ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 517.518

Н.А. ИЛЬЯСОВ

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ ФУРЬЕ

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть $L_p(\mathbb{T})$ — пространство всех измеримых 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \Big\{\pi^{-1}\int\limits_{\mathbb{T}}|f(x)|^p dx\Big\}^{1/p} < \infty$, $1 \le p < \infty$, $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$; $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ — соответствующее пространство всех непрерывных функций, $\|f\|_\infty \equiv \|f\| = \max\{|f(x)|;\, x \in \mathbb{T}\}$; $\omega_k(f;\delta)$ — модуль гладкости k-го порядка функции $f \in C(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\omega_k(f;\delta) = \sup\{\|\triangle_h^k f(\cdot)\|;\ h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\}, \quad \delta > 0,$$

где $\triangle_h^k f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu} f(x+\nu h)$, $x \in \mathbb{R}$.

Для функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ с рядом Фурье–Лебега

$$\sigma(f;x) = (1/2)a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx) \tag{1}$$

обозначим ($r \in \mathbb{Z}_+$) $\rho_n^{(r)}(f) = \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^r(|a_\nu(f)| + |b_\nu(f)|)$, $\rho_n^{(0)}(f) \equiv \rho_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$; очевидно, если $\rho_0^{(r)}(f) < \infty$, то $\rho_n^{(r)}(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$. Кроме того, ясно, что из условия $\rho_0^{(r)}(f) < \infty$ следует по известному признаку Вейерштрасса абсолютная и равномерная сходимость всюду на $\mathbb{T}$ r раз продифференцированного ряда (1); следовательно, в этом случае $f \sim \psi \in C^r(\mathbb{T})$, т. е. f почти всюду совпадает с некоторой функцией $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ при $p < \infty$ и $f = \psi \in C^r(\mathbb{T})$ при $p = \infty$, и справедлива оценка $\|\psi^{(r)}(\cdot) - S_n^{(r)}(f;\cdot)\| \le \rho_n^{(r)}(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $S_n(f;x)$ — частная сумма ряда (1) порядка $n \in \mathbb{Z}_+$, $C^r(\mathbb{T})$ — класс функций $\psi \in C(\mathbb{T})$, имеющих при $r > 0$ производную r-го порядка $\psi^{(r)} \in C(\mathbb{T})$, а при $r = 0$ $\psi^{(0)} \equiv \psi$, $C^0(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$. С другой стороны, известно, что если ряд (1) сходится абсолютно на множестве положительной меры, то $\rho_0(f) < \infty$ ([1], с. 173, теорема Лузина–Данжуа) и тогда ряд (1) сходится абсолютно (и равномерно) всюду на $\mathbb{T}$ к некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T})$, причем $\|\psi(\cdot) - S_n(f;\cdot)\| \le \rho_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$.

В статье приводится решение следующей задачи: найти точный порядок убывания $\omega_k(\psi^{(r)};\delta)$ на классе функций $f \in L_p(\mathbb{T})$ с заданной мажорантой последовательности

$$\{\rho_n(f)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \text{где } 1 \le p \le \infty,\ k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Первые результаты в этом направлении, по-видимому, получил Г. Лоренц ([2]; также [1], с. 209–210), доказавший, в частности, для случая $r = 0$, $k = 1$ и $p = \infty$ следующее утверждение ([2], с. 140, п. а) теоремы 2 в случае $p = 1$; с. 141, теорема 2* в случае $p = 1$, $\alpha = 1$): пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и $\rho_{n-1}(f) = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, где $\alpha \in (0,1]$; тогда $\omega_1(f;\delta) = O(\delta^\alpha)$, $\delta \in (0,\pi]$, при $0 < \alpha < 1$ и $\omega_1(f;\delta) = O(\delta\ln(\pi e/\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$, при $\alpha = 1$. В ([2], с. 141) отмечено, что для функции $g(x;\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(\alpha+1)}\sin nx$ с $\rho_{n-1}(g) = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, при $0 < \alpha < 1$ имеет место оценка $\delta^\alpha = O(\omega_1(g;\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$; кроме того, в ([2], с. 142) показано, что для функции $\varphi(x) =$

