Известия вузов. Математика
2008, № 7, с. 11–18

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

А.Л. КУЗЬМИНА

ПРОСТРАНСТВА $L^p(AP)$ $(1 \le p \le \infty)$ И ИХ СОПРЯЖЕННЫЕ

Аннотация. Изучаются пространства обобщенных почти периодических функций типа пространства Безиковича. Основной результат — теорема о представлении линейного непрерывного функционала, совпадающая по форме с классическим результатом Ф. Рисса.

Ключевые слова: почти периодические функции, пространство Безиковича, линейные непрерывные функционалы.

УДК: 517.982

Abstract. We study Besicovitch-type spaces of generalized almost periodic functions. The main result is a theorem on representation of linear continuous functionals that is similar to the classical result of F. Riesz.

Keywords: almost-periodic functions, Besicovitch space, linear continuous functionals.

В этой работе рассматриваются пространства L^p — интегрируемых почти периодических (п. п.) функций $L^p(AP)$ $(1 \le p \le \infty)$ и их сопряженные пространства.

В п. 1 вводятся пространства п. п. функций $L^p(AP)$ $(1 \le p \le \infty)$ как пополнения пространств п. п. по Бору функций AP по норме

$$\| \cdot \|_p = \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} | \cdot |^p \, dt \right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty)$$

и

$$\| \cdot \|_\infty = \lim_{p\to\infty} \| \cdot \|_p.$$

Устанавливается возможность введения скалярного произведения для функций пространств $L^p(AP)$ и $L^q(AP)$ $(1/p + 1/q = 1,\ 1 \le p \le \infty)$, взаимно сопряженных по Юнгу.

В п. 2 доказывается теорема об общем виде линейного непрерывного функционала на $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$. Откуда следует, что сопряженные по Юнгу пространства являются также и сопряженными, т. е.

$$[L^p(AP)]^* = L^q(AP) \ \ (1/p + 1/q = 1, \ \ 1 \le p < \infty).$$

1. Пространства $L^p(AP)$ $(1 \le p \le \infty)$ как пополнения пространства AP с соответствующей нормой. AP — линейное пространство п. п. по Бору функций $x(t)$, $-\infty < t < \infty$ ([1], гл. 1, § 1). Если $x(t) \in AP$, то $|x(t)| \in AP$ и если $y(t) \in AP$, то $x(t)y(t) \in AP$. Для каждой функции $x(t) \in AP$ существует интегральное среднее ([1], § 3)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt \ \ (\ne \infty).$$

Поступила 07.05.2004

Докажем, что функции $|x(t)|^p$ $(0 < p < \infty)$ также принадлежат AP, если $x(t)$ принадлежит AP.

Действительно, из неравенства

$$\big||x(t+\tau)|^\alpha - |x(t)|^\alpha\big| \le \big||x(t+\tau)| - |x(t)|\big|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

следует, что если τ есть ε-почти период функции $x(t)$, то τ является также ε^α-почти периодом функции $|x(t)|^\alpha \in AP$ $(0 < \alpha < 1)$.

При p целом $(p > 1)$ функция $|x(t)|^p$ принадлежит AP как конечное произведение функций $|x(t)|$, $x(t) \in AP$. При любом p, $1 < p < \infty$, очевидно, функция

$$|x(t)|^p = |x(t)|^{[p]}|x(t)|^\alpha, \quad p = [p] + \alpha, \ \ 0 < \alpha < 1,$$

также принадлежит пространству AP. Поэтому на пространстве AP можно задать норму

$$\|x\|_p = \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty)$$

и, пополнив его по этой норме, будем иметь полные пространства L^p-интегрируемых п. п. функций пространства $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$.

Из неравенства для интегральных средних ([2], с. 264) очевидным образом следует

$$L^{p''}(AP) \subset L^{p'}(AP) \ \text{ и } \ \|\cdot\|_{p'} \le \|\cdot\|_{p''}, \ \ 1 \le p' < p'' < \infty.$$

Определим пространство

$$L^\infty(AP) = \bigcap_{p\ge 1} L^p(AP) = \lim_{p\to\infty} L^p(AP)$$

с нормой $\|\cdot\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\cdot\|_p$ $(\ne \infty)$. Очевидно, $L^\infty(AP)$ является полным пространством, которое можно рассматривать как пополнение пространства AP с нормой

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p, \quad x \in AP.$$

Пространства $L^p(AP)$ и $L^q(AP)$ при условии $1/p + 1/q = 1$ $(p > 1)$ назовем (как и пространства $L^p(a,b)$ и $L^q(a,b)$ при этом условии) взаимно сопряженными по Юнгу. Пространство $L^\infty(AP)$ будем считать взаимно сопряженным по Юнгу пространству $L(AP) \equiv L^1(AP)$.

