ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.968:519.6

Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОДОБЛАСТЕЙ

Введение

Для решения дифференциальных уравнений в [1] был предложен специальный прямой метод, названный впоследствии *методом подобластей* или *методом осциллирующих функций*. В последующие годы этот метод исследовался применительно к различным классам дифференциальных и интегральных уравнений (см., напр., [2]–[9] и библиографию в них). Ниже устанавливаются *неулучшаемые* по порядку оценки погрешности метода подобластей для ряда классов регулярных и сингулярных интегральных уравнений. Они основаны в первую очередь на специально устанавливаемых нами аппроксимативных свойствах оператора подобластей по экстремальным точкам многочленов Чебышева в весовом пространстве Лебега и в пространстве непрерывных функций на отрезке вещественной оси.

1. Вспомогательные результаты

Обозначим через $L_2(\rho) = L_2(\rho;[-1,1])$ пространство квадратично суммируемых по Лебегу на $[-1,1]$ функций с весом $\rho = \rho(t)$ и с нормой

$$\|\varphi\|_{L_2(\rho)} = \left\{ \int_{-1}^{1} \rho(t)|\varphi(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad \varphi \in L_2(\rho).$$

В пространстве $L_2(\rho)$ введем полиномиальный оператор Π_n, ставящий в соответствие каждой функции $f \in L_2(\rho)$ алгебраический многочлен $Q_n(t)$ наименьшей возможной степени, однозначно определяемый из условий

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} Q_n(t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

где

$$t_i = t_{i,n} = \cos\frac{i\pi}{n}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Для оператора Π_n справедливы следующие результаты при $\rho = \rho(t) = (1-t^2)^{1/2}$; такой выбор весовой функции обусловлен свойствами существенно используемых ниже многочленов Чебышева первого и второго родов

$$T_n(t) = \cos n \arccos t, \quad U_n(t) = (1-t^2)^{-1/2}\sin(n+1)\arccos t, \quad n = 0,1,\dots$$

Лемма 1.1. *Для любой функции $f \in L_2(\rho)$ в пространстве $L_2(\rho)$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_n(f;t) = f(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{1.3}$$

причем для погрешности приближенной формулы $f(t) \approx \Pi_n(f;t)$ справедливы следующие двусторонние оценки:

$$E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)} \le \|f - \Pi_n f\|_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{2} E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

где $E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)}$ — наилучшее приближение в $L_2(\rho)$ функции $f \in L_2(\rho)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$.

Следствие. Операторы $\Pi_n : L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ ограничены по норме в совокупности, точнее,

$$1 \le \|\Pi_n\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Известно (см., напр., [10]), что для любой функции $\varphi(t) \in C[-1,1]$, имеющей производную $\varphi'(t) \in L_2(\rho)$, справедливы неравенства

$$E_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)_{L_2(\rho)} \le \left\|\frac{d}{dt}\varphi(t) - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_n(\varphi;t)\right\|_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{2} E_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)_{L_2(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Положим

$$\varphi(t) = \int_c^t f(\tau)d\tau, \quad c, t \in [-1,1], \tag{1.7}$$

где c — произвольно фиксированная точка из $[-1,1]$. Тогда из (1.6) при $\varphi'(t) = f(t)$ следует, что для любой $f \in L_2(\rho)$

$$E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)} \le \left\|f(t) - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_n(\varphi;t)\right\|_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{2} E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Известно, что существует единственный многочлен $Q_n(t) = \Pi_n(f;t)$, удовлетворяющий условиям (1.1)–(1.2), и его можно представить в виде

$$\Pi_n(f;t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}_n\left(\int_c^s f(\tau)d\tau; t\right), \tag{1.9}$$

где c и s — произвольные точки из $[-1,1]$, $\mathcal{L}_n(\psi;t)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\psi \in C[-1,1]$ по узлам (1.2). Поэтому из (1.8) и (1.9) получаем верхнюю из оценок (1.4). Поскольку для любой $f \in L_2(\rho)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_n\left(\int_c^s f(\tau)d\tau; t\right) \in \mathbb{H}_{n-1} = \left\{\sum_{k=1}^n a_k t^{k-1}\right\}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то из (1.6) следует также нижняя из оценок (1.4). Так как система функций $\{t^k\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_2(\rho)$, то из (1.4) в свою очередь следует предельное соотношение (1.3).

Легко видеть, что операторы $\Pi_n : L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ аддитивны, однородны и проекционны ($\Pi_n^2 = \Pi_n$) при любых $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $L_2(\rho)$ — полное пространство, то в силу (1.3) из теоремы Банаха–Штейнхауса (см., напр., в [11]) следует ограниченность операторов Π_n в совокупности. Так как $E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)} \le \|f\|_{L_2(\rho)}$ для любой $f \in L_2(\rho)$, то из (1.4) находим, что $\|E - \Pi_n\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} \le \pi/2$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из равенства $\Pi_n^2 = \Pi_n$ следует, что

$$1 \le \|\Pi_n\|_{L_2(\rho)\to L_2(\rho)} \le 1 + \pi/2, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

После несложных, но громоздких вычислений верхняя из оценок (1.10) может быть несколько уточнена, в результате чего получим верхнюю из оценок (1.5).