$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 4^{-\nu}\cos 4^{\nu}x$ с $\rho_{n-1}(\varphi) = O(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$, справедлива оценка $\delta\ln(\pi e/\delta) = O(\omega_1(\varphi;\delta))$, $\delta \in (0,\pi]$. Приведенные оценки снизу модулей непрерывности функций $g(x;\alpha)$ и $\varphi(x)$ показывают, что сформулированные выше результаты о поведении $\omega_1(f;\delta)$ на классах функций $f \in C(\mathbb{T})$ с $\rho_{n-1}(f) = O(n^{-\alpha})$, где $0 < \alpha \le 1$, являются точными в смысле порядка.

Обозначим через M_0 класс всех числовых последовательностей $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию: $0 < \lambda_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$. Для заданных $\lambda \in M_0$ и $p \in [1,\infty]$ положим

$$A_p[\lambda] = \{f \in L_p(\mathbb{T});\ \rho_{n-1}(f) \le \lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in M_0$, тогда*[1]

$$\sup\{\omega_k(\psi;\pi/n);\ f \in A_p[\lambda]\} \underset{(k)}{\asymp} n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\lambda_\nu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $1 \le p \le \infty$, $k,r \in \mathbb{N}$, $\lambda \in M_0$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\lambda_n < +\infty, \tag{3}$$

тогда

$$\sup\{\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n);\ f \in A_p[\lambda]\} \underset{(k,r)}{\asymp} \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\lambda_\nu + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\lambda_\nu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Замечание 1. В формулировках теорем 1 и 2 ψ обозначает соответствующую функцию из $C^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, почти всюду совпадающую с заданной $f \in A_p[\lambda]$, существование которой обеспечивается условием $\rho_0(f) < \infty$ в случае $r = 0$ и условием (3) в случае $r > 0$.

Следствие 1. Пусть $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \alpha \le k$, $\lambda_n = (\pi/n)^{r+\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $\sup\{\omega_k(\psi^{(r)};\delta);\ f \in A_p[\lambda]\} \underset{(k,r,\alpha)}{\asymp} \{\delta^\alpha$ при $0 < \alpha < k$; $\delta^k\ln(\pi e/\delta)$ при $\alpha = k\}$, $\delta \in (0,\pi]$.

Следствие 2. Пусть $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_n = (\pi/n)^{r+k}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $\sup\{\omega_{k+1}(\psi^{(r)};\delta);$ $f \in A_p[\lambda]\} \underset{(k,r)}{\asymp} \delta^k$, $\delta \in (0,\pi]$.

Замечание 2. Неравенства для оценок сверху в утверждениях (2) и (4) (см. ниже предложения 1 и 2 в п. 3) можно также вывести в качестве следствий из соответствующих обратных теорем теории приближений непрерывных периодических функций ([3], с. 234, теорема 8; с. 238, теорема 11) с помощью очевидной оценки $E_n(\psi) \le \rho_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $E_n(\psi)$ — наилучшее равномерное приближение функции $\psi \in C(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами порядка $\le n \in \mathbb{Z}_+$. Из этой же оценки следует, что при любой последовательности $\lambda \in M_0$ имеет место включение (в смысле, указанном в замечании 1) $A_p[\lambda] \subset E[\lambda] \equiv \{\psi \in C(\mathbb{T}) : E_{n-1}(\psi) \le \lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Однако даже в случае $p = \infty$ шкала классов $\{A_p[\lambda]; \lambda \in M_0\}$ не сводится к шкале классов $\{E[\lambda];\ \lambda \in M_0\}$, потому что для всякой последовательности $\lambda \in M_0$, удовлетворяющей условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lambda_n = \infty$ (напр., $\lambda_n = (\ln(en))^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \le 1$), имеем $A_\infty[\lambda] \ne E[\lambda]$ (и тем более, $A_p[\lambda] \ne E[\lambda]$ при всех $1 \le p < \infty$). Действительно, для функции ([4], с. 292; [5], с. 73–74) $f(x;\lambda) \in C(\mathbb{T})$, которая является суммой равномерно сходящегося тригонометрического ряда (и, следовательно, ее ряда Фурье) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lambda_n \sin nx$, имеем $E_{n-1}(f) \le \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\| \le 2C_0\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, где