Замечание 1. Пространство $L^\infty(AP)$ нельзя отождествить с пространством почти всюду ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ L^p-интегрируемых п. п. функций с нормой, равной

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{|t|<\infty} |x(t)| = \lim_{T\to\infty} \operatorname*{vrai\,sup}_{|t|\le T} |x(t)| = \lim_{T\to\infty} \lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Очевидно, последнее содержится в $L^\infty(AP)$.

Замечание 2. Имеют место вложения

$$L^p(AP) \subset B^p \quad (1 \le p < \infty),$$

где B^p — пространство Безиковича с метрикой

$$D_{B^p}(x,y) = \left(\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t) - y(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$

([1], с. 248–249; [3], гл. III).

В [3] (см. “Appendix”) дается пример $B \equiv B^1$-функции, не являющейся в $\overline{B}$ ($\overline{B} = L(AP)$)-функцией, так что $B \equiv B^1 \ne L^1(AP) = L(AP)$.

Будет ли $B^p \ne L^p(AP)$ для каждого p, $1 < p < \infty$?

Докажем теорему о произведении функций из взаимно сопряженных пространств.

Теорема 1. *Если функции* $x(t) \in L^p(AP)$ *и* $y(t) \in L^q(AP)$ $\big(1/p + 1/q = 1,\ 1 \le p < \infty\big)$, *то их произведение* $x(t)y(t)$ *принадлежит* $L(AP)$ *и существует*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t)dt. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $x(t) \in L^p(AP)$, $y(t) \in L^q(AP)$, то $x(t) = (L^p) \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$, $y(t) = (L^q) \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$, где $x_n(t), y_n(t) \in AP$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Пусть $p > 1$. Из неравенств

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |xy - x_n y_n| dt \le \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x - x_n|\,|y| dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y - y_n|\,|x_n| dt \le$$
$$\le \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x - x_n|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y|^q\,dt\right)^{1/q} + \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y - y_n|^q\,dt\right)^{1/q} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x_n|^p\,dt\right)^{1/p}$$

будем иметь

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |xy - x_n y_n| dt \le \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x - x_n|^p\,dt\right)^{1/p} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y|^q\,dt\right)^{1/q} +$$
$$+ \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y - y_n|^q\,dt\right)^{1/q} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x_n|^p\,dt\right)^{1/p} = \|x - x_n\|_p \|y\|_q + \|x_n\|_p \|y - y_n\|_q.$$

Отсюда следует

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |xy - x_n y_n| dt \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

так что $x(t)y(t)$ есть B-п. п. функция ([1], с. 248) и ее интегральное среднее

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t)dt$$

существует ([3], гл. VI, § 13).

Функция $|xy - x_n y_n|$ $(x_n, y_n \in AP)$ является также B-п. п. функцией и существует

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |xy - x_n y_n| dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В силу (2)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |xy - x_n y_n| dt \to 0, \quad n \to \infty,$$

так что функция $x(t)y(t)$ принадлежит $L^p(AP)$ и существует предел (1).

Итак, при $p > 1$ теорема доказана.

Пусть $p = 1$. Если $x(t) \in L(AP)$ и $y(t) \in L^\infty(AP)$ удовлетворяют такому условию

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)y(t)| dt \le \|x\|_1 \|y\|_\infty, \tag{3}$$

что, в частности, имеет место, если $x(t) \in L(AP)$ и $x(t) \in L^{p_0}(AP)$ $(p_0 > 1)$ (p_0 фиксировано), $y(t) \in L^\infty(AP)$ или если $x(t) \in L(AP)$ и $y(t) \in L^\infty(AP)$, $\|y\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{|t|<\infty} |y(t)|$ $(\neq \infty)$, то, как и при $p > 1$, получаем соотношение (2), из которого и следует утверждение теоремы.

