a^{-1}\xi))\eta, v\rangle.\end{aligned}$$

Если $\Phi(h_p) = \varphi$, то $\Phi(ah_p) = a\varphi = a\Phi(h_p)$, где $a\varphi$ определяется из (2). Действие группы H на $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m})$ действительно определяется из (2), т.к. $\mathrm{ad}(H)\underline{m} = \underline{m}$ и $((ab)\varphi)\xi = \mathrm{ad}(ab)\varphi(b^{-1}a^{-1}\xi) = \mathrm{ad}(a)\,\mathrm{ad}(b)\varphi(b^{-1}a^{-1}\xi) = \mathrm{ad}(a)((b\varphi)a^{-1}\xi) = (a(b\varphi))\xi$. Так как $\Phi(ah_p) = a\Phi(h_p)$, то Φ является изоморфизмом $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m})$ и $\overline{\mathbf{T}}(T)$ как H-пространств и дает взаимно однозначное соответствие между $\{\overline{\mathbf{T}}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и неприводимыми компонентами $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \underline{m})$. $\square$

4°. Отметим, что введенное автором тензорное поле h применялось в [2] к проблемам классификации структур на римановых многообразиях. В частности, в терминах поля h в [2] была получена классификация почти эрмитовых структур ($H = U(n)$, всего 16 классов), изоморфная классификации в [6], а также классификация почти контактных метрических структур ($H = U(n) \times 1$, всего 2^{12} классов), изоморфная классификации в [7], [8].

Аналогичным образом, с помощью поля h может быть переписана и классификация из [9]. Все перечисленные классификации фактически проводятся инфинитезимально (в точке $p \in M$). Естественно дать следующее

Определение 3. Будем говорить, что структура $(P(H), g)$ принадлежит классу $\overline{\mathbf{T}}_\alpha$, $\alpha \in A$, на M, если $h_p \in \overline{\mathbf{T}}_\alpha(T_p(M))$ для всех $p \in M$.

Если тензор $h_p \in \overline{\mathbf{T}}_\alpha(T)$, $p = \pi(u_0)$, то единственным образом получим гомоморфизм $\varphi = \Phi(h_p)$, который определяет подпространство $\overline{Q}_{u_0} \subset V^m_{u_0} \oplus Q_{u_0}$ такое, что $T_{u_0}(O(M)) = V_{u_0} \oplus \overline{Q}_{u_0}$. Из доказательства теоремы 4 видно, что существует структура $P'(H) \subset O(M)$ такая, что $\overline{Q}_{u_0}$ — горизонтальное подпространство ее канонической связности $\overline{\Gamma}$, т. е. h_p является вторым фундаментальным тензором структуры $(P'(H), g)$ в точке p. Беря в различных точках $p_1, \ldots, p_s$ тензоры $h_{p_1}, \ldots, h_{p_s}$, принадлежащие различным классам $\overline{\mathbf{T}}_\alpha$, $\alpha \in A$, и, проводя изгибание структуры $P(H)$ в $O(M)$ в каждой из указанных точек, получим H-структуру $\overline{P}(H)$ на M, для которой второе фундаментальное тензорное поле h удовлетворяет условиям $h(p_i) = h_{p_i}$, $i = 1, \ldots, s$. В частности, для почти эрмитовой структуры (J, g), $J^2 = -I$, $H = U(n)$ на многообразии M можно выбрать 16 точек и почти эрмитову структуру $(\overline{J}, g)$ так, что $h_{p_i} \in \overline{\mathbf{T}}_i$, $i = 0, 1, \ldots, 15$, где h — второе фундаментальное поле пары $(\overline{J}, g)$ (см. пример 2). Это значит, что структура $(\overline{J}, g)$ будет кэлеровой в p_0, приближенно (nearly)-кэлеровой в p_1, почти (almost)-кэлеровой в p_2, интегрируемой в p_6 и т.д.

Таким образом, принадлежность структуры к определенному классу в общем случае не сохраняется.

Теорема 6 ([2]). *Пусть почти контактная метрическая структура (почти эрмитова структура) на множестве M является квазиоднородной структурой ($\overline{\nabla} h = 0$), принадлежащей классу $\overline{\mathbf{T}}_\alpha$ для некоторой точки $p \in M$. Тогда эта структура будет из класса $\overline{\mathbf{T}}_\alpha$ для каждой точки многообразия M.*

Проблема. *Остается ли эта теорема справедливой в общем случае для структуры $(P(H), g)$ на множестве M, $H \subset O(n)$?*

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
2. Ермолицкий А.А. *Римановы многообразия с геометрическими структурами.* – Минск: БГПУ, 1998. – 195 с.
3. Ермолицкий А.А. *Вторая квадратичная форма G-структуры и почти особые структуры* // Докл. Болг. АН. – 1981. – Т. 7. – № 7. – С. 963–964.
4. Кириченко В.Ф. *Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры* // Изв. АН СССР. – 1983. – Т. 47. – № 6. – С. 1208–1223.
5. Бишоп Р.Л., Криттенден Р.Д. *Геометрия многообразий.* – М.: Мир, 1967. – 335 с.
6. Gray A., Hervella L.M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* // Ann. mat. pura appl. – 1980. – V. 123. – P. 35–58.
7. Alexiev V.A., Ganchev G.T. *On the classification of the almost contact metric manifolds* // Proceedings of the 15$^{\text{th}}$ spring conference of the Union of Bulgarian Mathematicians. Math. and Educ. in Math. – 1986.– P. 155–161.
8. Chinea D., Gonzalez C. *A classification of almost contact metric manifolds* // Ann. mat. pura appl. – 1990. – V. 156. – P. 15–36.
9. Naveira A.M. *A classification of Riemannian almost-product manifolds* // Rend. math. appl. – 1983. – V. 3. – № 3. – P. 577–592.

Белорусский институт правоведения

Поступила
25.10.2001