[1] $\alpha_n \underset{(k)}{\asymp} \beta_n$ означает существование таких постоянных $0 < C_1 \le C_2$, зависящих лишь от k, что $C_1\beta_n \le \alpha_n \le C_2\beta_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$C_0=\sup\limits_n\Big\|\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{-1}\sin\nu x\Big\|\le 2\sqrt{\pi}$ (напр., [6], с. 130); отсюда следует, что $(2C_0)^{-1}f(x;\lambda)\in E[\lambda]$, но т. к. $\sup\limits_n \rho_n(f)/\lambda_n=+\infty$, то $(2C_0)^{-1}f(x;\lambda)\notin A_\infty[\lambda]$.

2. Вспомогательные неравенства

Обозначим ($k\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$) $d_n^{(k+r)}(f)\equiv\rho_0^{(k+r)}(f)-\rho_n^{(k+r)}(f)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r}(|a_\nu(f)|+|b_\nu(f)|)$; отсюда $\rho_n^{(r)}(f)+n^{-k}d_n^{(k+r)}(f)=\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^r\triangle\rho_{\nu-1}(f)+n^{-k}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r}\triangle\rho_{\nu-1}(f)$, где $\triangle\rho_{\nu-1}(f)=\rho_{\nu-1}(f)-\rho_\nu(f)=|a_\nu(f)|+|b_\nu(f)|$, $\nu=1,2,\ldots$

Лемма 1. *Пусть* $1\le p\le\infty$, $f\in L_p(\mathbb{T})$, $k\in\mathbb{N}$ *и* $\rho_0(f)<\infty$, *тогда* ($n\in\mathbb{N}$)

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f)\le\rho_n(f)+n^{-k}d_n^{(k)}(f)\le kn^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f). \tag{5}$$

Доказательство. Имеем ($\rho_0(f)<\infty\Rightarrow\rho_n(f)\downarrow 0$ ($n\uparrow\infty$))

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f)=n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\sum_{\mu=\nu}^{n}\triangle\rho_{\mu-1}(f)+\rho_n(f)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}=$$

$$=n^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}\triangle\rho_{\mu-1}(f)\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{k-1}+\rho_n(f)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\le n^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^k\triangle\rho_{\mu-1}(f)+\rho_n(f)=$$

$$=\rho_n(f)+n^{-k}d_n^{(k)}(f)\le\rho_n(f)+kn^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}\Delta\rho_{\mu-1}(f)\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{k-1}=$$

$$=\rho_n(f)+k\,n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\sum_{\mu=\nu}^{n}\Delta\rho_{\mu-1}(f)=k\,n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f)+$$

$$+\rho_n(f)-k\rho_n(f)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\le k\,n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f),$$

т. к. $k\rho_n(f)n^{-k}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\ge k\rho_n(f)n^{-k}k^{-1}n^k=\rho_n(f)$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $1\le p\le\infty$, $f\in L_p(\mathbb{T})$, $r,k\in\mathbb{N}$ *и* $\rho_0^{(r)}(f)<\infty$, *тогда* ($n\in\mathbb{N}$)

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\rho_{n-1}(f)\le\rho_0^{(r)}(f)\le r\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\rho_{n-1}(f)$,

2) $\rho_n(f)\le(n+1)^{-r}\rho_n^{(r)}(f)$,

3) $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)\le\rho_n^{(r)}(f)$,

4) $\rho_n^{(r)}(f)\le r\Big\{n^r\rho_n(f)+\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)\Big\}$,

5) $\rho_n^{(r)}(f)+n^{-k}d_n^{(k+r)}(f)\le r\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)+r(k+r)n^{-k}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)$,

6) $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)+n^{-k}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)\le 2\rho_n^{(r)}(f)+n^{-k}d_n^{(k+r)}(f)$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\rho_0^{(r)}(f)<\infty$ в силу очевидного неравенства $\rho_0(f)\equiv\equiv\rho_0^{(0)}(f)\le\rho_0^{(r)}(f)$ имеем $\rho_0(f)<+\infty$, откуда $\rho_n(f)\downarrow 0$ ($n\uparrow\infty$). Учитывая последнее замечание, получаем