Таким образом, если иметь в виду, что существование предела (1) в формулировке теоремы означает условие (3) при $p = 1$, то теорема 1 полностью доказана. □

Доказанная теорема дает возможность определить скалярное произведение функций $x(t) \in L^p(AP)$ и $y(t) \in L^q(AP)$ $(1/p + 1/q = 1,\ 1 \le p < \infty)$ формулой

$$(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t)dt,$$

при этом $|(x, y)| \le \|x\|_p \|y\|_q$ $(1 \le p < \infty)$ (при $p = 1$, $q = \infty$ и условии (3)).

В общем случае при $p = 1$ $(q = \infty)$ из того, что если $x(t) \in L(AP)$, $x(t) = (L) \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, $\{x_n\} \subset AP$, $x_n(t) \in L^p(AP)$ $(p \ge 1)$ и $y(t \in L^\infty(AP)$, то для каждого p $(p > 1)$ имеем

$$|(x_n, y)| \le \|x_n\|_p \|y\|_q, \quad |(x_n - x_m, y)| \le \|x_n - x_m\|_p \|y\|_q$$

и при $p \to 1$ $(q \to \infty)$ в пределе имеем

$$|(x_n, y)| \le \|x_n\|_1 \|y\|_\infty, \quad |(x_n - x_m, y)| \le \|x_n - x_m\|_1 \|y\|_\infty.$$

Следовательно, последовательность $\{(x_n, y)\}$ сходится, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к x, и ее предел не зависит от $\{x_n\} \subset AP$, сходящейся к x в $L(AP)$.

Скалярное произведение функций $x(t) \in L(AP)$ и $y(t) \in L^\infty(AP)$ по определению полагаем равным

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y),$$

который существует и не зависит от последовательности $\{x_n\} \subset AP$, сходящейся к x в $L(AP)$, при этом $|(x, y)| \le \|x\|_1 \|y\|_\infty$, что является предельным неравенством Гёльдера.

2. Линейные непрерывные функционалы на $L^p(AP)$ $(p \ge 1)$. Функция $F(x) = (x, y_0)$, $x \in L^p(AP)$, где $y_0 \in L^q(AP)$ $(1/p + 1/q = 1,\ p \ge 1)$, y_0 фиксировано, является линейным непрерывным функционалом на $L^p(AP)$ $(p \ge 1)$ и $\|F\| = \|y_0\|_q$.

Из определения скалярного произведения и его оценки

$$|F(x)| = |(x, y_0)| \le \|y_0\|_q \|x\|_p, \quad x \in L^p(AP) \ \ (p \ge 1),$$

следует линейность и ограниченность функционала F.

Докажем, что норма функционала $\|F\|$ равна $\|y_0\|_q$. Пусть $p > 2$ $(q < 2)$. Покажем, что функция $\widetilde{x}(t) = |y_0(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} y_0(t) \in L^p(AP)$. Так как

$$|y_0(t)|^{q-1} (q - 1 < 1) \in L^p(AP), \quad \operatorname{sgn} y_0(t) = \operatorname{sgn} y_0^+(t) - \operatorname{sgn} y_0^-(t),$$
$$y_0^+(t) = \frac{1}{2}[y_0(t) + |y_0(t)|], \quad y_0^-(t) = \frac{1}{2}[|y_0(t)| - y_0(t)],$$
$$y_0^+(t) \text{ и } y_0^-(t) \in L^q(AP), \quad |y_0^\pm(t)|^{q-1} \in L^p(AP),$$

то

$$\widetilde{x}(t) = |y_0(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} y_0(t) = |y_0^+(t)|^{q-1} - |y_0^-(t)|^{q-1} \in L^p(AP)$$

и

$$\|\widetilde{x}\|_p = \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\widetilde{x}(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |y_0(t)|^{(q-1)p} \, dt \right)^{1/p} = \|y_0\|_q^{q/p}.$$

Тогда
$$\|F\| \ge F\left(\frac{\widetilde{x}}{\|\widetilde{x}\|_p}\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y_0(t)\frac{\widetilde{x}(t)}{\|\widetilde{x}\|_p}dt = \frac{1}{\|\widetilde{x}\|_p}\|y_0\|_q^q = \|y_0\|_q.$$
Поскольку $\|F\| \le \|y_0\|_q$, то $\|F\| = \|y_0\|_q$.

