ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 512.542

Н.Г. ЖЕВНОВА, А.Н. СКИБА

p-НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ p-НАСЫЩЕННЫМИ ПОДФОРМАЦИЯМИ

Все рассматриваемые в данной работе группы предполагаются конечными.

Формация групп $\mathfrak{F}$ называется p-насыщенной [1], если всегда из $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq O_p(G) \cap \Phi(G)$, следует $G \in \mathfrak{F}$. Значение понятия p-насыщенной формации связано прежде всего со следующим важным наблюдением Л.А.Шеметкова [2]: если произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ насыщено, то формация $\mathfrak{H}$ p-насыщена для всех $p \in \pi(\mathfrak{H}) \setminus \pi(\mathfrak{M})$.

В работе [3] были найдены различные характеризации классов p-насыщенных формаций. В частности, там было доказано, что формация $\mathfrak{F}$ p-насыщенна только тогда, когда $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(p) \subseteq \mathfrak{F}$, где

$$\mathfrak{F}(p) = \begin{cases} \operatorname{form}(G/F_p(G)|G \in \mathfrak{F}) & \text{при } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing & \text{при } p \in \pi'(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Основываясь на этом результате, в данной работе мы опишем p-насыщенные формации, у которых решетка p-насыщенных подформаций булева.

Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется дополняемой в $\mathfrak{F}$ [4], если $\mathfrak{M}$ дополняема в решетке подформаций формации $\mathfrak{F}$, т. е. если в $\mathfrak{F}$ имеется такая подформация $\mathfrak{H}$, что

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1), \quad \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H} = \operatorname{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{F}.$$

Отметим, что изучение формаций с системами дополняемых насыщенных подформаций проводилось в работах [5]–[7].

Будем базироваться на терминологии, принятой в [8], [9], [11]. Символом $\operatorname{lform}_p \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех p-насыщенных формаций, которые содержат класс групп $\mathfrak{X}$. Для любого класса групп $\mathfrak{X}$ через $\mathfrak{X}/O_p(\mathfrak{X})$ будем обозначать $\{A/O_p(A)|A \in \mathfrak{X}\}$.

Лемма 1. [10]. *Для любого класса групп $\mathfrak{X}$ имеет место* $\operatorname{lform}_p \mathfrak{X} = \operatorname{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{N}_p\mathfrak{X}(p))$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — подформации формации $\mathfrak{F}$, и пусть для любого $p \in \pi(\mathfrak{M})$ формация $\mathfrak{F}$ p-насыщена. Тогда, если формация $\mathfrak{M}$ наследственна и $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, то $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, что $p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H})$. Тогда в $\mathfrak{H}$ найдется такая неединичная группа G, у которой некоторый главный фактор H/K имеет порядок, делящийся на p. Пусть $T = G/K$ и $L_1 \times \cdots \times L_{i-1} \times L_i \times L_{i+1} \times \cdots \times L_t$ — цоколь группы T, где L_j — минимальная нормальная в T подгруппа $(1 \leq j \leq t)$ и $L_i = H/K$. Обозначим через M нормальную подгруппу группы T наибольшего порядка среди тех ее нормальных подгрупп, которые содержат подгруппу $L_1 \times \cdots \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times \cdots \times L_t$, но не содержат подгруппу L_i. Тогда группа $A = T/M$, очевидно, монолитична, и ее монолит совпадает с L_iM/M. Так как $L_iM/M \simeq H/K$, то $O_{p'}(A) = 1$.

Пусть V — тривиальный неприводимый F_pA-модуль, и P_v — такой неразложимый проективный F_pA-модуль, что $V \simeq P_v/P_vJ$, где J — радикал Джекобсона групповой алгебры F_pA. Пусть $G = [P_v]A$, $M = P_vJ$. Понятно, что $M \subseteq \Phi(G) \cap O_p(G)$.