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\rho_{n-1}(f)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\sum\limits_{n=1}^{\nu}n^{r-1}\le\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\nu^r\Delta\rho_{\nu-1}(f)=$

$$=\rho_0^{(r)}(f)\le r\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\sum_{n=1}^{\nu}n^{r-1}=r\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)=r\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\rho_{n-1}(f),$$

2) $\rho_n(f)=\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)=\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-r}\nu^{r}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\le$

$$\le(n+1)^{-r}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r}\Delta\rho_{\nu-1}(f)=(n+1)^{-r}\rho_n^{(r)}(f),$$

3) $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)=\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\sum\limits_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta\rho_{\mu-1}(f)=$

$$=\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\Delta\rho_{\mu-1}(f)\sum_{\nu=n+1}^{\mu}\nu^{r-1}\le\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{r}\Delta\rho_{\mu-1}(f)=\rho_n^{(r)}(f),$$

4) $\rho_n^{(r)}(f)=\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\le r\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\mu^{r-1}=$

$$=r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{r-1}+r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\sum_{\mu=n+1}^{\nu}\mu^{r-1}=$$

$$=r\rho_n(f)\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{r-1}+r\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{r-1}\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\Delta\rho_{\nu-1}(f)\le r\Big\{n^{r}\rho_n(f)+\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{r-1}\rho_{\mu-1}(f)\Big\}.$$

5) В силу п. 4) леммы и правой оценки в (5) имеем

$$\rho_n^{(r)}(f)+n^{-k}d_n^{(k+r)}(f)\le r\Big\{n^{r}\rho_n(f)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)\Big\}+$$

$$+(k+r)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)-n^{r}\rho_n(f)=$$

$$=r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)+(k+r)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)+(r-1)n^{r}\rho_n(f)\le$$

$$\le r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)+r(k+r)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f),$$

т. к. в силу $\rho_n(f)\downarrow(n\uparrow)$

$$(k+r)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)\ge(k+r)n^{-k}\rho_{n-1}(f)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\ge n^{-k}\rho_{n-1}(f)n^{k+r}=n^{r}\rho_{n-1}(f)\ge n^{r}\rho_n(f).$$

6) В силу пп. 3) и 2) леммы и левой оценки в (5) имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f)+n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)\le$$

$$\le\rho_n^{(r)}(f)+n^{r}\rho_n(f)+n^{-k}d_n^{(k+r)}(f)\le 2\rho_n^{(r)}(f)+n^{-k}d_n^{(k+r)}(f).\quad\square$$

Лемма 3. *Пусть* $k\in\mathbb{N}$, $g\in C(\mathbb{T})$, $g_{\pm}(x)=(1/2)\{g(x)\pm g(-x)\}$ *и* $\sigma(g;x)=(1/2)a_0(g)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n(g)\cos nx+b_n(g)\sin nx)$, *где* $a_n(g)\ge 0$, $b_n(g)\ge 0$, *тогда справедливы оценки* $(n=1,2,\dots)$

1) $\rho_{n-1}(g_+)=\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}a_\nu(g)\le C_1(k)\omega_k(g_+;\pi/n)\le C_1(k)\omega_k(g;\pi/n)$;

2) $n^{-\varkappa}d_n^{(\varkappa)}(g_+)=n^{-\varkappa}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{\varkappa}a_\nu(g)\le C_2(k)\omega_k(g_+;\pi/n)\le C_2(k)\omega_k(g;\pi/n)$,
где $\varkappa=k+[1-(-1)^k]/2=\{k,\ k$ *четное*; $k+1,\ k$ *нечетное*$\}$;

3) $n^{-\varkappa}d_n^{(\varkappa)}(g_-)=n^{-\varkappa}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{\varkappa}b_\nu(g)\le C_3(k)\omega_k(g_-;\pi/n)\le C_3(k)\omega_k(g;\pi/n)$,
где $\varkappa=k+[1+(-1)^k]/2=\{k+1,\ k$ *четное*; $k,\ k$ *нечетное*$\}$.