Пусть $1 < p \le 2$ $(q \ge 2)$. Рассмотрим функции
$$y_n(t) = \begin{cases} y_0(t), & |y_0(t)| \le n; \\ \frac{y_0(t)}{|y_0(t)|}n, & |y_0(t)| > n \quad (n = 1, 2, \dots), \end{cases}$$
и $\widetilde{y}_n(t) = |y_n(t)|^{q-1}\operatorname{sgn} y_0(t)$. Так как $y_0(t) \in L^q(AP)$ и, очевидно, $|y_n(t_1) - y_n(t_2)| \le |y_0(t_1) - y_0(t_2)|$, то функции $y_n(t)$ $(n = 1, 2, \dots)$ принадлежат $L^q(AP)$. Поскольку функции $y_n(t)$ ограничены, то $|y_n(t)|^{q-1} \in L^p(AP)$, а также и $\widetilde{y}_n(t) \in L^p(AP)$ (в чем убеждаемся так же, как и при $q < 2$). Тогда
$$F(\widetilde{y}_n) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\widetilde{y}_n(t)y_0(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^{q-1}|y_0(t)| \ge \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^q\,dt.$$
Но
$$F(\widetilde{y}_n) \le \|F\|\,\|\widetilde{y}_n\|_p = \|F\|\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^q\,dt\right)^{1/p} = \|F\|(\|y_n\|_q)^{q/p}$$
и, очевидно, $\|y_n\|_q \le \|F\|$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Покажем, что $\|y_n\|_q \to \|y_0\|_q$, $n \to \infty$. Получим
$$\|y_0\|_p^q = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_0(t)|^q\,dt = \lim_{T\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^q\,dt,$$
$$\|y_n\|_q^q = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^q\,dt.$$

Последовательность
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^q\,dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$
равномерно сходится относительно T, $0 < T_0 \le T < \infty$ (T_0 фиксировано). Отсюда (перестановка пределов возможна)
$$\lim_{n\to\infty}\|y_n\|_q^q = \lim_{n\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^q\,dt = \lim_{T\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y_n(t)|^q\,dt = \|y_0\|_q^q$$
и
$$\|y_n\|_q \to \|y_0\|_q, \quad n \to \infty.$$

Так как $\|y_n\|_q \le \|F\|$ $(n = 1, 2, \dots)$, то $\|y_0\|_q \le \|F\|$, но $\|F\| \le \|y_0\|_q$ и, следовательно, $\|F\| = \|y_0\|_q$.

Пусть $p = \infty$ $(q = 1)$. Тогда $F(x) = (x, y_0)$, $x \in L^\infty(AP)$, где $y_0 \in L(AP)$, y_0 фиксировано. Так как $y_0 \in L(AP)$, то $y_0(t) = (L)\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$, где $y_n(t)$ — тригонометрические многочлены, для которых $\operatorname{sgn} y_n(t) \in L^\infty(AP)$ ([1], с. 210–211, но с заменой пространства S-п. п. функций на $L^p(AP)$ $(p \ge 1)$ и, как следствие, будем иметь: знак любого действительного тригонометрического многочлена есть функция из $L^\infty(AP)$).

Последовательность линейных непрерывных на $L^\infty(AP)$ функционалов
$$F_n(x) = (x, y_n), \quad x \in L^\infty(AP),$$

очевидно, с нормой $\|F_n\| = \|y_n\|_1$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходится в $F(x)$, так как $|F_n(x) - F(x)| = |(x, y_n - y_0)| \le \|x\|_\infty \|y_n - y_0\|_1$, $x \in L^\infty(AP)$, и $\|F_n - F\| \le \|y_n - y_0\|_1 \to 0$, $n \to \infty$, то $\|F_n\| = \|y_n\|_1 \to \|y_0\|_1 = \|F\|$.

Пусть $p = 1$ $(q = \infty)$. Тогда $F(x) = (x, y_0)$, $x \in L(AP)$, где $y_0 \in L^\infty(AP)$, y_0 фиксировано.

Покажем, что $\|F\| = \|y_0\|_\infty$. Так как $y_0(t) \in L^\infty(AP)$, то $y_0(t) = (L^\infty) \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)$, где $y_n(t)$ — приведенные выше тригонометрические многочлены, для которых $\operatorname{sgn} y_n(t) \in L(AP)$ ([1], с. 210–211).