Пусть L — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $L \nsubseteq P_v$, то $L \subseteq C_G(P_v)$ и P_vL/P_v — минимальная нормальная подгруппа в $G/P_v \simeq A$. Значит, $L \simeq H/K$, т.е. p делит $|L|$. Пусть $C = C_G(P_v)$. Тогда $P_v \subset C$. Значит,

$$C = C \cap P_vA = P_v(C \cap A).$$

Отсюда следует, что $C \cap A \neq 1$. Но согласно теореме Вильямса (см. [11], с. 195)

$$C_A(P_v) = O_{p'}(C_A(V)) = O_{p'}(A) = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $L \subseteq P_v$. Таким образом, L является неприводимым F_pA-модулем. Хорошо известно, что в P_v имеется единственный неприводимый F_pA-подмодуль, который изоморфен F_pA-модулю V. Кроме того, P_v имеет единственный неприводимый фактор-модуль P_v/M, который также изоморфен V. Значит, $|P_v/M| = |L| = |V| = p$ и $L \subseteq Z(G)$. Заметим, что

$$G/M = (P_v/M)(MA/M) = (P_v/M) \times (MA/M).$$

Так как $p \in \pi(\mathfrak{M})$ и формация $\mathfrak{M}$ по условию наследственна, то $P_v/M \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, очевидно, $MA/M \simeq A \in \mathfrak{F}$. Значит, $G/M \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что формация $\mathfrak{F}$ по условию p-насыщена и $M \subseteq \Phi(G) \cap O_p(G)$, имеем $G \in \mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Заметим, что $G \notin \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$. Действительно, если $G \in \mathfrak{M}$, то $G/P_v \simeq A \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Противоречие. Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда согласно лемме 3.32 [9]

$$L \simeq [L](G/C_G(L)) \in \mathrm{form}\, G \subseteq \mathfrak{H}.$$

Но $L \in \mathfrak{M}$. Значит, $L \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Вновь полученное противоречие показывает, что $G \notin \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$.

Понятно, что класс $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$ — полуформация. Значит, согласно теореме 3.11 [9] в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, M, $N_1, \ldots, N_t$, $M_1, \ldots, M_t$ $(t \geq 2)$, что будут выполняться следующие условия:

1) $G \simeq H/N$ и $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;
2) $N_1 \cap \cdots \cap N_t = 1$;
3) группа H/N_i монолитична, $\mathrm{Soc}(H/N_i) = M_i/N_i$ и $H/N_i \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$, $i = 1, \ldots, t$;
4) $L_i = N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap M_i \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_t$ — минимальная нормальная подгруппа в H, причем $L_i \nsubseteq N$ и $M_i = N_iL_i$.

Если при всех $i \in \{1, \ldots, t\}$ фактор-группа H/N_i принадлежит $\mathfrak{M}$, то $H \in \mathfrak{M}$ ввиду условия 2), и поэтому $G \in \mathfrak{M}$, что невозможно. Таким образом, найдется такое i, что $H/N_i \in \mathfrak{H}$. Из условия 4) следует, что H-главные факторы NL_i/N и M_i/N_i H-изоморфны, и поэтому их централизаторы в H совпадают. Но ввиду условия 1) фактор NL_i/N централен.

Таким образом,

$$M_i/N_i \simeq [M_i/N_i]((H/N_i)/C_{H/N_i}(M_i/N_i)) = [M_i/N_i]((H/N_i)/(H/N_i)) \in \mathrm{form}(H/N_i) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Итак, $M_i/N_i \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Полученное противоречие показывает, что $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. $\square$

Лемма 3. [12]. *Пусть G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_p}$, где R — неабелева pd-группа. Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\, G$ имеет единственную максимальную p-насыщенную подформацию, совпадающую с формацией $\mathfrak{N}_p$.*

Лемма 4. [13]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая произвольная формация и пусть $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$у каждой группы $G \in \mathfrak{x}$ не имеет фраттиниевых G-главных факторов. Тогда, если G — монолитическая группа из $\mathrm{form}\, \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, то $G \in Q(\mathfrak{X})$.*

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\, \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый набор простых групп, не содержащий неабелевых простых pd-групп. Тогда, если A — простая группа из $\mathfrak{F}$, то A изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $p \notin \pi(\mathfrak{X})$. Тогда $A \in \mathrm{lform}_p \mathfrak{X} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. По лемме 4 имеем $A \in Q(\mathfrak{X}) = (\mathfrak{X})$.

