ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 4 (491)

УДК 517.929

К.М. ЧУДИНОВ

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим линейную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

где оператор $\mathbf{A} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ задан матрицей $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$.

Пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A, λ_l, $l = \overline{1,r}$, — его корни. Как известно (напр., [1], с. 244), каждая компонента $x_m(t)$, $m = \overline{1,n}$, решения $x(t)$ системы (1) является суммой квазимногочленов от t с показателями λ_l:

$$x_m(t) = \sum_{l=1}^{r} e^{\lambda_l t} p_{m,l}(t), \tag{2}$$

где $p_{m,l}(t)$ — многочлен степени, меньшей кратности корня λ_l. Целью статьи является получение необходимых и достаточных условий присутствия данного показателя экспоненты в представлении первой компоненты решения системы (1) в виде (2).

Введем следующие обозначения: E_s, $0 \le s \le n-1$, — единичные матрицы порядка $(n-s)$; $A_1 = (a_{jk})_{j,k=2}^n$ — матрица порядка $(n-1)$; $B_1(\lambda)$ — матрица-функция $A_1 - \lambda E_1$; $B_i(\lambda)$, $i = \overline{2,n}$, — матрицы-функции, зависящие от λ, получаемые заменой соответственно i-й строки матрицы $B_1(\lambda)$ строкой $(a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n})$; $\Delta_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, — многочлены-определители матриц $B_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, соответственно; $\delta(\lambda)$ — наибольший общий делитель этих многочленов. Из разложения определителя матрицы $A - \lambda E_0$ по первому столбцу следует, что многочлен $\delta(\lambda)$ является делителем многочлена $\Delta(\lambda)$.

Теорема 1. *В представление первой компоненты решения системы* (1) *в виде* (2) *входят квазимногочлены с теми и только теми показателями, которые являются корнями многочлена* $\Delta(\lambda)/\delta(\lambda)$.

Базис пространства $\mathbf{C}^n$, в котором A является матрицей оператора $\mathbf{A}$, обозначим через $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ и назовем естественным. Пусть S — линейная оболочка системы векторов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=2}^n$. Значит, элементами пространства S являются те и только те векторы пространства $\mathbf{C}^n$, первые компоненты которых в естественном базисе $\mathbf{C}^n$ равны 0.

Введем также следующие обозначения: S_i — гиперплоскость в пространстве S, ортогональная вектору $\mathbf{e}_i$, $2 \le i \le n$; $\mathbf{a}$ — вектор пространства S, имеющий в базисе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=2}^n$ координаты $(a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n})$; S_a — гиперплоскость в пространстве S, ортогональная вектору $\mathbf{a}$; $\mathbf{P}_i$ — ортопроектор в пространстве S на гиперплоскость S_i; $\mathbf{B}_i(\lambda)$ — оператор-функции, действующие из S в S, задаваемые в базисе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=2}^n$ матрицами-функциями $B_i(\lambda)$.

Объединим в одном утверждении следствия теоремы о приведении матрицы к жорданову виду ([2], с. 383–389; [3], с. 151–155).

Лемма 1. *Пусть M — некоторая комплекснозначная квадратная матрица и μ — корень ее характеристического многочлена кратности p. Тогда существует такая линейно независимая система из p столбцов $\{h_m^{(k)}\}$, $k=\overline{1,s}$, $m=\overline{1,p_k}$, $\sum\limits_{k=1}^{s} p_k = p$, что выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} &h_1^{(k)} \neq 0, \\ &Mh_1^{(k)} = \mu h_1^{(k)}, \\ &Mh_n^{(k)} = \mu h_n^{(k)} + h_{n-1}^{(k)}, \quad n = 2, \ldots, p_k. \end{aligned}$$