Лемма 1.2. *Для любой функции $f \in C[-1,1]$ справедлива оценка*

$$\|f - \Pi_n f\|_C = \max_{-1\le t\le 1} |f(t) - \Pi_n(f;t)| \le 2\ln(ne)E_{n-1}(f)_C, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.11}$$

где $E_{n-1}(f)_C = d(f, \mathbb{H}_{n-1})_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C[-1,1]$ алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$. Если же функция $f(t)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, то многочлены $\Pi_n(f;t)$ сходятся равномерно со скоростью $\|f - \Pi_n f\|_C = O\{E_{n-1}(f)_C \ln n\}$.

Следствие. Для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|\Pi_n\|_{C\to C} \le 3 + 2\ln n. \tag{1.12}$$

Доказательство. Известно (см., напр., [12]), что для любой непрерывно-дифференцируемой на $[-1,1]$ функции $\varphi(t)$ в пространстве $C[-1,1]$ справедливо неравенство

$$\left\| \frac{d}{dt}\varphi(t) - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_n(\varphi;t) \right\|_C \le 2(1+\ln n)E_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\varphi(t)\right)_C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (1.7) находим оценку (1.11), а из нее и из неравенств $E_{n-1}(f)_C \le \|f\|_C$, $\|\Pi_n f\|_C \le \|f\|_C + \|f - \Pi_n f\|_C$, $f \in C$, — утверждение следствия.

Приведем два результата из общей теории приближенных методов Л.В. Канторовича согласно ([11], гл. 14, и [6], гл. 1).

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, а $X_n \subset X$ и $Y_n \subset X$ — их конечномерные подпространства одинаковой размерности $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим операторные уравнения вида

$$Kx = y, \quad x \in X, \quad y \in Y; \quad K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y, \quad x_n \in X_n, \quad P_n y \in Y_n,$$

где $K : X \to Y$, $K_n : X_n \to Y_n$ и $P_n : Y \to Y_n$ — линейные операторы.

Лемма 1.3. *Пусть $\varepsilon_n \equiv \|K - P_n K\|_{X_n \to Y} \to 0$, $n \to \infty$, а оператор $K : X \to Y$ непрерывно обратим. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $q_n = \|K^{-1}\|\varepsilon_n < 1$, операторы $K_n : X_n \to Y_n$ также непрерывно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности:*

$$\|K_n^{-1}\| \le \|K^{-1}\|(1-q_n)^{-1} = O(1), \quad K_n^{-1} : Y_n \to X_n.$$

Если, кроме того, $\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_Y \to 0$, $n \to \infty$, то приближенные решения $x_n^* = K_n^{-1}P_n y$ сходятся к точному решению $x^* = K^{-1}y$ в пространстве X и погрешность приближенного решения может быть оценена соотношениями

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \frac{\|K^{-1}\|}{1-q_n}(\|y - P_n y\|_Y + q_n\|y\|_Y) = O(\varepsilon_n + \delta_n),$$
$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|(E - K_n^{-1}P_n K)(x^* - \overline{x}_n)\|_X = O\{\|P_n\|E_n(x^*)_X\}, \ \overline{x}_n \in X_n,$$

где E — единичный оператор, а

$$E_n(x^*)_X = \inf\{\|x^* - x_n\|_X : x_n \in X_n\} = \|x^* - \overline{x}_n\|_X.$$

Лемма 1.4. *Пусть $K = G+H : X \to Y$, $K_n = G+P_n H : X_n \to Y_n$ и $P_n : Y \to Y_n$ — линейные операторы, причем $GX = Y$, $GX_n = Y_n$, $P_n^2 = P_n$. Если операторы K, G и K_n непрерывно обратимы, то погрешность приближенного решения может быть оценена соотношениями*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|(E - K_n^{-1}P_n H)(x^* - G^{-1}P_n G x^*)\|_X \le (1 + \|K_n^{-1}P_n H\|_{X\to X})\|G^{-1}\|_{Y\to X}\|Gx^* - P_n G x^*\|_Y.$$

2. Операторные уравнения второго рода

В пространстве $L_2(\rho) \equiv X$ рассмотрим линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv x + Bx = y(x, y \in X), \tag{2.1}$$

где B — вполне непрерывный или же малый по норме оператор в $L_2(\rho)$. Ясно, что (2.1) является абстрактным аналогом интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Поэтому предлагаемые ниже результаты дают также обоснование метода подобластей для указанных интегральных уравнений.

Приближенное решение уравнения (2.1) ищем в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k t^{k-1}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

коэффициенты которого определяем из условий

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} A(x_n; t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)dt, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.3}$$

где узлы t_r определены в (1.2). В силу (2.1) и (2.2) условия (2.3) эквивалентны следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_k = y_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.4}$$

где

$$a_{ik} = \frac{t_i^k - t_{i-1}^k}{k} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} B(t^{k-1}; t)dt, \quad y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)dt; \quad t_r = \cos\frac{r\pi}{n}, \quad r = \overline{0, n}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

а) B — *вполне непрерывный оператор в пространстве* $L_2(\rho)$; б) *уравнение* (2.1) *имеет единственное решение* $x^* \in L_2(\rho)$ *при любой правой части* $y \in L_2(\rho)$.

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, СЛАУ* (2.4)–(2.5) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^* \in \mathbb{R}$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* t^{k-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2*}$$

уравнения (2.1) *сходятся к его точному решению* $x^*(t)$ *в пространстве* $L_2(\rho)$, *при этом для погрешности приближенной формулы* $x^*(t) \approx x_n^*(t)$ *справедливы следующие двусторонние оценки:*

$$E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)} \le \|x^* - x_n^*\|_{L_2(\rho)} = O\{E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)}\}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть $L_{2,n}(\rho) \equiv X_n$ есть n-мерное подпространство всех алгебраических многочленов вида (2.2), наделенное нормой пространства $L_2(\rho) \equiv X$. Тогда СЛАУ (2.4)–(2.5) эквивалентна линейному операторному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv x_n + \Pi_n B x_n = \Pi_n y, \quad x_n, \Pi_n y \in X_n, \tag{2.7}$$

где оператор $\Pi_n : L_2(\rho) \to L_{2,n}(\rho)$ определен и исследован в п. 1.

Покажем близость уравнений (2.1) и (2.7) в смысле лемм 1.3 и 1.4 из п. 1. В силу леммы 1.1 для их правых частей имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \Pi_n y\|_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{2} E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.8}$$

Для любого $x_n \in X_n$, $x_n \neq 0$, из (2.1) и (2.7) в пространстве $L_2(\rho)$ находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\| = \|Bx_n - \Pi_n Bx_n\| = \|x_n\| \cdot \|Bz_n - \Pi_n Bz_n\| \leq \\ \leq \|x_n\| \sup_{z \in S(0,1)} \|Bz - \Pi_n Bz\| \equiv \varepsilon_n' \|x_n\|, \quad (2.9)$$

где

$$\varepsilon_n' = \sup_{\varphi \in BS(0,1)} \|\varphi - \Pi_n \varphi\|, \quad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad S(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}. \quad (2.10)$$

В силу леммы 1.1 операторы Π_n сильно сходятся в пространстве $L_2(\rho)$. Так как в силу условия а) теоремы $BS(0,1)$ — компактное множество в полном пространстве $L_2(\rho)$, то, благодаря теореме И.М. Гельфанда (см., напр., [11], с. 274–276), имеем

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n' = \lim_{n \to \infty} \sup_{\varphi \in BS(0,1)} \|\varphi - \Pi_n \varphi\| = 0. \quad (2.11)$$

Из соотношений (2.9)–(2.11) получаем

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to X} = \|B - \Pi_n B\|_{X_n \to X} \leq \|B - \Pi_n B\|_{X \to X} \leq \varepsilon_n' \to 0, \quad n \to \infty. \quad (2.12)$$

В условиях теоремы линейный оператор $A = E + B : X \to X$ непрерывно обратим. Отсюда и из (2.8)–(2.12) следует, что для уравнений (2.1) и (2.7) выполнены все условия леммы 1.3, согласно которой при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что $q_n = \varepsilon_n' \|A^{-1}\| < 1$, СЛАУ (2.4)–(2.5) однозначно разрешима и

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2(\rho)} = O\{\varepsilon_n' + E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)}\} \to 0, \quad n \to \infty. \quad (2.13)$$

Кроме оценки (2.13), погрешность метода (2.1)–(2.5), (2.2*) согласно леммам 1.1, 1.3 и 1.4 может быть оценена также неравенствами

$$E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)} \leq \|x^* - x_n^*\|_{L_2(\rho)} \leq \|E - A_n^{-1} \Pi_n A\|_{L_2(\rho) \to L_2(\rho)} E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)}, \quad (2.14)$$

$$E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)} \leq \|x^* - x_n^*\|_{L_2(\rho)} \leq \frac{\pi}{2} \|E - A_n^{-1} \Pi_n B\|_{L_2(\rho) \to L_2(\rho)} E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)}, \quad (2.15)$$

где

$$\|A_n^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| (1 - q_n)^{-1}, \quad q_n = \|A^{-1}\| \varepsilon_n' < 1, \quad (2.16)$$

$$E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)} \leq E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)} + E_{n-1}(Bx^*)_{L_2(\rho)} \to 0, \quad n \to \infty. \quad (2.17)$$