Последовательность линейных непрерывных функционалов на $L(AP)$

$$F_n(x) = (x, y_n), \quad x \in L(AP),$$

очевидно, с нормой $\|F_n\| = \|y_n\|_\infty$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходится к $F(x)$, так как

$$|F_n(x) - F(x)| = |(x, y_n - y_0)| \le \|x\|_1 \|y_n - y_0\|_\infty$$

и $\|F_n - F\| \le \|y_n - y_0\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$, то $\|F_n\| = \|y_n\|_\infty \to \|y_0\|_\infty = \|F\|$.

Общий вид линейного непрерывного функционала на $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$ дает

Теорема 2. *Всякий линейный непрерывный функционал F на $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$ представи́м в виде*

$$F(x) = (x, y_0), \quad x \in L^p(AP), \tag{4}$$

где $y_0 \in L^q(AP)$ $(1/p + 1/q = 1,\ 1 \le p < \infty)$, y_0 единственно, причем

$$\|F\| = \|y_0\|_q. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть F — линейный непрерывный функционал на $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$. Тогда $L^p_{(\alpha)}$ $(1 \le p < \infty)$ — пространства периодических функций, где (α), $0 < \alpha < \infty$, означает, что $e^{i\alpha t} \in L^p_{(\alpha)}$, $L^p_{(\alpha)} \subset L^p(AP)$ и $L^p_{(\alpha)}$ являются подпространствами $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$.

Будем изучать сужения функционала F на $L^p_{(\alpha)}$

$$F_{(\alpha)}(x) = F(x), \quad x \in L^p_{(\alpha)} \ \ (0 < \alpha < \infty).$$

Очевидно, функционал $F_{(\alpha)}$ представи́м в виде

$$F_{(\alpha)}(x) = (x, y_{(\alpha)}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y_{(\alpha)}(t) dt, \quad x \in L^p_{(\alpha)},$$

где $y_{(\alpha)} \in L^q_{(\alpha)}$ $(1/p + 1/q = 1)$, причем $y_{(\alpha)} \in L^\infty_{(\alpha)}$ при $p = 1$ и

$$\|y_{(\alpha)}\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{|t|<\infty} |y_{(\alpha)}(t)|,$$

$y_{(\alpha)}$ является производящей функцией функционала $F_{(\alpha)}$.

Рассмотрим линейное многообразие W множества всех производящих функционалы $F_{(\alpha)}$ функций $y_{(\alpha)}$, $0 < \alpha < \infty$, и его замыкание $\overline{W}$ в $L^q(AP)$. Пусть $y_0 = y_0(t) \in \overline{W}$, $y_0 \in L^q(AP)$ и $\Lambda_0 = \{\lambda_k\}$ — множество (разве лишь счетное) его показателей Фурье. Очевидно, для каждого тригонометрического многочлена $P(t) = \sum\limits_{(k)} a_k e^{i\mu_k t}$ имеем $(P, y_0) = F(P)$, если $\{\mu_k\} \subset \Lambda_0$, и $(P, y_0) = 0$, если $\{\mu_k\} \not\subset \Lambda_0$, так что, вообще говоря, $(P, y_0) = F(P)$, если $F(P) = 0$, и $(P, y_0) \ne F(P)$, если $F(P) \ne 0$.

Если же существует $y_0 \in \overline{W}$ такой, что $(P, y_0) = F(P)$ для каждого тригонометрического многочлена $P(t)$, то для любой функции $x(t) \in L^p(AP)$, $x(t) = (L^p) \lim\limits_{m\to\infty} P_m(t)$,

$$F(x) = F(\lim_{m\to\infty} P_m) = \lim_{m\to\infty} F(P_m) = \lim_{m\to\infty} (P_m, y_0) = (x, y_0)$$

и (4) будет доказано.

Докажем, что такой $\widetilde{y}_0 \in \overline{W}$ существует.

Итак, пусть $y_0 \in \overline{W}$. Если найдется многочлен $\widetilde{P}(t)$ такой, что $(\widetilde{P}, y_0) \neq F(\widetilde{P})$ и $(P, y_0) = F(P)$ для каждого многочлена $P \neq \widetilde{P}$, то $\widetilde{y}_0 = y_0 + y_{\tilde{P}} \in \overline{W}$, где $y_{\tilde{P}}$ — производящая функция сужения F на $\widetilde{P}$, т.е. $(\widetilde{P}, y_{\tilde{P}}) = F(\widetilde{P})$, и $(P, \widetilde{y}_0) = (P, y_0 + y_{\tilde{P}}) = F(P)$ для каждого многочлена P, так как для $\widetilde{P}$ $(\widetilde{P}, y_0) = 0$ в силу выбора $y_{\tilde{P}}$, а для $P \neq \widetilde{P}$ $(P, y_0) = F(P)$ и $(P, y_{\tilde{P}}) = 0$, если $P \subset \{\mu_k\} \subset \Lambda_0$ или если $P \subset \{\mu_k\} \not\subset \Lambda_0$ и не совпадающими с показателями многочлена $\widetilde{P}$.