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{X})$. Тогда $A \in \mathrm{lform}_p \mathfrak{X} = \mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{N}_p)$ в силу леммы 1. Если $|A| = p$, то, т. к. $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}$ не имеет неабелевых простых pd-групп, $A \in (\mathfrak{X})$. Пусть $|A| \neq p$. Следовательно, $A \in \mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{N}_p) \setminus \mathfrak{N}_p$. По лемме 4 имеем $A \in Q(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{N}_p)$. Так как $|A| \neq p$, то $A \in Q(\mathfrak{X}) = (\mathfrak{X})$. $\square$

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\alpha(\mathfrak{X})$ будем обозначать класс всех тех групп, которые изоморфны главным факторам групп из $\mathfrak{X}$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 6. *Пусть* $\alpha(\mathfrak{M}) \cap \alpha(\mathfrak{H}) = \varnothing$. *Тогда* $\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация с $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и подформация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \times (\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F})$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{N}_p$ дополняема в $\mathfrak{F}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется такая формация $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{H} = (1)$. По лемме 2 $\pi(\mathfrak{N}_p) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Следовательно, $\alpha(\mathfrak{M}) \cap \alpha(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Применяя лемму 6, имеем

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{N}_p \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p \times (\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}).$$

Обратное включение очевидно. $\square$

Из леммы 7 следует

Лемма 8. *Если $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация, $p \in \pi(\mathfrak{F})$, формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в $\mathfrak{F}$ и A — простая pd-группа из $\mathfrak{F}$, то $|A| = p$.*

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется однопорожденной p-насыщенной формацией [3], если $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p G$ для некоторой группы G.

Лемма 9. *В каждой однопорожденной p-насыщенной формации имеется лишь конечное число минимальных p-насыщенных подформаций.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p G$ для некоторой группы G, $\mathfrak{M}$ — минимальная p-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}_p$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\, A$, где A — некоторая простая p'-группа. Если A — абелева группа, то $|A| = g \in P \setminus \{p\}$. Так как $A \in \mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p G$, то $g \in \pi(\mathfrak{F}) = \pi(G)$. Но $\pi(G)$ — конечное множество. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное число минимальных p-насыщенных абелевых подформаций.

Пусть A — неабелева группа. Тогда

$$A \in \mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p G = \mathrm{form}(\{G\} \cup \mathfrak{N}_p \,\mathrm{form}(G/F_p(G))).$$

Значит, по лемме 3.43 [9] A является гомоморфным образом одной из групп множества $\{G\} \cup \mathfrak{N}_p \,\mathrm{form}(G/F_p(G))$. Если $A \in Q(G)$, то A изоморфна некоторому главному фактору группы G. Пусть $A \in Q(\mathfrak{N}_p \,\mathrm{form}(G/F_p(G)))$. Тогда $A \in \mathfrak{N}_p \,\mathrm{form}(G/F_p(G))$ и поэтому $A^{\mathrm{form}(G/F_p(G))} \in \mathfrak{N}_p$. Так как A — простая p'-группа, то $A^{\mathrm{form}(G/F_p(G))} = 1$. Следовательно, $A \in \mathrm{form}(G/F_p(G))$. Таким образом, если A является гомоморфным образом одной из групп множества $\{G\} \cup \mathfrak{N}_p \,\mathrm{form}(G/F_p(G))$, то A изоморфна некоторому главному фактору группы G. Но G — конечная группа. Следовательно, G имеет конечное число главных факторов. Значит, в $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p G$ имеется лишь конечное число и минимальных p-насыщенных неабелевых подформаций. $\square$