Пусть Z — некоторое линейное пространство, $\mathbf{L}$ — линейное преобразование пространства Z и μ — собственное значение преобразования $\mathbf{L}$. Следуя терминологии [3], будем называть вектор $\mathbf{h}$ присоединенным вектором оператора $\mathbf{L}$, отвечающим собственному значению μ, если для некоторого целого $p \geq 1$ выполняются соотношения $(\mathbf{L}-\mu\mathbf{E})^p\mathbf{h} \neq 0$, $(\mathbf{L}-\mu\mathbf{E})^{p+1}\mathbf{h} = 0$, где $\mathbf{E}$ — тождественный оператор. При этом число p будем называть порядком присоединенного вектора $\mathbf{h}$, а последовательность $(\mathbf{L}-\mu\mathbf{E})^p\mathbf{h}, (\mathbf{L}-\mu\mathbf{E})^{p-1}\mathbf{h}, \ldots, (\mathbf{L}-\mu\mathbf{E})\mathbf{h}, \mathbf{h}$ согласно терминологии [2] — серией с собственным значением μ относительно преобразования $\mathbf{L}$ пространства Z. Столбцы, отвечающие в некотором базисе собственным и присоединенным векторам, также будем называть соответственно собственными и присоединенными.

В любом базисе из собственных и присоединенных векторов оператора $\mathbf{A}$ система (1) имеет вид $\dot{y} = Jy$ ([1], с. 242–244), где

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,k},$$

а все ее решения определяются формулой

$$y(t) = e^{Jt}y(0),$$

где

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & e^{J_k t} \end{pmatrix}, \quad e^{J_j t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{s_j-1}}{(s_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{s_j-2}}{(s_j-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_j t}, \quad j = \overline{1,k}.$$

Легко видеть, что в представлении (2) при $m = 0$ тогда и только тогда присутствуют квазимногочлены с показателем λ_l, когда все собственные и присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_l, имеют в естественном базисе первую компоненту, не равную 0.

Заметим, что серия с собственным значением λ_0 относительно преобразования $\mathbf{A}$ пространства $\mathbf{C}^n$ тогда и только тогда состоит из векторов, имеющих равные 0 первые компоненты, когда она является серией с тем же собственным значением относительно преобразования $\mathbf{A}_1$ пространства S, состоящей из векторов, ортогональных вектору $\mathbf{a}$. С другой стороны, из определения многочлена $\Delta(\lambda)/\delta(\lambda)$ следует, что собственное значение λ_0 не является его корнем тогда и только тогда, когда для всех i, $1 \leq i \leq n$, кратности ν_i корня λ_0 многочленов $\Delta_i(\lambda)$ не меньше кратности ν корня λ_0 многочлена $\Delta(\lambda)$. Поскольку из леммы 1 следует, что серии с собственным значением λ_0 относительно преобразования $\mathbf{A}$ включают ν линейно независимых векторов, то теорема 1 окажется справедливой, если будет доказана

Теорема 2. *Для того чтобы существовали серии с собственным значением λ_0 относительно преобразования $\mathbf{A}_1$, состоящие из ν линейно независимых векторов, ортогональных вектору $\mathbf{a}$, необходимо и достаточно выполнения всех неравенств $\nu_i \geq \nu$, $i = \overline{1,n}$.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим систему векторов из указанных в формулировке теоремы серий через $X = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{\nu}$, причем векторы каждой серии занумеруем последовательно. Выберем произвольно i, $1 \leq i \leq n$. Оператор $\mathbf{B}_i(\lambda)$ отображает линейную оболочку системы X независимо от λ в линейную оболочку системы $Y = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^{\nu}$ ортогональных проекций векторов системы X на гиперплоскость S_i. Значит, если система Y линейно зависима, то $\Delta_i(\lambda) \equiv 0$, поскольку система X линейно независима. Пусть система Y линейно независима. Дополним обе системы произвольным образом до базисов $X_S = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-1}$ и $Y_S = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^{n-1}$ пространства S. Матрица преобразования $\mathbf{B}_i(\lambda)$, если векторы, к которым оно применяется, задаются в базисе X_S, а их образы — в базисе Y_S, имеет вид

$$U_i(\lambda) = \begin{pmatrix} J_1 - \lambda E^{(1)} & & & & u_{1,\nu+1} & \dots & u_{1,n-1} \\ & J_2 - \lambda E^{(2)} & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & & & \\ & & & J_q - \lambda E^{(q)} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & & \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_{n-1,\nu+1} & \dots & u_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

где J_k, $k = \overline{1,q}$, — жордановы клетки с собственным значением λ_0, $E^{(k)}$ — единичные матрицы соответствующего порядка, при этом $U_i(\lambda) = VB_i(\lambda)W$, где V и W — некоторые невырожденные матрицы. Отсюда следует, что кратность ν_i корня λ_0 многочлена $\det B_i(\lambda)$ не меньше ν. В силу произвольности i необходимость доказана.

Достаточность. Используем следующие три леммы.

Пусть $\mathfrak{I}(\lambda_0)$ — матрица размера $n(n-1) \times (n-1)^2$ вида

$$\mathfrak{I}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} D(\lambda_0) & F_1 & & & \\ & D(\lambda_0) & F_1 & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & D(\lambda_0) & F_1 \\ & & & & D(\lambda_0) \end{pmatrix},$$

где $D(\lambda_0)$ — матрица размера $n\times(n-1)$, получаемая из матрицы $\lambda_0 E_0 - A$ отбрасыванием первого столбца, F_1 — матрица, получаемая приписыванием к матрице E_1 первой строки, все элементы которой равны 0. Обозначим через $\mathfrak{I}_i(\lambda_0)$, $i = \overline{1,n}$, матрицы, получаемые отбрасыванием из $\mathfrak{I}(\lambda_0)$ строк с номерами соответственно $i + jn$, $j = \overline{0,n-2}$.

Лемма 2. *Размерность ядра матрицы $\mathfrak{I}_i(\lambda_0)$, $1 \leq i \leq n$, не меньше ν_i.*

Доказательство. Пусть $i = 1$. Тогда, поскольку кратность корня λ_0 многочлена $\Delta_1(\lambda) = \det(A_1 - \lambda E_1)$ равна ν_1, то, учитывая лемму 1 и равенство $A_1 - \lambda E_1 = B_1(\lambda)$, получаем, что существует такая система $\{\mathbf{x}_k^{(j)}\}$, $j = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,p_j}$, $\sum\limits_{j=1}^{s} p_j = \nu_1$, из векторов пространства S, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_1^{(j)} \neq 0, \\ &\mathbf{B}_1(\lambda_0)\mathbf{x}_1^{(j)} = 0, \\ &\mathbf{B}_1(\lambda_0)\mathbf{x}_k^{(j)} = \mathbf{x}_{k-1}^{(j)}, \quad k = 2, \dots, p_j. \end{aligned}$$

Построим сходную систему соотношений для $i \geq 2$. Выберем произвольную матрицу $B_i(\lambda)$, $2 \leq i \leq n$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $a_{1i} \neq 0$, что равносильно условию $\mathbf{e}_i \notin S_a$. Определим произвольный базис $X = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-2}$ гиперплоскости S_a. Система векторов $Y = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^{n-2} = \{\mathbf{P}_i\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-2}$ линейно независима в силу $\mathbf{e}_i \notin S_a$. Определим ее как базис гиперплоскости S_i. Матрица сужения $\mathbf{C}_i(\lambda) : S_a \to S_i$ оператора-функции $\mathbf{B}_i(\lambda)$ в выбранных базисах пространств S_a и S_i имеет вид $A_2 - \lambda E_2$, где A_2 — некоторая $(n-2)$-матрица. Заметим, что вектор $\mathbf{B}_i(\lambda)\mathbf{e}_i$ не зависит от λ и в силу $a_{1i} \neq 0$ не принадлежит S_i. Обозначим $\boldsymbol{\xi}_{n-1} = \mathbf{e}_i$ и $\boldsymbol{\eta}_{n-1} = \mathbf{B}_i(\lambda)\mathbf{e}_i$, тогда системы векторов $X_S = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-1}$ и $Y_S = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^{n-1}$ являются базисами пространства S. Если векторы, к которым применяется преобразование $\mathbf{B}_i(\lambda)$, задаются в базисе X_S, а их образы — в базисе Y_S, то матрица $U_i(\lambda)$ преобразования $\mathbf{B}_i(\lambda)$ получается из матрицы $A_2 - \lambda E_2$ приписыванием справа столбца и строки, на пересечении которых находится 1, а остальные элементы равны 0. Поскольку $\det(A_2 - \lambda E_2) = \det U_i(\lambda) = \det V \det B_i(\lambda) \det W$, где V и W — некоторые невырожденные матрицы, то кратность корня λ_0 многочлена $\det(A_2 - \lambda E_2)$ равна ν_i. Согласно лемме 1 существует система из ν_i линейно независимых $(n-2)$-мерных столбцов $\{x_k^{(j)}\}$, $j = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,p_j}$, $\sum\limits_{j=1}^{s} p_j = \nu_i$, связанных соотношениями

$$\begin{aligned} &x_1^{(j)} \neq 0, \\ &A_2 x_1^{(j)} = \lambda_0 x_1^{(j)}, \\ &A_2 x_k^{(j)} = \lambda_0 x_k^{(j)} + x_{k-1}^{(j)}, \quad k = 2, \dots, p_j. \end{aligned}$$

Пусть в пространствах S_a и S_i системы векторов $\{\mathbf{x}_k^{(j)}\}$ и $\{\mathbf{y}_k^{(j)}\}$ соответственно задаются столбцами $\{\mathbf{x}_k^{(j)}\}$ в соответствующих базисах X_S и Y_S. Рассматривая векторы систем $\{\mathbf{x}_k^{(j)}\}$ и $\{\mathbf{y}_k^{(j)}\}$ как элементы пространства S и учитывая, что $\mathbf{y}_k^{(j)} = \mathbf{P}_i\mathbf{x}_k^{(j)}$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^{(j)} \neq 0, \\ &\mathbf{B}_i(\lambda_0)\mathbf{x}_1^{(j)} \neq 0, \\ &\mathbf{B}_i(\lambda_0)\mathbf{x}_k^{(j)} = \mathbf{P}_i\mathbf{x}_{k-1}^{(j)}, \quad k = 2, \dots, p_j. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Пусть теперь $a_{1i} = 0$. Выберем систему $X = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-3}$ линейно независимых векторов в гиперплоскости S_a так, чтобы вектор $\mathbf{e}_i$ не принадлежал ее линейной оболочке. Система векторов $Y = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^{n-3} = \{\mathbf{P}_i\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-3}$ тоже линейно независима. Обозначим $\xi_{n-2} = \eta_{n-2} = \mathbf{a}$ и $\xi_{n-1} = \eta_{n-1} = \mathbf{e}_i$, тогда системы векторов $X_S = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-1}$ и $Y_S = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^{n-1}$ линейно независимы и, следовательно, являются базисами пространства S. Матрица $Q_i(\lambda)$ преобразования $\mathbf{B}_i(\lambda)$ при задании векторов, к которым применяется преобразование $\mathbf{B}_i(\lambda)$, в базисе X_S, а их образов — в базисе Y_S, примет вид

$$Q_i(\lambda) = \begin{pmatrix} q_{11} - \lambda & q_{12} & \dots & q_{1,n-3} & q_{1,n-2} & q_{1,n-1} \\ q_{21} & q_{22} - \lambda & \dots & q_{2,n-3} & q_{2,n-2} & q_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n-3,1} & q_{n-3,2} & \dots & q_{n-3,n-3} - \lambda & q_{n-3,n-2} & q_{n-3,n-1} \\ q_{n-2,n-1} & q_{n-2,2} & \dots & q_{n-2,n-3} & q_{n-2,n-2} - \lambda & q_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q_{n-1,n-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $q_{n-1,n-2}q_{n-2,n-1} \neq 0$, то, рассматривая сужение оператора $\mathbf{B}_i(\lambda)$ аналогично тому, как это делалось в случае 1, получаем, что и в случае $a_{1i} = 0$ существует система $\{\mathbf{x}_k^{(j)}\}$ векторов пространства S, удовлетворяющая соотношениям (3). Если $q_{n-2,n-1} = 0$, повторяем рассуждения случая 2 в пространстве размерности, меньшей на 1.