Лемма 3 в несколько иной формулировке приведена в ([5], неравенства (22)–(24) на с. 72). Ранее неравенства пп. 1) и 2) при k четном для симметрических модулей гладкости другим способом доказаны в ([7], с. 84–85; [8]).

Лемма 4. *Пусть четная функция* $f \in C(\mathbb{T})$ *имеет ряд Фурье* $\sigma(f;x) = (1/2)a_0(f) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos nx$, *где* $a_n(f) \geq 0$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, *тогда* $\rho_0(f) < \infty$ *и при четном* $k \in \mathbb{N}$

$$\omega_k(f;\pi/n) \underset{(k)}{\asymp} n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Доказательство. В силу известной теоремы Пэли (напр., [1], с. 277) для всякой четной непрерывной функции f с неотрицательными коэффициентами $a_n(f) \geq 0$ имеем $\rho_0(f) \leq f(0) < \infty$, откуда следует равномерная сходимость ее ряда Фурье, и, следовательно, в этом случае $\rho_n(f) = \sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu(f) = f(0) - S_n(f;0) = \|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая последнее равенство, в силу левой оценки в (5) и неравенств пп. 1), 2) (k четное) леммы 3 ($f_+ \equiv f$) получаем

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f) \leq \rho_n(f) + n^{-k} d_n^{(k)}(f) \leq [C_1(k) + C_2(k)]\omega_k(f;\pi/n),$$

откуда следует левая оценка в (6).

С другой стороны, т. к. при любых $x \in \mathbb{R}$ и $h \in \mathbb{R}$ (k четное)

$$\triangle_h^k f(x) = (-1)^{k/2} 2^k \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sin \nu \frac{h}{2}\right)^k a_\nu(f) \cos \nu \left(x + k\frac{h}{2}\right),$$

то, полагая $|h| \leq \pi/n$, в силу известных неравенств $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$, $|\sin z| \leq |z|$, $z \in \mathbb{R}$, и правой оценки в (5) имеем

$$|\triangle_h^k f(x)| \leq 2^k \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sin \nu \frac{h}{2}\right)^k a_\nu(f) \leq 2^k \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu(f) + |h|^k \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k a_\nu(f) \leq$$

$$\leq 2^k \rho_n(f) + \pi^k n^{-k} d_n^{(k)}(f) \leq k\pi^k n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f),$$

откуда следует правая оценка в (6). $\square$

Замечание 3. В условиях леммы 4 из соотношения (6) в силу неравенства $E_{n-1}(f) \leq \rho_{n-1}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, следует оценка $n^{-k} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu-1}(f) \leq C_4(k)\omega_k(f;\pi/n)$, ранее доказанная другим способом в ([7], теорема 1, с. 86).

Замечание 4. Для всякой последовательности $\lambda = \{\lambda_n\} \in M_0$ существует функция $f_0(x;\lambda) \in C(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p < \infty)$ такая, что $\rho_{n-1}(f_0) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, в качестве f_0 подходит (в силу теоремы Пэли, упомянутой в доказательстве леммы 4) четная непрерывная функция с $a_n(f_0) = \triangle\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что указанная функция f_0 ранее применялась в ([9], с. 52).

Отсюда, в частности, следует, что свойства $\{\lambda_n\} : 0 < \lambda_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ полностью характеризуют порядок убывания последовательности $\{\rho_{n-1}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ с $\rho_0(f) < \infty$, где $1 \leq p \leq \infty$.

3. Неравенства для оценок сверху

Предложение 1. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $\rho_0(f) < \infty$, *тогда* $f \sim \psi \in C(\mathbb{T})$ *и справедлива оценка*

$$\omega_k(\psi;\pi/n) \leq C_5(k) n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Доказательство. В силу известных свойств модулей гладкости (напр., [3], с. 223–225) и правого неравенства в (5) имеем

$$\omega_k(\psi;\pi/n) \le \omega_k(\psi - S_n(f);\pi/n) + \omega_k(S_n(f);\pi/n) \le 2^k\|\psi - S_n(f)\| + \pi^k n^{-k}\|S_n^{(k)}(f)\| \le$$
$$\le 2^k \sum_{\nu=n+1}^{\infty}(|a_\nu(f)| + |b_\nu(f)|) + \pi^k n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k(|a_\nu(f)| + |b_\nu(f)|) =$$
$$= 2^k\rho_n(f) + \pi^k n^{-k} d_n^{(k)}(f) \le k\pi^k n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f). \quad \square$$