Пусть $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ — некоторая система классов групп. Тогда совокупность всех групп G, представимых в виде $G = A_{i_i} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_t}$ (при некотором натуральном $t = t(G)$), где $A_{i_j} \in \mathfrak{F}_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, t)$, назовем прямым произведением классов $\mathfrak{F}_i$. Отметим, что впервые такая конструкция возникла в работе [14] (хотя сам термин “прямое произведение классов групп” там не был введен).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F}$ *есть прямое произведение своих минимальных p-насыщенных подформаций;*

2) *решетка p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева;*

3) *в $\mathfrak{F}$ дополняемы все минимальные p-насыщенные подформации.*

Доказательство. Пусть имеет место 1). Покажем прежде, что формация $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый набор простых групп, причем все pd-группы из $\mathfrak{X}$ имеют простой порядок. Пусть $\mathfrak{X}$ — набор всех простых групп из $\mathfrak{F}$. Ясно, что $\mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что обратное включение неверно, и пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$. Тогда A — монолитическая группа. Значит, ввиду условия 1) A — либо простая p'-группа из $(\mathfrak{X})$, либо некоторая p-группа. В первом случае $A \in (\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$. Противоречие. Во втором случае имеет место включение $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$. Следовательно, $A \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$. Кроме того, ввиду условия 1) все простые pd-группы из $\mathfrak{X}$ имеют простой порядок.

Перейдем непосредственно к доказательству 2). Докажем вначале, что в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая p-насыщенная подформация. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная p-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, то дополнением к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ является формация (1). Итак, мы можем считать, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ — множество всех тех простых групп из $\mathfrak{X}$, которые принадлежат формации $\mathfrak{M}$. Понятно, что $\mathfrak{X}_1 \neq \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{X}_2$ — дополнение к $\mathfrak{X}_1$ в $(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}_2$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Пусть $p \notin \pi(\mathfrak{X})$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Допустим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \neq (1)$ и пусть A — некоторая простая группа из $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Тогда по лемме 5

$$A \in (\mathfrak{X}_1) \cap (\mathfrak{X}_2) = \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2 = \varnothing.$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$.

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{X})$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Так как $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то

$$\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{lform}_p(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{F}.$$

С другой стороны, используя лемму 1, имеем

$$\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X} = \mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{N}_p).$$

Но $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$ и, кроме того, поскольку $p \in \pi(\mathfrak{X})$, то либо $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, либо $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$. Следовательно,

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{N}_p) \subseteq \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Кроме того, согласно лемме 5 $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Итак, произвольная p-насыщенная подформация $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ дополняема в $\mathfrak{F}$ некоторой подформацией $\mathfrak{H}$, причем (ввиду выбора дополнения) $\mathfrak{H}$ — p-насыщенная формация. Кроме того,

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{lform}_p(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Таким образом, решетка p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ является решеткой с дополнениями. Нулем этой решетки является формация (1), единицей — формация $\mathfrak{F}$.

Для доказательства дистрибутивности решетки p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ рассмотрим три произвольные p-насыщенные подформации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{R}$ из $\mathfrak{F}$.

Ясно, что

$$\mathrm{lform}_p((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})) \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathrm{lform}_p(\mathfrak{R} \cup \mathfrak{H}).$$

Предположим, что обратное включение неверно, и пусть A — группа минимального порядка из

$$(\mathfrak{M} \cap \mathrm{lform}_p(\mathfrak{R} \cup \mathfrak{H})) \setminus \mathrm{lform}_p((\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \cup (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})).$$

Тогда группа A монолитическая. Ввиду условия 1) A — либо простая p'-группа, либо некоторая p-группа.

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{X})$, A — некоторая p-группа с монолитом R. Тогда $A/R \in \mathrm{lform}_p((\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}))$ и, следовательно, A/R является p'-группой. Значит, A/R — единичная группа, т.е. $R = A$. Таким образом, если A — некоторая p-группа, то она также проста.

Пусть $A \in \mathfrak{N}_p$. С учетом того, что $A \in \mathfrak{M}\cap \mathrm{lform}_p(\mathfrak{R}\cup\mathfrak{H})$, имеем $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{R}\cup\mathfrak{H})$. Тогда $\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H})$. Следовательно, $A \in \mathrm{lform}_p((\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}))$. Противоречие.

Пусть $A \notin \mathfrak{N}_p$. Тогда $A \in \mathrm{form}(\mathfrak{R}\cup\mathfrak{H}\cup\mathfrak{N}_p)\setminus\mathfrak{N}_p$. Легко видеть, что ввиду условия 1) у каждой группы из $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{N}_p$-корадикал не имеет фраттиниевых главных факторов. Значит, по лемме 4 A принадлежит по крайней мере одной из формаций $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{H}$. Но тогда A принадлежит по крайней мере одной из формаций $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}$, а значит, она принадлежит и формации $\mathrm{lform}_p((\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}))$. Полученное противоречие показывает, что

$$\mathfrak{M}\cap \mathrm{lform}_p(\mathfrak{R}\cup\mathfrak{H}) = \mathrm{lform}_p((\mathfrak{M}\cap\mathfrak{R})\cup(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H})).$$

Таким образом, если относительно формации $\mathfrak{F}$ выполняется условие 1), то решетка p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева. Мы доказали справедливость утверждения 2).

Пусть теперь имеет место 2). Докажем, что при таком предположении в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая p-насыщенная подформация. Для этого достаточно показать, что формация $\mathfrak{F}$ представима в виде $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый набор простых групп, не содержащий неабелевых простых pd-групп. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех простых групп из $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$, то согласно нашему предположению в $\mathfrak{F}$ найдется такая p-насыщенная подформация $\mathfrak{H}$, что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H}), \quad \mathfrak{M}\cap\mathfrak{H} = (1).$$

Это, в частности, означает, что $\mathfrak{H} \neq (1)$. Пусть A — некоторая простая группа из $\mathfrak{H}$. Тогда $A \in \mathfrak{X}\cap\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\cap\mathfrak{H} = (1)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\,\mathfrak{X}$.

Допустим, что в $\mathfrak{F}$ имеется неабелева простая pd-группа A. Тогда согласно лемме 3 в формации $\mathrm{lform}_p\,A$ имеется единственная максимальная p-насыщенная подформация $\mathfrak{N}_p$. Но согласно условию 2) в $\mathfrak{F}$ имеется такая p-насыщенная подформация $\mathfrak{H}$, что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p(\mathfrak{N}_p\cup\mathfrak{H}), \quad \mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{H} = (1).$$

Поскольку решетка p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева, то она модулярна. Следовательно, имеем

$$\mathrm{lform}_p\,A = \mathrm{lform}_p\,A\cap\mathrm{lform}_p(\mathfrak{N}_p\cup\mathfrak{H}) = \mathrm{lform}_p(\mathfrak{N}_p\cup(\mathrm{lform}_p\,A\cap\mathfrak{H})).$$

Если $\mathrm{lform}_p\,A\cap\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ — собственная подформация формации $\mathrm{lform}_p\,A$, то $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{H} = (1)$. Значит,

$$\mathrm{lform}_p\,A = \mathrm{lform}_p(\mathfrak{N}_p\cup(1)) = \mathfrak{N}_p.$$

Противоречие. Пусть $\mathfrak{R} = \mathrm{lform}_p\,A$. Тогда $\mathrm{lform}_p\,A \subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{N}_p\cap\mathfrak{H} = (1)$. Противоречие. Таким образом, если относительно формации $\mathfrak{F}$ выполняется условие 2), то в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая p-насыщенная подформация. Тем самым доказано утверждение 3).

Пусть теперь имеет место 3). Покажем, что тогда справедливо 1). Прежде установим, что для любой p-насыщенной подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ с конечным числом минимальных p-насыщенных подформаций имеет место $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M}_1\times\cdots\times\mathfrak{M}_t$ для некоторого набора минимальных p-насыщенных формаций $\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_t$.

Применим индукцию по числу минимальных p-насыщенных подформаций, содержащихся в $\mathfrak{F}_1$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная минимальная p-насыщенная подформация из $\mathfrak{F}_1$. По условию в $\mathfrak{F}$ найдется такая подформация $\mathfrak{R}$, что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{R}), \quad \mathfrak{M}\cap\mathfrak{R} = (1).$$

Ввиду следствия 9.22 [9] имеет место

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\cap(\mathfrak{M}\vee\mathfrak{R}) = \mathfrak{M}\vee(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{R}).$$

Значит, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}_1$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ формацию $\mathrm{lform}_p(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})$. Покажем, что $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Возможны два случая: 1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$ и 2) $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}_p$. В первом случае по лемме 2 $p \notin \pi(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})$. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \nsubseteq \mathfrak{H}$. Во втором случае формация $\mathfrak{M}$ имеет вид $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\, A$ для некоторой простой p'-группы A. Допустим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Если A — абелева простая p'-группа, то $|A| = g \in P \setminus \{p\}$. Так как

$$A \in \mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{H} = \mathrm{lform}_p(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}),$$

то $g \in \pi(\mathfrak{H}) = \pi(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})$. Но $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}) = (1)$. Противоречие. Пусть теперь A — неабелева простая p'-группа. Имеем

$$A \in \mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{H} = \mathrm{lform}_p(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}) = \mathrm{form}((\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}) \cup \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})(p)).$$

По лемме 3.43 из [9] A является голоморфным образом одной из групп множества $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}) \cup \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})(p)$. Так как $A \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}) = (1)$, то $A \notin \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}$. Пусть $A \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})(p)$. Следовательно, $A^{(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})(p)} \in \mathfrak{N}_p$. Так как A — простая p'-группа, то $A^{(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})(p)} = 1$. Значит, $A \in (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R})(p) \subseteq \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}$, что невозможно в силу равенства $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{R}) = (1)$. Таким образом, $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{H}$. Число минимальных p-насыщенных подформаций в формации $\mathfrak{H}$ меньше, чем в $\mathfrak{F}_1$. Следовательно, по индукции $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \cdots \times \mathfrak{H}_t$ для некоторого набора минимальных p-насыщенных формаций $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_t$. Так как $\mathfrak{F}_1 = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\alpha(\mathfrak{M}) \cap \alpha(\mathfrak{H}) = \varnothing$, то по лемме 6

$$\mathfrak{F}_1 = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}_1 \times \cdots \times \mathfrak{H}_t.$$

Для любой группы G формации $\mathfrak{F}$ имеет место $G \in \mathrm{lform}_p\, G \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 9 $\mathrm{lform}_p\, G$ имеет конечное число минимальных p-насыщенных подформаций. Значит, как показано выше, $\mathrm{lform}_p\, G = \mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_t$ для некоторого набора минимальных p-насыщенных формаций $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$. Следовательно, $G = P \times A_1 \times \cdots \times A_t$, где P — некоторая p-группа, A_i — простая p'-группа, $i = 1, \ldots, t$. Таким образом, утверждение 1) справедливо. □

Заметим, что при доказательстве теоремы 1, по существу, доказана и

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *в $\mathfrak{F}$ дополняемы все p-насыщенные подформации;*
2) *$\mathfrak{F} = \mathrm{lform}_p\, \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый набор простых групп, причем все pd-группы из $\mathfrak{X}$ имеют простой порядок.*

Рассмотрим теперь некоторые следствия, установленные из полученных результатов.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:

1) в $\mathfrak{F}$ дополняемы все минимальные p-насыщенные подформации;
2) каждая группа из $\mathfrak{F}$, не являющаяся p-группой, имеет вид $A_1 \times \cdots \times A_t \times P$, где A_i — простая p'-группа ($i = 1, \ldots, t$), P — некоторая p-группа.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — p-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:

1) в $\mathfrak{F}$ дополняемы все минимальные p-насыщенные подформации;
2) в $\mathfrak{F}$ дополняемы все p-насыщенные подформации;
3) решетка p-насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ булева.

Следствие 3. [15], [5]. Тогда и только тогда каждая подформация формации $\mathfrak{F}$ дополняема в $\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — набор простых групп.

Доказательство. Пусть каждая подформация формации $\mathfrak{F}$ дополняема в $\mathfrak{F}$. Это условие, очевидно, переносится на подформации вида $\mathrm{form}\, G$. Но каждая подформация из $\mathrm{form}\, G$ p-насыщена для всех $p \in \pi'(G)$. Значит, по теореме 2 $\mathrm{form}\, G = \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$ для некоторого набора простых групп $\mathfrak{X}$. Следовательно, и $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$ для набора $\mathfrak{X}$ всех своих простых групп.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ для некоторого набора простых групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ — произвольная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathrm{form}(\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{M})$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Действительно

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathrm{form}(\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{M})).$$

Пусть $\mathfrak{M} \cap \mathrm{form}(\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{M}) \neq (1)$ и A — некоторая простая группа из $\mathfrak{M} \cap \mathrm{form}(\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{M})$. Тогда по теореме 3.37 [9] $A \in (\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{M}) = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{form}(\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{M})$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. $\square$

Следствие 4. [5], [6]. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда и только тогда локальная формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна, когда в $\mathfrak{F}$ дополняема каждая минимальная локальная подформация.

Доказательство. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ — нильпотентные локальные формации и $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то, очевидно, $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M})}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Если же у локальной формации $\mathfrak{F}$ дополняема подформация $\mathfrak{N}_p$, то по лемме 7 $\mathfrak{F}$ — p-разложимая формация. $\square$

Литература

1. D'Arcy P. *On formations of finite groups* // Arch. Math. – 1974. – Bd. 25. – № 1. – S.3-7.
2. Шеметков Л.А. *О произведении формаций* // ДАН БССР. – 1984. – Т. 28. – № 2. – С.101–103.
3. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *О частично локальных формациях* // ДАН Беларуси. – 1995. – Т. 39. – № 3. – С.17–19.
4. Скиба А.Н. *О формациях с заданными системами подформаций* // Подгрупповое строение конечных групп. – Минск, 1981. – С.155–180.
5. Ведерников В.А. *Вполне факторизуемые формации конечных групп* // Вопр. алгебры. – Минск, 1990. – Вып. 5. – С.28–34.
6. Скиба А.Н. *О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С.75–80.
7. Аниськов В.В., Скиба А.Н. *О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями* // Препринт. ГГУ. – Гомель, 1993. – № 5. – 10 с.
8. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп.* – М.: Наука, 1978. – 271 с.
9. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем.* – М.: Наука, 1989. – 256 с.
10. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Новые способы задания локальных формаций и локальных классов Фиттинга* // Алгебра и кибернетика. Материалы международн. конф. посвящ. 90-летию С.А.Чунихина. Тез. докл. – Гомель, 1995. – Ч. 1. – С.120.
11. Huppert B., Blackburn N. *Finite groups.* II. – Berlin e.a.: Springer, 1982. – 531 p.
12. Джарадин Джехад. *Минимальные p-насыщенные ненильпотентные формации* // Вопр. алгебры. – Гомель, 1995. – Вып. 8. – С.59–64.
13. Скиба А.Н. *О формациях, порожденных классами групп* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1981. – № 3. – С.33–39.
14. Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н. *О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры.* – Киев, 1993. – С.27–54.
15. Эйдинов М.И. *О формациях с дополняемыми подформациями* // Тез. докл. IX Всесоюзн. симпозиум по теории групп. – М., 1984. – С.101.

Гомельский государственный университет

Поступила
03.10.1995