Завершение доказательства одинаково для всех $1 \le i \le n$. Пусть определены векторы $\{\mathbf{x}_k^{(j)}\}$, $j = \overline{1, s}$, $k = \overline{1, p_j}$, $\sum\limits_{j=1}^{s} p_j = \nu_i$. В базисе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=2}^{n}$ пространства S пусть $\mathbf{x}_k^{(j)} = (x_{k1}^{(j)}, x_{k2}^{(j)}, \ldots, x_{k\ n-1}^{(j)})$. Тогда решениями системы $\mathfrak{I}_i(\lambda_0)\xi = 0$ являются ν_i векторов

$$\boldsymbol{\xi}_k^{(j)} = (x_{k1}^{(j)}, x_{k2}^{(j)}, \ldots, x_{k\ n-1}^{(j)}, x_{k-1\ 1}^{(j)}, x_{k-1\ 2}^{(j)}, \ldots, x_{k-1\ n-1}^{(j)}, \ldots, x_{11}^{(j)}, x_{12}^{(j)}, \ldots, x_{1\ n-1}^{(j)}, 0, 0, \ldots, 0),$$

линейная независимость которых следует из линейной независимости векторов $\mathbf{x}_k^{(j)}$. Таким образом, размерность ядра матрицы $\mathfrak{I}_i(\lambda_0)$ не меньше ν_i. $\square$

Лемма 3. *Пусть задана матрица C размера $(k+1)m \times km$ вида*

$$C = \begin{pmatrix} D & F_k & & & \\ & D & F_k & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & D & F_k \\ & & & & D \end{pmatrix},$$

где D — произвольная матрица размера $(k+1)\times k$, F_k — матрица, получаемая приписыванием к матрице E_k первой строки, все элементы которой равны 0. Пусть матрицы C_j, $j = \overline{1, k+1}$, получаются из матрицы C отбрасыванием m строк с номерами соответственно $j + l(k+1)$, $l = \overline{0, m-1}$. Тогда, если ранги всех матриц C_j, $j = \overline{1, k+1}$, не превышают r, то и ранг C не превышает r.

Доказательство. Пронумеруем строки матрицы C снизу вверх. Системы строк с номерами от $(p-1)(k+1)+1$ до $p(k+1)$, $p = \overline{1, m}$, обозначим соответственно через Q_p. Пусть $R_l = \bigcup\limits_{p=1}^{l} Q_p$. Ранг любой системы R_l, $1 \le l \le m$, равен рангу системы из lk левых столбцов матрицы C. Значит, $\operatorname{rank} R_{l+1} - \operatorname{rank} R_l \le k$, $1 \le l \le m-1$. Будем называть соответствующими строки матрицы C, номера которых отличаются на число, кратное $(k+1)$. Выберем линейно независимую подсистему T_1 системы Q_1 такую, чтобы ее ранг был равен рангу Q_1. Поскольку $\operatorname{rank} Q_1 = \operatorname{rank} R_1 \le k$, то система T_1 состоит не более чем из k векторов. Дополним ее соответствующими строками из Q_2. Линейная независимость при этом, очевидно, сохранится. Дополним полученную систему, сохраняя линейную независимость, если нужно, еще несколькими строками из системы Q_2 так, чтобы ранг новой системы был равен рангу R_2, и назовем полученную теперь систему T_2. Она включает не более k строк системы Q_2, поскольку $\operatorname{rank} T_2 - \operatorname{rank} T_1 = \operatorname{rank} R_2 - \operatorname{rank} R_1 \le k$. Если $m \ge 3$, то дополним систему T_2 строками системы Q_3, соответствующими входящим в T_2 строкам системы Q_2, и затем, если нужно, еще несколькими строками из Q_3 так, чтобы ранг полученной системы был равен рангу R_3. Полученную систему назовем T_3. Она включает не более k строк из системы Q_3, и некоторые из соответствующих им строк из Q_2 и Q_1. Если $m \ge 4$, продолжим процесс построения систем T_l аналогичным образом, пока не получим такую подсистему T_m системы R_m всех строк матрицы C, что $\operatorname{rank} T_m = \operatorname{rank} R_m = \operatorname{rank} C$ и T_m является подсистемой системы всех строк некоторой матрицы C_j, $1 \le j \le k+1$. Лемма следует из существования такой системы T_m. $\square$

Лемма 4. *Существуют серии относительно собственного значения λ_0 преобразования $\mathbf{A}_1$, принадлежащие гиперплоскости S_a, состоящие из линейно независимых векторов, число которых не меньше размерности ядра матрицы $\mathfrak{I}(\lambda_0)$.*

Доказательство. Обозначим $d = \dim\ker\mathfrak{I}(\lambda_0)$. Выберем произвольную систему $\{\xi_j\}_{j=1}^{d}$ линейно независимых столбцов, являющихся решениями системы $\mathfrak{I}(\lambda_0)\xi = 0$. Рассмотрим систему $(n-1)$-мерных столбцов $\{x_j\}_{j=1}^{d}$, компоненты которых равны компонентам с теми же номерами соответствующих столбцов системы $\{\xi_j\}_{j=1}^{d}$. Заметим, что каждый из столбцов x_j, $j = \overline{1, d}$, является либо собственным, либо присоединенным столбцом матрицы A_1. Докажем, что столбцы системы $\{x_j\}_{j=1}^d$ линейно независимы. Действительно, если некоторая нетривиальная линейная комбинация столбцов этой системы равна нулю, то равны нулю и линейные комбинации с теми же коэффициентами соответствующих столбцов всех систем $\{(A_1 - \lambda_0 E_1)^p x_j\}_{j=1}^d$, $1 \le p \le n-2$. Поскольку компоненты столбцов этих систем равны компонентам соответствующих столбцов системы $\{\xi_j\}_{j=1}^d$ с номерами, большими на $p(n-1)$, то равна нулю и линейная комбинация с теми же коэффициентами столбцов системы $\{\xi_j\}_{j=1}^d$, что невозможно по определению этой системы. Итак, столбцы x_j, $j = \overline{1,d}$, линейно независимы. По виду матрицы $\mathfrak{I}(\lambda_0)$ заметим, что все векторы, задаваемые в естественном базисе пространства S столбцами системы $\{x_j\}_{j=1}^d$, являются собственными и присоединенными векторами оператора $\mathbf{A}_1$, отвечающими собственному значению λ_0, при этом они включаются в серии, принадлежащие гиперплоскости S_a. Поэтому линейная оболочка S_d серий с собственным значением λ_0 относительно преобразования $\mathbf{A}_1$, принадлежащих гиперплоскости S_a, имеет не меньше чем d измерений. Поскольку линейная оболочка серий с каждым собственным значением относительно некоторого линейного преобразования инвариантно относительно этого линейного преобразования ([2], с. 366–374), то пространство S_d имеет точно одно собственное значение λ_0, кратность которого не меньше d. Значит, согласно лемме 1 существуют серии относительно собственного значения λ_0 сужения A_0 преобразования $\mathbf{A}_1$ на пространство S_d, состоящие из линейно независимых векторов, число которых не меньше d, откуда следует лемма, поскольку $\mathbf{A}_0$ — сужение преобразования $\mathbf{A}_1$ и S_d — подпространство пространства S_a. $\square$

Продолжим доказательство достаточности в теореме 2. Пусть имеют место неравенства $\nu_i \ge \nu$, $i = \overline{1,n}$. Согласно лемме 2 $\dim\ker \mathfrak{I}_i(\lambda_0) \ge \nu_i$, $1 \le i \le n$, значит, $\operatorname{rank} \mathfrak{I}_i(\lambda_0) \le n\nu - \nu_i \le n\nu - \nu$. Применяя лемму 3 к матрице $\mathfrak{I}(\lambda_0)$ и ее подматрицам $\mathfrak{I}_i(\lambda_0)$, $i = \overline{1,n}$, получаем $\operatorname{rank} \mathfrak{I}(\lambda_0) \le n\nu - \nu$, т. е. $\dim\ker \mathfrak{I}(\lambda_0) \ge \nu$. Значит, согласно лемме 4 серии с собственным значением λ_0 относительно преобразования $\mathbf{A}_1$, принадлежащие гиперплоскости S_a, включают не менее ν векторов. Достаточность доказана, тем самым доказана теорема 2, а с ней и теорема 1.

Из теоремы 1 очевидным образом следует критерий устойчивости первой компоненты системы (1).

Следствие. Первая компонента $x_1(t)$ решения системы (1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все корни многочлена $\Delta(\lambda)/\delta(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

Литература

1. Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – 4-е изд. – Ижевск, 2000. – 368 с.
2. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – 6-е изд. – М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 400 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра.* – М.: Наука, 1974. – 296 с.

Пермский государственный технический университет

Поступила 22.03.2002