Если же для $y_0 \in \overline{W}$ имеется бесконечное множество многочленов $\widetilde{P} \subset \{\mu_k\} \not\subset \Lambda_0$ таких, что $(\widetilde{P}, y_0) \neq F(\widetilde{P})$, то, "присоединив" к y_0 соответствующие им производящие функции $y_{\tilde{P}}$ последовательно, как элементы из $\overline{W}$, получим $\widetilde{y}_0 \in \overline{W}$ такой, что $(P, \widetilde{y}_0) = F(P)$ для каждого многочлена $P(t)$ с любыми показателями $\{\mu_k\}$.

Заметим, что при этом будут "изъяты" из дополнения $\Lambda^C = (-\infty, \infty) \setminus \Lambda_0$ все $\{\mu_k\}$, для которых $(\widetilde{P}, y_0) \neq F(\widetilde{P})$, и что их не более чем счетное множество.

Поскольку (5) уже доказано выше, то единственность y_0 следует из того, что если

$$F(x) = (x, y_0) = (x, z_0), \quad x \in L^p(AP), \quad y_0, z_0 \in L^q(AP),$$

то $(x, y_0 - z_0) = 0$, $x \in L^p(AP)$ и, следовательно, $\|y_0 - z_0\| = 0$, $y_0 = z_0$. □

Замечание 3. При $p = 2$ $L^2(AP)$ является H-пространством и утверждение теоремы — известный факт ([4], с. 193).

Замечание 4. При $p = \infty$ линейные непрерывные функционалы F, представимые в виде (4), — регулярные функционалы, если все сужения F на $L^\infty_{(\alpha)}$ $(0 < \alpha < \infty)$ — подпространства $L^\infty(AP)$ почти всюду ограниченных периодических функций с нормой $\|\cdot\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}\limits_{|t|<\infty} |\cdot|$ — являются регулярными функционалами.

В противном случае, если хотя бы одно из сужений F не является регулярным функционалом на $L^\infty_{(\alpha)}$, то функционалы F на $L^\infty(AP)$ являются сингулярными функционалами.

Примером сингулярного функционала является

$$F(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dy_0(t), \quad x \in L^\infty(AP), \tag{6}$$

$$y_0(t) \in V(AP), \quad y_0(t) \neq \int_0^t y_0'(s)\,ds, \quad y_0'(t) \in L(AP).$$

Не будет ли непрерывный функционал F на $L^\infty(AP)$ представим в виде (6)?

Замечание 5. Теорема 2 является аналогом теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на $L^p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$ ([5], п. 36).

Для пространств $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$ риссовская схема доказательства не проходит. "Модифицированная" схема доказательства теоремы Ф. Рисса для $L^p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$ [6] также не проходит для пространств $L^p(AP)$ при $p > 2$, а при $1 \le p < 2$ теорема 2 может быть доказана так же, как и для $L^p(a,b)$ $(1 \le p < 2)$ ([6], с. 194).

В заключение отметим, что в силу теоремы 2

$$[L^p(AP)]^* = L^q(AP) \quad (1/p + 1/q = 1, \quad 1 \le p < \infty),$$

т.е. сопряженными пространствами для $L^p(AP)$ $(1 \le p < \infty)$ являются пространства $L^q(AP)$ $(1/p + 1/q = 1)$ — им сопряженные по Юнгу.

Литература

[1] Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* – М.: ГИТТЛ, 1953. – 396 с.
[2] Вулих Б.З. *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* – М.: Наука, 1965. – 304 с.
[3] Besicovitch A.S., Bohr H. *Almost periodicity and general trigonometric series* // Acta Math. – 1931. – V. 57. – P. 203–292.
[4] Садовничий В.А. *Теория операторов.* – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.
[5] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: Ин. лит., 1954. – 499 с.
[6] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

А.Л. Кузьмина

Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

A.L. Kuz'mina

Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia