ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 519.214

М.Д. ЮДИН

ОБ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ КОЛМОГОРОВА НА СУММЫ ЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ

Метод решения центральной предельной проблемы теории вероятностей, подробно изложенный в [1], легко распространяется на суммы зависимых векторов. Будем предполагать, что случайные векторы имеют ограниченные дисперсии. Этот случай исследовался в [2]. Однако в [2] в формуле Колмогорова, обобщенной на суммы зависимых векторов, неверно указан предел подинтегральной функции при $x \to 0$. Как показано в [3], этот предел зависит от пути стремления x к нулю и выражается через скалярное произведение вектора-параметра t на единичный вектор e, направленный по касательной к пути в точке подхода: $\lim\limits_{x\to 0}\big(-\frac{(t,x)^2}{2|x|}\big)$. Тем не менее, из результатов [2], [3] следует, что в обобщенной формуле Колмогорова подинтегральная функция интегрируема в окрестности нуль-вектора, поставляя оттуда нормальный компонент.

В данной работе получаем обобщенную на суммы зависимых векторов формулу Колмогорова, в которой из области интегрирования исключен нуль-вектор.

1. Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, — система серий d-мерных векторов, определенных при каждом n на одном и том же вероятностном пространстве и принимающих значения в R^d, $\xi_{ns}=(\xi_{ns}^{(1)},\dots,\xi_{ns}^{(d)})$, $M\xi_{ns}^{(i)}=0$, $x=(x_1,\dots,x_d)$. Запись $\xi_{ns}\le x$ означает, что $\xi_{ns}^{(i)}\le x_i$ для всех $i=\overline{1,d}$ ([4], с. 30), (x,y) — скалярное произведение, $|x|$ — модуль вектора (норма).

Обозначим: $S_{n(s,p)}=\xi_{n(s+1)}+\dots+\xi_{np}$, $S_{n(p,p)}\equiv 0$, M_{ns} — σ-алгебра вектора ξ_{ns}, $t=(t_1,\dots,t_d)$. Обобщим специальные функции, введенные в [1],

$$f(t;M_{ns})=\frac{M(\exp i(t,S_{n(s,n)}/M_{ns}))}{M(\exp i(t,S_{n(s,n)}))},\qquad \varphi_{ns}=M(e^{i(t,\xi_{ns})}f(t;M_{ns})),\quad s=\overline{1,n}.$$

Получим, что характеристическая функция (х. ф.) суммы $S_n=\sum\limits_{s=1}^{n}\xi_{ns}$

$$\varphi_n(t)=\prod_{s=1}^{n}\varphi_{ns}(t).$$

Условие (А). При любом фиксированном t

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_{ns}(t)-1|^2=0. \tag{A}$$

Введем симметричную матрицу $B_n=\|b_{n(i,j)}\|$, $i,j=\overline{1,d}$, где $b_{n(i,j)}=\sum\limits_{0\le|s-p|\le m_n}M(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};\ |\xi_{ns}|\le\varepsilon,\ |\xi_{np}|\le\varepsilon)$, m_n определяется в теореме 1, $\varepsilon>0$. Через $h(n)$ обозначим медленно меняющуюся функцию ([5], с. 36).

Напомним, что система серий $\{\xi_{ns}\}$ называется m_n-зависимой, если $(\xi_{n1},\dots,\xi_{np})$ и $(\xi_{n(p+k)},\dots,\xi_{nn})$ независимы при $k\ge m_n$.

Теорема 1. *Пусть система серий векторов* $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$*-зависимая, где* m_0 *— любое постоянное число,* $0 < \rho \le 1/8$*, кроме того, найдутся постоянные* H_1*,* H_2 *и* n_0 *такие, что при* $n \ge n_0$

$$\max_{s,i} M\xi_{ns}^{(i)^2} \le \frac{H_1 h(n)}{n}, \qquad \max_{s,r,q,i,j,k} M|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{nr}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}| \le \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}}, \tag{1}$$

где $0 \le |r-q| \le m_0 n^{1/4-\rho}$*,* $0 < |s-q| \le m_0 n^{1/4-\rho}$*. Тогда, если при* $n \to \infty$

$$K_n(x) = \sum_{s=1}^{n} M(\xi_{ns}^2;\ \xi_{ns} \le x) \xrightarrow{\text{сл.}} K(x) < \infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} B_n = B,$$

то сумма S_n *будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого*

$$\psi(t) = \int_{R^d} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x))\frac{1}{|x|^2}\, dK(x) - \frac{(t, Bt^*)}{2}, \tag{2}$$

где t^* *— вектор-столбец, а из области интегрирования исключен нуль-вектор.*

Доказательство. Сделаем разбиение суммы $S_n = \sum\limits_{s=1}^{n} \xi_{ns}$ по методу Бернштейна

$$u_{ni} = \sum_{s=(i-1)k+(i-1)m+1}^{ik+(i-1)m} \xi_{ns}, \qquad v_{ni} = \sum_{s=ik+(i-1)m+1}^{ik+im} \xi_{ns}, \quad i = \overline{1,\nu}. \tag{3}$$

Возьмем в разбиении (3) $k = [m_0 n^{1/4-\rho}]$, $m = [m_0 n^{1/8-\rho}]$, $0 < \rho \le 1/8$. Положим $S_{n1} = \sum\limits_{i=1}^{\nu} u_{ni}$, $S_{n2} = \sum\limits_{i=1}^{\nu} v_{ni}$. Поскольку

$$MS_{n2}^2 = \sum_{i=1}^{\nu} Mv_{ni}^2 \le \frac{H_1 \nu m^2 h(n) d^2}{n} \to 0, \quad \sum_{i=1}^{\nu m} M\xi_{ni}'^2 \le \frac{H_1 \nu m h(n) d}{n} \to 0, \tag{4}$$

где ξ'_{ni} — векторы, вошедшие в S_{n2}, то сумма S_n будет иметь то же предельное распределение, что и S_{n1} ([1], с. 44).

Будем доказывать теорему для суммы векторов, вошедших в S_{n1}, обозначив их в порядке возрастания индексов через η_{nj}, $j = \overline{1,l}$, $l = \nu k$, и положив $S_{n(j,p)} = \eta_{n(j+1)} + \cdots + \eta_{np}$. Благодаря m_n-зависимости, в функциях $f_{nj}(t; M_{nj})$ для системы $\{\eta_{nj}\}$ можно сделать сокращения. Получим

$$f_{nj}(t; M_{nj}) = \frac{M(\exp i(t, S_{n(j,p)}/M_{nj}))}{M(\exp i(t, S_{n(j,p)}))},$$

где $p = p(j)$ — индекс последнего вектора η_{np} той части u_{ni}, в которую вошел вектор η_{nj}. Используя разложения $e^{i(t,S_{n(j,p)})} = 1 + i(t, S_{n(j,p)}) - \frac{(t,S_{n(j,p)})^2}{2}\theta_{n1}$, $|\theta_{n1}| \le 1$, $e^{i(t,S_{n(j,p)})} = 1 + i(t, S_{n(j,p)})\theta_{n2}$, $|\theta_{n2}| \le 1$, и условия (1), совершенно так же, как при доказательстве теоремы 2.2 в ([1], с. 57), найдем, что система $\{\eta_{nj}\}$ удовлетворяет условию (A).

Образуем для системы $\{\eta_{nj}\}$ вектор-функции вектор-аргумента $a_{nj}(t) = M(\eta_{nj} f_{nj}(t; M_{nj}))$, $a_l(t) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{nj}(t)$ и $\varphi_{nj} = M(e^{i(t,\eta_{nj})} f(t; M_{nj}))$, $j = \overline{1,l}$. Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{l}(\varphi_{nj}(t) - 1) = \sum_{j=1}^{l}\int_{R^d}(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)) f_{nj}(t; M_{nj})\, dP\{\eta_{nj} \le x\} + i(t, a_l(t)). \tag{5}$$

Из (1), (4) и разложения $e^{i(t,x)} = 1 + i(t,x) - \frac{(t,x)^2}{2}\theta$, $|\theta| \le 1$, найдем, что при любом фиксированном t

$$J_l - \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{R^d} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x))\, dP\{\xi_{ns} \le x\} \to 0,$$

где J_l — первое слагаемое правой части (5). По свойствам интеграла Стилтьеса при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{s=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x))\, dP\{\xi_{ns} \le x\} = \int_{|x|\ge\varepsilon} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)) \frac{1}{|x|^2}\, dK_n.$$

Отсюда и из теоремы Хелли следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{R^d} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x))\, dP\{\xi_{ns} \le x\} = \int\limits_{R^d} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)) \frac{1}{|x|^2}\, dK(x),$$

где из области интегрирования исключен нуль-вектор.

Пусть матрица $C_n = \|c_{n(i,j)}\|$, где $c_{n(i,j)} = \sum\limits_{s=1}^{n} M(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{ns}^{(j)};\ |\xi_{ns}| \le \varepsilon)$ и $C = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{n\to\infty} C_n$. Из разложения

$$e^{i(t,x)} = 1 + i(t,x) - \frac{(t,x)^2}{2} + i\frac{(t,x)^3}{6}\theta, \quad |\theta| \le 1,$$

и равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \left(-\frac{(t,\xi_{ns})^2}{2};\ |\xi_{ns}| \le \varepsilon \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{(t, C_n t^*)}{2} \right)$$

получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} \int_{|x|\le\varepsilon} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x))\, dP\{\xi_{ns} \le x\} = -\frac{(t, Ct^*)}{2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} J_l = \int\limits_{R^d} (e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)) \frac{1}{|x|^2}\, dK(x) - \frac{(t, Ct^*)}{2}. \tag{6}$$

Пусть матрица $A_n = \|\sigma_{n(i,j)}\|$, где $\sigma_{n(i,j)} = \sum\limits_{0<|s-p|\le m_n} M\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)}$, $T^2 = \Big(\sum\limits_{i=1}^{d} t_i\Big)^2$. Из соотношений

$$\sum_{j=1}^{l} M|\eta_{nj}(t, S_{n(j,p)})^2| \le \frac{H_2 \nu k^3 h(n) T^2 d^2}{n^{3/2}} \to 0,$$

$$\sum_{j=1}^{l} M|\eta_{nj}(t, S_{n(j,p)})|\, |1 - M(\exp i(t, S_{n(j,p)}))| \le \frac{H_1^2 \nu k^4 h^2(n) T^3 d^3}{2n^2} \to 0,$$

а также из (4) следует, что $a_n(t) - i\sum\limits_{j=1}^{l} M(\eta_{nj}(t, S_{n(j,p)})) \to 0$, $(t, a_n(t)) - i\frac{(t, A_n t^*)}{2} \to 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} (t, a_n(t)) = i\frac{(t, At^*)}{2}, \tag{7}$$

где $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

При вычислении матрицы A_n можно ограничиться ε-окрестностью нуль-вектора, т. к.

$$\sum_{s=1}^{n} M(|\xi_{ns}(t, S_{n(s,p)})|;\ |\xi_{ns}| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} \sum_{s=1}^{n} M|\xi_{ns}^2(t, S_{n(s,p)})| \le \frac{H_2 n k^2 T h(n) d}{\varepsilon n^{3/2}} \to 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{n\to\infty} (A_n + C_n) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, то из (5), (6), (7) и леммы из [2] (аналогичной лемме 1.3 из [1]) следует доказательство теоремы. □

2. В этом пункте предполагается, что система векторов $\{\xi_{ns}\}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) [5].

Теорема 2. *Пусть система серий векторов $\{\xi_{ns}\}$ удовлетворяет условию р. с. п., коэффициент которого $\beta(\tau) = O(\tau^{-3-\varepsilon_1})$, $\varepsilon_1 > 0$, кроме того, найдутся постоянные H_1, H_2 и n_0 такие, что при $n \geq n_0$*

$$\max_{s,i} M\xi_{ns}^{(i)^2} \leq \frac{H_1}{n}, \qquad \max_{s,r,q,i,j,k} M|\xi_{ns}^{(i)}\xi_{nr}^{(j)}\xi_{nq}^{(k)}| \leq \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}},$$

где $0 \leq |r-q| \leq k_n = [n^{1/4-\rho/2}]$, $0 < |s-q| \leq k_n$, $0 < \rho \leq \frac{\varepsilon_1}{2(7+3\varepsilon_1)}$. Тогда, если $K_n(x) \xrightarrow{\text{сл.}} K(x) < \infty$ при $n \to \infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty} B_n \to B$, то сумма S_n будет иметь безгранично делимое предельное распределение, логарифм х. ф. которого выражается по формуле (2).

Здесь матрица $B_n = \|b_{n(i,j)}\|$, $b_{n(i,j)} = \sum\limits_{0\leq|s-p|\leq k_n} M(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};\ |\xi_{ns}| \leq \varepsilon,\ |\xi_{np}| \leq \varepsilon)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. При этом в разбиении (3) нужно взять $k = k_n$, $m = [n^{1/4-\rho}]$.

Следствие. В условиях теорем 1 и 2 матрица B неотрицательно определена.

Случай неограниченных дисперсий рассмотрен в [3].

Литература

1. Юдин М.Д. *Сходимость распределений сумм случайных величин.* – Минск: Изд-во “Университетское”, 1990. – 254 с.
2. Юдин М.Д. *О решении центральной предельной проблемы теории вероятностей для сумм зависимых векторов* // Весці АН Беларусі. Сер. фiз.-матэм. навук. – 1994. – № 3. – С. 31–35.
3. Юдин М.Д. *Об обобщении формулы Леви–Хинчина на суммы зависимых векторов* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 4. – С. 75–80.
4. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер.* – М.: Наука, 1977. – 352 с.
5. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. *Независимые и стационарно связанные величины.* – М.: Наука, 1965. – 524 с.

Мозырский государственный
педагогический институт

Поступила
19.11.1996