Предложение 2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k, r \in \mathbb{N}$ *и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\rho_{n-1}(f) < \infty, \tag{8}$$

тогда $f \sim \psi \in C^r(\mathbb{T})$ *и справедливы оценки*

1) $\|\psi^{(r)}\| \le C_6(r)\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\rho_{n-1}(f)$;

2) $\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n) \le C_7(k,r)\left\{\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f) + n^{-k}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Доказательство. В силу сходимости ряда (8) и правого неравенства п. 1) леммы 2 имеем

$$\rho_0^{(r)}(f) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^r(|a_n(f)| + |b_n(f)|) \le r\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\rho_{n-1}(f) < \infty,$$

откуда $f \sim \psi \in C^r(\mathbb{T})$ и справедлива оценка

$$\|\psi^r\| \le \rho_0(\psi^r) \equiv \rho_0^{(r)}(f) \le r\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\rho_{n-1}(f).$$

Далее, в силу неравенства п. 5) леммы 2 получаем (см. доказательство предложения 1)

$$\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n) \le \omega_k(\psi^{(r)} - S_n^{(r)}(f);\pi/n) + \omega_k(S_n^{(r)}(f);\pi/n) \le$$
$$\le 2^k\|\psi^{(r)} - S_n^{(r)}(f)\| + \pi^k n^{-k}\|S_n^{(k+r)}(f)\| \le 2^k\rho_n^{(r)}(f) + \pi^k n^{-k} d_n^{(k+r)}(f) \le$$
$$\le \pi^k r(k+r)\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(f) + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\rho_{\nu-1}(f)\right\}. \quad \square$$

Приводимые ниже следствия непосредственно вытекают из предложения 1 (случай $r = 0$) и предложения 2 (случай $r > 0$).

Следствие 3. Пусть $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ и $\rho_{n-1}(f) \le Mn^{-(r+\alpha)}$, $n \in \mathbb{N}$, где $M = M(f)$ — положительная постоянная, тогда $f \sim \psi \in C^r(\mathbb{T})$ и $\omega_k(\psi^{(r)};\delta) \le C_8(k,r,\alpha,M)\{\delta^\alpha$ при $\alpha < k$; $\delta^k\ln(\pi e/\delta)$ при $\alpha = k$; δ^k при $\alpha > k\}$, $\delta \in (0,\pi]$.

Следствие 4. Пусть $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\rho_{n-1}(f) \le Mn^{-(r+k)}$, $n \in \mathbb{N}$, где $M = M(f)$ — положительная постоянная, тогда $f \sim \psi \in C^r(\mathbb{T})$ и $\omega_{k+1}(\psi^{(r)};\delta) \le C_9(k,r,M)\delta^k$, $\delta \in (0,\pi]$.

4. Функция, используемая для оценок снизу

Лемма 5. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $k, r \in \mathbb{N}$, *для всякой последовательности* $\lambda = \{\lambda_n\} \in M_0$ *существует функция* $g(x;\lambda) \in C(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T})$ *такая, что*

1) $\rho_0(g) < \infty$, $\rho_{n-1}(g) = 2\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $n^{-k} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\lambda_\nu \le C_{10}(k)\omega_k(g;\pi/n)$;

3) $g \in C^r(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\lambda_n < \infty$, *при этом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\lambda_n \le \|g^{(r)}\| \le 2r \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\lambda_n;$$

4) *если ряд в правой части* 3) *сходится, то*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\lambda_\nu + n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1}\lambda_\nu \le C_{11}(k,r)\omega_k(g^{(r)};\pi/n).$$

Доказательство. Положим (напр., [5], с. 73; [9], с. 52) $a_n(g) = b_n(g) = \Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $g(x;\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n(\cos nx + \sin nx)$. Очевидно, $\rho_0(g) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n = 2\lambda_1 < \infty$, следовательно, $g(x;\lambda) \in C(\mathbb{T})$ и $\rho_{n-1}(g) = \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} (|a_\nu(g)| + |b_\nu(g)|) = 2\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \Delta\lambda_\nu = 2\lambda_n$, откуда $\rho_{n-1}(g) = 2\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. имеет место п. 1).

Далее, в силу левого неравенства в (5) и неравенств 1), 2) (при k четном), 3) (при k нечетном) из леммы 3 имеем ($k \in \mathbb{N}$)

$$2n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\lambda_\nu = n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(g) \le \rho_n(g) + n^{-k} d_n^{(k)}(g) =$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta\rho_{\nu-1}(g) + n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k \Delta\rho_{\nu-1}(g) = 2 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta\lambda_\nu + 2n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k \Delta\lambda_\nu \le$$

$$\le 2C_1(k)\omega_k(g_+;\pi/n) + 2C_{12}(k)\omega_k(\varphi;\pi/n) \le 2C_{10}(k)\omega_k(g;\pi/n),$$

где $\varphi = g_+$ и $C_{12}(k) = C_2(k)$ при k четном, $\varphi = g_-$ и $C_{12}(k) = C_3(k)$ при k нечетном.

Докажем п. 3). Если ряд в правой части 3) сходится, то в силу 1) и предложения 2 имеем $g \in C^r(\mathbb{T})$ и

$$\|g^{(r)}\| \le r \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\rho_{n-1}(g) = 2r \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\lambda_n.$$

С другой стороны, если $g \in C^r(\mathbb{T})$, то в силу равенств $g^{(r)}(x;\lambda) = (-1)^{r/2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r \Delta\lambda_n(\cos nx + \sin nx)$, r четное, $g^{(r)}(x;\lambda) = (-1)^{(r+3)/2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r \Delta\lambda_n(\cos nx - \sin nx)$, r нечетное, и левого неравенства в п. 1) леммы 2 имеем ($r \in \mathbb{N}$)

$$\infty > \|g^{(r)}\| \ge |g^{(r)}(0;\lambda)| = \sum_{n=1}^{\infty} n^r \Delta\lambda_n = (1/2)\rho_0^{(r)}(g) \ge (1/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\rho_{n-1}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\lambda_n.$$

Докажем 4). Из сходимости ряда в правой части 3) следует $g \in C^r(\mathbb{T})$. Обозначим $\varphi(x) = (-1)^{r/2} g_+^{(r)}(x;\lambda)$ при r четном и $\varphi(x) = (-1)^{(r+3)/2} g_+^{(r)}(x;\lambda)$ при r нечетном. Тогда, очевидно, $\varphi \in C(\mathbb{T})$ и $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r \Delta\lambda_n \cos nx$, где $r \in \mathbb{N}$.

В силу п. 3) леммы 2 и п. 1) леммы 3 имеем ($r \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\lambda_\nu = (1/2) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\rho_{\nu-1}(g) \le (1/2)\rho_n^{(r)}(g) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r \Delta\lambda_\nu \le$$
$$\le C_1(k)\omega_k(\varphi;\pi/n) = C_1(k)\omega_k(g_+^{(r)};\pi/n) \le C_1(k)\omega_k(g^{(r)};\pi/n).$$

Далее, в силу п. 2) настоящей леммы и известного неравенства $\omega_{k+r}(g;\delta) \le \delta^r\omega_k(g^{(r)};\delta)$ (при условии $g \in C^r(\mathbb{T})$; напр., [3], с. 225) получаем

$$C_{10}^{-1}(k+r)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\lambda_\nu \le n^r\omega_{k+r}(g;\pi/n) \le \pi^r\omega_k(g^{(r)};\pi/n).$$

Объединяя полученные оценки, имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1}\lambda_\nu + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\lambda_\nu \le [C_1(k) + \pi^r C_{10}(k+r)]\omega_k(g^{(r)};\pi/n). \quad \square$$

Следствие 5. Полагая в лемме 5 $\lambda_n = (\pi/n)^{r+\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \alpha \le k$, $k \in \mathbb{N}$, получаем, что соответствующая функция $g(x;\lambda) \in C^r(\mathbb{T})$, $\rho_{n-1}(g) = 2\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, и при этом имеют место оценки ($r \in \mathbb{Z}_+$): $\omega_k(g^{(r)};\delta) \ge C_{13}(k,r,\alpha)\{\delta^\alpha$ при $\alpha < k$; $\delta^k\ln(\pi e/\delta)$ при $\alpha = k\}$, $\omega_{k+1}(g^{(r)};\delta) \ge C_{14}(k,r)\delta^k$ при $\alpha = k$, $\delta \in (0,\pi]$.

5. Доказательства основных утверждений

Доказательство теоремы 1. Оценка сверху в (2) следует из неравенства (7): если произвольная функция $f \in A_p[\lambda]$, то имеем $f \in L_p(\mathbb{T})$ и $\rho_{n-1}(f) \le \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, откуда в силу предложения 1 ($\rho_0(f) \le \lambda_1 < \infty$) $f \sim \psi \in C(\mathbb{T})$ и

$$\omega_k(\psi;\pi/n) \le C_5(k)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\rho_{\nu-1}(f) \le C_5(k)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\lambda_\nu.$$

Оценку снизу в (2) доставляет функция $(1/2)g(x;\lambda) \in A_p[\lambda]$, рассмотренная в лемме 5: в силу п. 2) этой леммы имеем

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\lambda_\nu \le C_{10}(k)\omega_k(g;\pi/n) \le 2C_{10}(k)\sup\{\omega_k(\psi;\pi/n); f \in A_p[\lambda]\}.$$

Доказательство теоремы 2. Условие сходимости ряда (3) необходимо и достаточно для того, чтобы всякая функция $f \in A_p[\lambda]$ почти всюду совпадала с некоторой функцией $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ при $p < \infty$ и принадлежала классу $C^r(\mathbb{T})$ при $p = \infty$. Достаточность следует из первой части утверждения в предложении 2; необходимость имеет место в силу п. 3) леммы 5.

Оценка сверху в (4) следует из неравенства п. 2) предложения 2: для каждой функции $f \in A_p[\lambda]$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\rho_{n-1}(f) \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1}\lambda_n < \infty$, откуда в силу предложения 2 $f \sim \psi \in C^r(\mathbb{T})$ и

$$\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n) \le C_7(k,r)\Big\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\lambda_\nu + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\lambda_\nu\Big\}.$$

Оценку снизу в (4) доставляет функция $(1/2)g(x;\lambda) \in A_p[\lambda]$, рассмотренная в лемме 5: в силу п. 4) этой леммы имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\lambda_\nu + n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\lambda_\nu \le C_{11}(k,r)\omega_k(g^{(r)};\pi/n) \le$$
$$\le 2C_{11}(k,r)\,\sup\{\omega_k(\psi^{(r)};\pi/n);\ f \in A_p[\lambda]\}.$$

Доказательство следствий 1 и 2. Оценки сверху вытекают соответственно из следствий 3 и 4; по поводу оценок снизу см. следствие 5.

Литература

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. Lorentz G.G. *Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen* // Math. Zeitschrift. – 1948. – Bd. 51. – H. 2. – S. 135–149.
3. Стечкин С.Б. *О порядке наилучших приближений непрерывных функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15. – № 3. – С. 219–242.
4. Бари Н.К. *О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1955. – Т. 19. – № 5. – С. 285–302.
5. Гейт В.Э. *Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 4. – С. 67–77.
6. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
7. Жук В.В. *Об одном методе суммирования рядов Фурье. Ряды Фурье с положительными коэффициентами* // Исследов. по некот. пробл. констр. теории функций. Сб. научн. трудов ЛМИ. – Ленинград, 1965. – № 50. – С. 73–92.
8. Boas R.P. *Fourier series with positive coefficients* // J. Math. Anal. and Appl. – 1967. – V. 17. – № 3. – P. 463–483.
9. Стечкин С.Б. *Приближение периодических функций суммами Фейера* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 62. – С. 48–60.

Бакинский государственный университет

Поступила 06.05.2003