Поэтому оценки (2.6) доказаны, а в силу соотношений (2.13)-(2.17) доказана теорема 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть оператор $B : L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ удовлетворяет условию*

$$q = \frac{\pi}{2} \|B\| < 1. \quad (2.18)$$

Тогда как точное уравнение (2.1)*, так и аппроксимирующая его СЛАУ* (2.4)–(2.5) *при любых $n \in \mathbb{N}$ однозначно разрешимы. Приближенные решения* (2.2*) *сходятся в пространстве $L_2(\rho)$, причем для любых $n = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)} \leq \|x^* - x_n^*\|_{L_2(\rho)} \leq \frac{\pi}{2(1-q)} E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)}. \quad (2.19)$$

Доказательство. Для операторов $B : L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ и $B_n = \Pi_n B : X_n \to X_n$ в силу (2.18) и (1.5) имеем

$$\|B\| \leq \frac{2}{\pi}, \quad \|B_n\| \leq q < 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Поэтому (см., напр., в [11]) операторы $A : L_2(\rho) \to L_2(\rho)$ и $A_n : X_n \to X_n$, определенные в (2.1) и соответственно в (2.7), непрерывно обратимы и

$$\|A^{-1}\| \le \frac{\pi}{\pi - 2}, \quad \|A_n^{-1}\| \le \frac{1}{1-q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

В силу (2.21) первая часть утверждения теоремы становится очевидной. Для доказательства второй его части с оценками (2.19) достаточно воспользоваться последовательно соотношениями (2.15), (2.21), (1.5), (2.18) и (2.20).

Теоремы 2.1 и 2.2 позволяют вывести оценки погрешности метода (2.1)–(2.5), (2.2*) в пространстве $C = C[-1, 1]$, а оттуда — достаточные условия его равномерной сходимости. Приведем один из таких результатов.

Теорема 2.3. *Пусть $y \in C$, а $B : L_2(\rho) \to C$ — ограниченный оператор. Тогда в условиях любой из теорем 2.1 и 2.2 для погрешности метода (2.1)–(2.5), (2.2*) справедливы оценки*

$$\|x^* - x_n^*\|_C = \max_{-1 \le t \le 1} |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{E_{n-1}(x^*)_C \ln n\}. \tag{2.22}$$

Если, кроме того,

$$\|\Pi_n B\|_{L_2(\rho) \to C} = O(1), \quad n \to \infty, \tag{2.23}$$

то справедливы асимптотические оценки

$$\|x^* - x_n^*\|_C \sim \|x^* - \Pi_n x^*\|_C, \quad n \to \infty. \tag{2.24}$$

Доказательство. В условиях теоремы решения уравнений (2.1) и (2.7) удовлетворяют соответственно условиям

$$x^*(t) \equiv y(t) - B(x^*; t) \in C[-1, 1], \tag{2.25}$$

$$x_n^*(t) \equiv \Pi_n(y; t) - (\Pi_n B)(x_n^*; t) \in \mathbb{H}_{n-1} \subset C[-1, 1], \tag{2.26}$$

поэтому соотношения $\|x^* - x_n^*\|_C$, $E_{n-1}(x^*)_C$ имеют смысл. Из (2.25), (2.26) получаем тождество

$$x^* - x_n^* \equiv (x^* - \Pi_n x^*) - \Pi_n B(x^* - x_n^*). \tag{2.27}$$

Из (2.27) находим неравенства

$$\|x^* - x_n^*\|_C \le \|x^* - \Pi_n x^*\|_C + \|\Pi_n B\|_{L_2(\rho) \to C} \|x^* - x_n^*\|_{L_2(\rho)}, \tag{2.28}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_C \ge \|x^* - \Pi_n x^*\|_C - \|\Pi_n B\|_{L_2(\rho) \to C} \|x^* - x_n^*\|_{L_2(\rho)}. \tag{2.29}$$

Из неравенств (2.23), (2.28), (2.29) с учетом теорем 2.1, 2.2 и леммы 1.2 находим оценки (2.24). Кроме того, из (2.28) и (1.11), (1.12) с учетом теорем 2.1 и 2.2 находим

$$\|x^* - x_n^*\|_C \le 2\|\Pi_n\|_{C \to C} E_{n-1}(x^*)_C + \|\Pi_n\|_{C \to C} \|B\|_{L_2(\rho) \to C} O\{E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)}\} =$$
$$= \|\Pi_n\|_{C \to C} O\{E_{n-1}(x^*)_C + E_{n-1}(x^*)_{L_2(\rho)}\} = O\{\|\Pi_n\|_{C \to C} E_{n-1}(x^*)_C\} = O\{E_{n-1}(x^*)_C \ln n\}. \quad \square$$

Из теоремы 2.3 и прямых теорем теории наилучших равномерных приближенией (см., напр., [13], [14]) получаем

Следствие. Пусть уравнение (2.1) таково, что его решение удовлетворяет условию

$$x^*(t) \in W^r H^\omega, \quad r + 1 \in \mathbb{N}, \tag{2.30}$$

где $\omega = \omega(\delta)$ — произвольный модуль непрерывности с шагом $\delta \in (0, 2]$, а при $r = 0$ — дополнительному условию Дини–Липшица. Тогда метод (2.1)–(2.5), (2.2*) сходится равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O\left\{\frac{\ln n}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right\}, \quad r + 1 \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

Следует отметить, что результат, аналогичный только что приведенному, можно получить также самостоятельно, т.е. независимо от теорем 2.1 и 2.2, но с использованием леммы 1.2. Например, следуя ([6], гл. 4), легко доказать следующую теорему.

Теорема 2.4. *Пусть функции* $y(t)$ *и* $B(x;t)$ *равномерно относительно* $x \in C$ *удовлетворяют условию Дини–Липшица. Тогда исследуемый метод сходится равномерно со скоростью* (2.22); *если же выполняется условие* (2.30), *то и со скоростью* (2.31).

Завершая этот пункт, приведем два замечания.

1^0. Результаты, полученные выше для общего операторного уравнения второго рода (2.1), в случае уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода упрощаются и несколько усиливаются.

2^0. Пусть оператор B из (2.1) определяется по формуле

$$B(x;t) = \int_{-1}^{\sigma(t)} h(t,\tau)x(\tau)d\tau \equiv \varphi(t), \quad x \in L_2(\rho), \tag{2.32}$$

где $\sigma(t) = +1$ (случай уравнения Фредгольма) или $\sigma(t) = t$ (случай уравнения Вольтерра), а ядро $h(t,\tau)$ таково, что функция $\varphi(t)$ на сегменте $[-1,1]$ удовлетворяет условию Дини–Липшица. Тогда для операторов Π_n и B выполняется условие (2.23).

3. Сингулярное интегральное уравнение (СИУ) первого рода

Рассмотрим СИУ с ядром Коши вида [15], [16]

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = y(t), \quad -1 < t < 1, \tag{3.1}$$

где $h(t,\tau)$ и $y(t)$ — известные функции, а $x(t)$ — искомая функция.

Согласно теории СИУ (см., напр., [15], [16]) будем искать такое решение уравнения (3.1), которое удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0. \tag{3.2}$$

Поэтому приближенное решение СИУ (3.1) ищем в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

коэффициенты которого будем определять согласно методу подобластей из условий

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (Kx_n)(t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)dt, \quad i = \overline{1,n}, \quad t_k = \cos\frac{k\pi}{n}. \tag{3.4}$$

Условия (3.4) эквивалентны СЛАУ относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ полинома (3.3)

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\alpha_k = y_i, \; i = \overline{1,n}, \tag{3.5}$$

где

$$b_{ik} = \frac{T_k(t_i) - T_k(t_{i-1})}{k} + \frac{1}{2\pi}\int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)T_k(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)dt.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены следующие условия*: а) *задача* (3.1)–(3.2) *имеет единственное решение* $x^*(t) \in L_2(1/\rho)$ *при любой правой части* $y(t) \in L_2(\rho)$, *где* $\rho = \rho(t) = (1-t^2)^{1/2}$; б) *ядро* $h(t,\tau)$ *таково, что*

$$\Theta^2 \equiv \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}}|h(t,\tau)|^2 dt\,d\tau < \infty. \tag{3.6}$$

Тогда для всех n, *хотя бы достаточно больших, СЛАУ* (3.5) *также имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* T_k(t) \tag{3.3*}$$

сходятся к точному решению $x^*(t)$ *в пространстве* $L_2(1/\rho)$ *со скоростью*

$$E_n(x^*)_{L_2(1/\rho)} \le \|x^* - x_n^*\|_{L_2(1/\rho)} = O\{E_n(x^*)_{L_2(1/\rho)}\}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $Y = L_2(\rho)$ с приведенной выше нормой, а

$$X = L_2^0(\tfrac{1}{\rho}) = \left\{x(t) \in L_2(\tfrac{1}{\rho}) : \int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0\right\}, \quad \|x\|_X = \left(\int_{-1}^{1}\frac{|x(t)|^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{1/2}.$$

Тогда задача (3.1)–(3.2) эквивалентна линейному операторному уравнению вида

$$Kx \equiv Sx + Tx = y, \quad x \in X, \;\; y \in Y, \tag{3.8}$$

где

$$Sx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}}, \quad Tx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Известно (см., напр., [7], гл. 2), что оператор $S : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|S\| = 1, S : X \to Y; \; \|S^{-1}\| = 1, \quad S^{-1} : Y \to X, \tag{3.9}$$

а в силу (3.6) оператор $T : X \to Y$ является вполне непрерывным. Отсюда и из условий теоремы следует, что оператор $K : X \to Y$ также непрерывно обратим.

Обозначим через $\mathbb{H}_m$ множество всех алгебраических многочленов степени не выше m. Введем n-мерные подпространства пространств X и Y соответственно $X_n = \mathbb{H}_n \cap X$ и $Y_n = \mathbb{H}_{n-1} \cap Y$. Пусть $\Pi_n : Y \to Y_n$ — исследованный выше оператор метода подобластей по системе узлов (1.2). Так как $\Pi_n^2 = \Pi_n$, то, как легко показать, $\Pi_n S x_n = S x_n$ для любых полиномов $x_n \in X_n$. Тогда СЛАУ (3.5) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv S x_n + \Pi_n T x_n = \Pi_n y, \;\; x_n \in X_n, \;\; \Pi_n y \in Y_n. \tag{3.10}$$

В силу леммы 1.1 правые части уравнений (3.8) и (3.10) близки в том смысле, что

$$\delta_n \equiv \|y - \Pi_n y\|_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{2} E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.11}$$

С помощью той же леммы и полной непрерывности интегрального оператора $T : X \to Y$ доказывается, что операторы $K : X \to Y$ и $K_n : X_n \to Y_n$ из (3.8) и соответственно (3.10) близки в том смысле, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \le \varepsilon_n' = \sup_{\varphi \in TS(0,1)} \|\varphi - \Pi_n \varphi\|_{L_2(\rho)} \to 0, \; n \to \infty, \tag{3.12}$$

где $S(0,1)$ — единичный шар пространства $L_2(1/\rho)$. В силу (3.11), (3.12) из лемм 1.1, 1.3 и 1.4 получаем оценки (3.7). □

С помощью теоремы 3.1, лемм 1.1, 1.3, 1.4 и по аналогии с теоремой 2.2 доказывается

Теорема 3.2. *Пусть $q = \theta/4 < 1$, где постоянная θ определена в* (3.6). *Тогда как точное СИУ* (3.1)–(3.2), *так и аппроксимирующая его СЛАУ* (3.5) *при любых $n \in \mathbb{N}$ однозначно разрешимы. Для погрешности метода* (3.1)–(3.5), (3.3*) *справедливы двусторонние оценки*

$$E_n(x^*)_{L_2(1/\rho)} \leq \|x^* - x_n^*\|_{L_2(1/\rho)} \leq \frac{\pi}{2(1-q)} E_n(x^*)_{L_2(1/\rho)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$E_n(x^*)_{L_2(1/\rho)} = E_{n-1}(Sx^*)_{L_2(\rho)} \leq E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)} + E_{n-1}(Tx^*)_{L_2(\rho)}.$$

Пользуясь способом, предложенным в ([7], гл. II), леммами 1.1, 1.2 и теорией наилучших полиномиальных приближений [13], [14], доказываем следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть функции $y(t)$ и $h(t, \tau)$ таковы, что функция $\widetilde{x}(\sigma) \equiv x^*(\cos\sigma) \in W_2^r[0, \pi]$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда в условиях любой из теорем* 3.1 *и* 3.2 *метод* (3.1)–(3.5), (3.3*) *сходится в среднем и равномерно со скоростями соответственно*

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2(1/\rho)} = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad \|x^* - x_n^*\|_{C[-1,1]} = O\left(\frac{1}{n^{r-1/2}}\right);$$

если же $\widetilde{x}(\sigma) \in W^r[0, \pi]$, $r \in \mathbb{N}$, то и со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{C[-1,1]} = O\left(\frac{\ln n}{n^r}\right).$$

4. Уравнение теории крыла

Рассмотрим сингулярное интегродифференциальное уравнение теории крыла (см., напр., [15], [16])

$$K\Gamma \equiv \frac{\Gamma(t)}{B(t)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\Gamma'(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad -1 < t < 1, \tag{4.1}$$

при краевых условиях

$$\Gamma(-1) = \Gamma(1) = 0; \tag{4.2}$$

здесь $f(t) \in L_2(\rho)$ и $B(t) \in C$ — известные функции на $[-1, 1]$, а $\Gamma(t)$ — искомая функция, причем $B(t)$ нигде, за возможным исключением концов, в нуль не обращается.

Точное решение задачи (4.1)–(4.2) будем искать в весовом пространстве функций

$$X = \mathring{W}_2^1(\rho) = \{\Gamma(t) = \sqrt{1-t^2}\gamma(t) : \Gamma'(t) \in L_2(\rho),\ \gamma(t) \in C[-1, 1]\}, \quad \rho = \rho(t) = \sqrt{1-t^2},$$

с нормой $\|\Gamma\|_X = \|\Gamma'(t)\|_{L_2(\rho)}$. Ее приближенное решение ищем в виде

$$\Gamma_n(t) = \sqrt{1-t^2}\gamma_n(t), \quad \gamma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U_{k-1}(t). \tag{4.3}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\alpha_k = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.4}$$

где

$$c_{ik} = T_k(t_i) - T_k(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\sin k \arccos t}{B(t)} dt, \quad f_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt, \quad t_k = \cos\frac{k\pi}{n}. \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия:*

а) *краевая задача* (4.1)–(4.2) *имеет единственное решение* $\Gamma^*(t) \in X$ *при любой правой части* $f(t) \in Y \equiv L_2(\rho)$; б) *функция* $b(t) = 1/B(t) \in C[-1, 1]$.

Тогда при всех n, *хотя бы достаточно больших, СЛАУ* (4.4)–(4.5) *имеет единственное решение* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. *Приближенные решения* (4.3) *сходятся к точному решению* $\Gamma^*(t)$ *в пространстве* X *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_{n-1}(G\Gamma^*)_{L_2(\rho)} \le \|\Gamma^* - \Gamma_n\|_X = O\{E_{n-1}(G\Gamma^*)_{L_2(\rho)}\} = O\{E_{n-1}(f)_{L_2}(\rho) + E_{n-1}\left(\Gamma^*/B\right)_{L_2(\rho)}\},$$

где

$$G(\Gamma^*; t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\Gamma^*(\tau)}{\tau - t} \equiv \frac{\Gamma^*(t)}{B(t)} - f(t).$$

Доказательство выводится из теоремы 3.1 и ее следствия ([7], гл. 3) и из установленной выше леммы 1.1 и ее следствия.

5. Уравнение теории струй

В ряде прикладных задач, в первую очередь в теории струй и теплопроводности (см., напр., в [17]–[19]), встречаются сингулярные интегродифференциальные уравнения вида

$$Kx \equiv x'(t) + a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - t)} = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{5.1}$$

где $a(t), b(t) \in C[-1, 1]$ и $y(t) \in L_2(\rho)$ — известные функции, а $x(t)$ — искомая функция. Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$x(t^0) = 0, \quad -1 \le t^0 \le 1. \tag{5.2}$$

Задача (5.1)–(5.2) в общем случае точно не решается. Поэтому необходимы методы ее приближенного решения [17], [18], [6], [7]. Ниже, следуя ([7], гл. 3, § 5), задачу (5.1)–(5.2) решаем методом подобластей. Приближенное решение ищется в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [T_k(t) - T_k(t^0)], \tag{5.3}$$

коэффициенты которого определяются из условий

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (Kx_n)(t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad t_k = \cos\frac{k\pi}{n}. \tag{5.4}$$

Нетрудно показать, что условия (5.4) эквивалентны следующей СЛАУ:

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\alpha_k = y_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{5.5}$$

где

$$d_{ik} = T_k(t_i) - T_k(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)[T_k(t) - T_k(t^0)]dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(t)U_{k-1}(t)dt, \quad y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)dt. \tag{5.6}$$

Теорема 5.1. *Если задача* (5.1)–(5.2) *имеет единственное решение* $x^* \in W_2^1(\rho)$ *при любой правой части* $y \in L_2(\rho)$, *где* $\rho(t) = (1-t)^{1/2}$, *то при всех* $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, СЛАУ* (5.5)–(5.6) *также имеет единственное решение* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. *Приближенные решения* (5.3) *сходятся в пространстве* $W_2^1(\rho)$ *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_{n-1}(x^{*'})_{L_2(\rho)} \le \|x^* - x_n\|_{W_2^1(\rho)} = O\{E_{n-1}(x^{*'})_{L_2(\rho)}\}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Пусть $Y = L_2(\rho)$, $Y_n = \mathbb{H}_{n-1} \cap Y$ и $X = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\rho) = \{x \in W_2^1(\rho);\ x(t^0) = 0\}$, $X_n = \mathbb{H}_n \cap X$ с обычными нормами. Тогда задача (5.1)–(5.2) и СЛАУ (5.5)–(5.6) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$Kx \equiv Gx + Tx = y, x \in X, \quad y \in Y, \tag{5.8}$$

$$K_n x_n \equiv G x_n + \Pi_n T x_n = \Pi_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Pi_n y \in Y_n, \tag{5.9}$$

где $\Pi_n : Y \to Y_n$ — оператор метода подобластей по системе узлов (1.2), а

$$G(x;t) = x'(t), \quad T(x;t) = a(t)x(t) + b(t)S(x;t), \quad x \in X, \tag{5.10}$$

причем

$$S(x;t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)\sqrt{1-\tau^2}}, \quad x \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\rho).$$

Известно (см., напр., [7], гл. 3, §§ 2, 5), что оператор $T : X \to Y$ является вполне непрерывным, а $G : X \to Y$ — непрерывно обратимым, причем

$$\|G\|_{X\to Y} = 1, \quad \|G^{-1}\|_{Y\to X} = 1. \tag{5.11}$$

Тогда в условиях теоремы оператор $K : X \to Y$ также непрерывно обратим.

Благодаря лемме 1.1 уравнения (5.8) и (5.9) близки в том смысле, что

$$\delta_n \equiv \|y - \Pi_n y\|_{L_2(\rho)} \le \frac{\pi}{2} E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.12}$$

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to Y} = \|T - \Pi_n T\|_{X_n\to Y} \le \varepsilon'_n, \tag{5.13}$$

где, как и в пп. 2, 3, доказывается, что

$$\varepsilon'_n = \sup_{\varphi \in TS(0,1)} \|\varphi - \Pi_n \varphi\|_{L_2(\rho)} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5.14}$$

причем $S(0,1)$ — единичная сфера пространства X с центром в нулевой точке. Из соотношений (5.10)–(5.14) и лемм 1.1, 1.3, 1.4 следует утверждение теоремы 5.1, в том числе оценки (5.7).

Теорему 5.1 несколько дополняет

Теорема 5.2. *Пусть*

$$q = (\pi/2)\left[\sqrt{\pi/2}\|a\|_C + \|b\|_C\right] < 1. \tag{5.15}$$

Тогда как задача (5.1)–(5.2), *так и СЛАУ* (5.5)–(5.6) *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *однозначно разрешимы, а погрешность метода может быть оценена неравенствами*

$$E_{n-1}(x^{*'})_{L_2(\rho)} \le \|x^* - x_n\|_{W_2^1(\rho)} \le \frac{\pi}{2(1-q)} E_{n-1}(x^{*'})_{L_2(\rho)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $E_{n-1}(x^{*'})_{L_2(\rho)} \le E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)} + E_{n-1}(Tx^*)_{L_2(\rho)}$.

Доказательство. Из (5.8), (5.10) для любой $x \in X$ находим

$$\|Tx\|_Y \le \|ax\|_Y + \|bSx\|_Y \le \|a\|_C\|x\|_Y + \|b\|_C\|Sx\|_Y, \tag{5.16}$$

где $\|S\|_{X\to Y} \le 1$ (см. [7], с. 206). Поэтому

$$\|Tx\|_Y \le \|a\|_C\|x\|_Y + \|b\|_C\|x\|_X, \quad x \in X. \tag{5.17}$$

Из тождества $x(t) = \int\limits_{t^0}^{t} x'(\tau)d\tau$, $x \in X$, легко получаем неравенство

$$\|x\|_Y \le \sqrt{\pi/2}\|x\|_X, \quad x \in X. \tag{5.18}$$

Из (5.15)–(5.18) следует

$$\|T\|_{X\to Y} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|a\|_C + \|b\|_C < \frac{2}{\pi}. \tag{5.19}$$

В силу (5.8), (5.11) и (5.19) оператор $K : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \le \frac{\pi}{\pi-2} < \infty. \tag{5.20}$$

Из (5.9), (5.15), (5.19) и леммы 1.1 находим

$$\|\Pi_n T\|_{X_n\to Y_n} \le q < 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.21}$$

Из (5.9), (5.21) и (5.11) легко получаем, что операторы $K_n : X_n \to Y_n$ непрерывно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|K_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n} \le \frac{1}{1-q} < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.22}$$

В силу (5.20) и (5.22) первая часть теоремы доказана; вторая часть теоремы легко выводится из лемм 1.4, 1.1 и соотношений (5.10), (5.11), (5.22).

Литература

1. Биценко К.Б., Граммель Р. *Техническая динамика.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 900 с.
2. Керге Р.Г. *О сходимости и устойчивости метода подобластей*: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Тарту, 1979. – 10 с.
3. Ермолаева Л.Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегродифференциальных уравнений методом подобластей*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 154 с.
4. *Осциллирующие функции и некоторые их приложения* / Воронина Н.В., Мельник С.И., Шелепень С.А. и др. – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 1975. – 230 с.
5. *Осциллирующие функции и некоторые их приложения* / Воронина Н.В., Фоминых Ю.Ф., Шелепень С.А. и др. – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 1983. – 61 с.
6. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
7. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
8. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Один новый полиномиальный оператор и его приложения* // Тр. Международн. научн. конф. по теории приближения функций. – М.: Наука, 1987. – С. 98–100.
9. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С.3–18.
10. Габдулхаев Б.Г. *О погрешности численного дифференцирования* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Школы-конференции, посвященной 130-летию Д.Ф. Егорова. Казань, 1999 г. – Казань: Казанск. матем. об-во, 1999. – С. 61–62.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
12. Haverkampf R. *Approximationsfehler der Ableitung* // J.Approxim. Theory. – 1980. – V. 80. – № 3. – P. 3–12.
13. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* – М.: Наука, 1965. – 407 с.
14. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.
15. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.

16. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.
17. Пыхтеев Г.Н. *Некоторые методы решения одного нелинейного интегродифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости* // Прикл. механ. и техн. физ. – 1966. – № 2. – С. 72–86.
18. Шокамолов И.Ш. *Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида и решение одного сингулярного интегродифференциального уравнения с приложением к задачам теплопроводности*: Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Минск, 1973. – 12 с.
19. Мелешко И.Н. *Приближенные методы решения краевых задач теории теплопроводности на основе специальных формул для интегралов*: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Минск, 2002. – 264 с.

Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
02.10.2001