ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.929.4 : 519.21

Р.И. КАДИЕВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Работа посвящена распространению известной теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению на случай функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу. Для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений этот вопрос изучался в [1].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P)$ — стохастический базис ([2], гл. 1, § 1, с. 9); D^n — линейное пространство n-мерных предсказуемых ([2], гл. 1, § 1, с. 13) случайных процессов на $[0,\infty[$, траектории которых почти наверно (п.н.) непрерывны справа и имеют предел слева; k^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин; $Z = \mathrm{col}(z_1, \dots, z_m)$ есть m-мерный семимартингал ([2], гл. 1, § 1, с. 73); $L(Z)$ — линейное пространство предсказуемых $n \times m$-матриц на $[0,\infty[$, строки которых локально интегрируемы по семимартингалу Z [3]; $\lambda : [0,\infty[\to R_+$ — некоторая неубывающая функция; λ^* — мера, порожденная функцией λ; L_q^λ — линейное пространство скалярных функций на $[0,\infty[$, суммируемых со степенью q $(1 \leq q < \infty)$ по функции λ и ограниченных в существенном по мере λ^* при $q = +\infty$ $(L_q^t = L_q)$; R^n — линейное пространство n-мерных векторов с нормой $|\cdot|$; $\|\cdot\|$ — норма $k \times n$-матрицы, согласованная с нормой $|\cdot|$; $\|\cdot\|_X$ — норма в нормированном пространстве X; $1 \leq p < \infty$; E — символ математического ожидания.

Для заданного числа p и положительной скалярной функции $\gamma(t)$ $(t \in [0,\infty[)$ введем следующие линейные пространства:

$$M_p^\gamma = \{x : x \in D^n,\ \|x\|_{M_p^\gamma} \overset{\mathrm{def}}{=} (\sup_{t\geq 0} E|\gamma(t)x(t)|^p)^{1/p} < \infty\};$$

$$k_p^n = \{\alpha : \alpha \in k^n,\ \|\alpha\|_{k_p^n} \overset{\mathrm{def}}{=} (E|\alpha|^p)^{1/p} < \infty\}$$

и $M_p^1 = M_p$.

Если B — линейное подпространство пространства $L(Z)$ с нормой $\|\cdot\|_B$, то положим $B^\gamma = \{f : f \in B,\ \gamma f \in B\}$. Ясно, что B^γ — пространство с нормой $\|f\|_{B^\gamma} = \|\gamma f\|_B$.

Рассмотрим уравнение

$$dx(t) = [(Qx)(t) + g(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $g \in L(Z)$, а $Q : D^n \to L(Z)$ — k^1-линейный [4] оператор. Уравнение (1) рассматривается в предположении, что для любого $\alpha \in k^n$ существует единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение $x(t)$ с $x(0) = \alpha$. Для этого решения имеет место представление

$$x(t) = U(t)x(0) + (Wg)(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где $U(t)$ — фундаментальная матрица, а W — оператор Коши (k^1-линейный оператор, действующий из пространства $L(Z)$ в пространство D^n) для уравнения (1) [4].

Обозначим через D_p^n линейное пространство, определенное равенством (2) при $g \in B$, $x(0) \in k_p^n$. Здесь и в дальнейшем B — линейное нормированное подпространство пространства $L(Z)$. Таким образом, $D_p^n = WB \oplus Uk_p^n$. Если $D_p^n \subset M_p^\gamma$ при некоторой функции γ, то, очевидно, D_p^n —

линейное нормированное пространство. В дальнейшем будем предполагать, что $D_p^n \subset M_p^\gamma$ при некоторой функции γ и $\widehat{D}_p^n$ — замыкание пространства D_p^n.

Пусть $V : D_p^n \to B$ — k^1-линейный оператор. Если задача Коши

$$dx(t) = [(Vx)(t) + f(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$x(0) = \alpha \tag{4}$$

имеет единственное решение (с точностью до P-эквивалентности) $x \in D_p^n$ при любых $f \in B$ и $\alpha \in k_p^n$, то существуют такие k^1-линейные операторы $K : B \to D_p^n$, $X : k_p^n \to D_p^n$, что для решения задачи (3), (4) имеет место представление

$$x(t) = (Kf)(t) + X(t)\alpha, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Обозначим через $x_f(t,\alpha)$ решение задачи (3), (4), а через $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} W(V - Q)$ — k^1-линейный оператор, действующий из пространства D_p^n в пространство D_p^n. Тогда в силу эквивалентности задачи (3), (4) и уравнения $x(t) = U(t)\alpha + (\Theta x)(t) + (Wf)(t)$, $t \geq 0$, справедлива

Лемма 1. *Задача Коши* (3), (4) *имеет единственное решение $x \in D_p^n$ для каждой пары $\{f, \alpha\} \in B \times k_p^n$ тогда и только тогда, когда существует обратный оператор для оператора $(I - \Theta) : D_p^n \to D_p^n$.*

Отметим, что если $\|\Theta\|_{D_p^n \to D_p^n} < 1$ и оператор Θ действует из пространства $\widehat{D}_p^n$ в пространство D_p^n, то оператор $(I - \Theta) : D_p^n \to D_p^n$ обратим.

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (3) D_p^n-устойчиво, если задача (3), (4) имеет единственное решение $x_f(\cdot,\alpha) \in D_p^n$ при любых $f \in B$, $\alpha \in k_p^n$, и это решение непрерывно зависит от $\{f, \alpha\}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|x_{f_1}(\cdot,\alpha_1) - x_f(\cdot,\alpha_2)\|_{D_p^n} < \varepsilon$, если $\|f_1 - f\|_B < \delta$, $\|\alpha_1 - \alpha\|_{k_p^n} < \delta$.

Таким образом, D_p^n-устойчивость уравнения (3) — это корректная разрешимость задачи (3), (4).

Лемма 2. *Если уравнение* (3) *D_p^n-устойчиво, то для этого уравнения допустима пара* (M_p^γ, B) [4].

Доказательство. Пусть уравнение (3) D_p^n-устойчиво. Необходимо доказать допустимость пары (M_p^γ, B) для уравнения (3). Предположим противное, т.е. для уравнения (3) пара (M_p^γ, B) не является допустимой. Тогда хотя бы один из операторов $X : k_p^n \to D_p^n$ или $K : B \to D_p^n$ для уравнения (3) неограничен. Отсюда следует, что уравнение (3) не является D_p^n–устойчивым. Следовательно, предположение неверно, т.е. для уравнения (3) допустима пара (M_p^γ, B). $\square$

Обозначим через $D_p^n(V)$ линейное пространство решений задачи (3)–(4), определяемое равенством (5) при $f \in B$, $\alpha \in k_p^n$. Для D_p^n-устойчивого уравнения (3) имеет место $D_p^n = D_p^n(V)$. Это равенство характеризует определенные особенности асимптотического поведения решений уравнения (3) для начальных условий $x(0) \in k_p^n$ и $f \in B$. Отметим, что из D_p^n-устойчивости уравнения (3) следует также и M_p^γ-устойчивость [5] этого уравнения.

Распространяя сказанное на нелинейное уравнение

$$dx(t) = [(Nx)(t) + f(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

с оператором $N : D_p^n \to B$ ($f \in B$), можно определить D_p^n-устойчивость уравнения (6) как корректную разрешимость в пространстве D_p^n задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями

$$x(0) = \alpha, \tag{7}$$

где $\alpha \in k_p^n$. Однако такая устойчивость "в целом" — свойство исключительное для нелинейного уравнения и требует от оператора N условий, не выполнимых даже в простых случаях. В детерминированном случае это подтверждается, в частности, примером из [1]. Поэтому, как и в детерминированном случае, остановимся на вопросе об "устойчивости тривиального решения" уравнения, к которому, как известно, сводятся более общие случаи.

Аналогично случаю задачи (3), (4) через $x_f(t,\alpha)$ обозначим решение задачи (6), (7).

Определение 2. Пусть $(N0)(t) = 0$. Уравнение (6) назовем локально D_p^n-устойчивым, если можно указать такое $\delta_0 > 0$, что для каждой пары $\{f, \alpha\} \in B \times k_p^n$, удовлетворяющей условиям $\|f\|_B < \delta_0$, $\|\alpha\|_{k_p^n} < \delta_0$, задача (6)–(7) имеет единственное решение $x_f(\cdot,\alpha) \in D_p^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(x_f(\cdot,\alpha),\varepsilon) > 0$, что $\|x_{f_1}(\cdot,\alpha) - x_f(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n} < \varepsilon$, если $\|f_1 - f\|_B < \delta$, $\|\alpha_1 - \alpha\|_{k_p^n} < \delta$ и $\|f_1\|_B < \delta_0$, $\|\alpha_1\|_{k_p^n} < \delta_0$.

Отметим, что если уравнение (6) локально D_p^n-устойчиво, то тривиальное решение уравнения $dx(t) = (Nx)(t)dt$, $t \geq 0$, p-устойчиво, если $\gamma(t) = 1$, асимптотически p-устойчиво, если $\varliminf_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$, и экспоненциально p-устойчиво, если $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, $\beta > 0$.

Пусть $Nx = Vx + Fx$, где $V : D_p^n \to B$ — k^1-линейный оператор, а нелинейный оператор $F : \widehat{D}_p^n \to B$ обладает свойством $(F0)(t) = 0$. Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть уравнение* (3) D_p^n*-устойчиво и для любого* $k > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что*

$$\|Fx_2 - Fx_1\|_B \leq k\|x_2 - x_1\|_{D_p^n} \tag{8}$$

при всех $x_1, x_2 \in D_p^n$, $\|x_1\|_{D_p^n} \leq \delta$, $\|x_2\|_{D_p^n} \leq \delta$. *Тогда уравнение* (6) *локально* D_p^n*-устойчиво.*

Доказательство. Пусть $X : k_p^n \to D_p^n$, $K : B \to D_p^n$ — операторы, определяющие представление (5) решения задачи (3)–(4), $\widehat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \|X\|_{k_p^n \to D_p^n}$, $\widehat{c} \stackrel{\text{def}}{=} \|K\|_{B \to D_P^n}$. Задача Коши (6)–(7) эквивалентна уравнению

$$x(t) = (KFx)(t) + h(t), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

в пространстве D_p^n, если $h(t) = (Kf)(t) + X(t)\alpha$.

В силу условий теоремы для некоторого положительного $k < 1/\widehat{c}$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любых $x_i \in D_p^n$, $\|x_i\|_{D_p^n} \leq \varepsilon_0$, $i = 1,2$, имеет место неравенство (8). Таким образом, в шаре $\{\|x\|_{D_p^n} \leq \varepsilon_0\}$ при условии $\|h\|_{D_p^n} < \varepsilon_0(1 - \widehat{c}k)$ ввиду локального принципа Банаха о сжимающих отображениях ([6], 4.3.5) существует единственное решение $x \in \widehat{D}_p^n$ уравнения (9). В силу D_p^n-устойчивости уравнения (3) и действия оператора F из пространства $\widehat{D}_p^n$ в пространство B получим $x \in D_p^n$. Следовательно, задача (6)–(7) имеет единственное решение из пространства D_p^n при выполнении предыдущих условий. Кроме того, для решений $x_{f_i}(\cdot,\alpha)$ этой задачи при условии, что $\|f_i\|_B < \delta_0$, $\|\alpha_i\|_{k_p^n} < \delta_0$, $i = 1,2$, $\delta_0 = \varepsilon_0(1 - \widehat{c}k)/(\widehat{b} + \widehat{c})$, имеем

$$\|x_{f_2}(\cdot,\alpha) - x_{f_1}(\cdot,\alpha)\|_{D_p^n} \leq \|h_2 - h_1\|_{D_p^n}/(1 - \widehat{c}k) \leq (\widehat{c}\|f_2 - f_1\|_B + \widehat{b}\|\alpha_2 - \alpha_1\|_{k_p^n})/(1 - \widehat{c}k),$$

где $h_i = Kf_i + X\alpha_i$, $i = 1,2$. Отсюда следует непрерывная зависимость (по норме пространства D_p^n) решения x уравнения (9) от h при $\|h\|_{D_p^n} < \varepsilon_0(1 - \widehat{c}k)$, а также задачи (6)–(7) от f и α при $\|f\|_B < \delta_0$, $\|\alpha\|_{k_p^n} < \delta_0$. $\square$

Из доказательства теоремы 1 видно, что возможна также следующая ее редакция.

Теорема 1′. *Пусть уравнение* (3) D_p^n*-устойчиво,* $\widehat{c} \stackrel{\text{def}}{=} \|K\|_{B \to D_p^n}$ — *норма оператора Коши* $K : B \to D_p^n$ *этого уравнения,* $F : \widehat{D}_p^n \to B$, $(F0)(t) = 0$ *и существуют такие постоянные* $\delta > 0$, $0 < k < 1/\widehat{c}$, *что* $\|Fx_2 - Fx_1\|_B \leq k\|x_2 - x_1\|_{D_p^n}$ *для всех* $x_i \in D_p^n$, $\|x_i\|_{D_p^n} \leq \delta$, $i = 1,2$. *Тогда уравнение* (6) *локально* D_p^n*-устойчиво.*

Очевидно, не для любых уравнений вида (1) и подпространства B пространства $L(Z)$ будет выполняться условие $D_p^n \subset M_p^\gamma$ при некоторой функции γ. Рассмотрим некоторые уравнения вида (1) и подпространства B пространства $L(Z)$, для которых $D_p^n \subset M_p^\gamma$ при некоторой функции γ. Для этого в дальнейшем предположим, что семимартингал Z представим в виде $Z = b + c$, где b — предсказуемый случайный процесс локально ограниченной вариации, а c — локально квадратично интегрируемый мартингал ([1], гл. 1, § 1, с. 28). Кроме того, все компоненты процесса b и взаимные характеристики $\langle c^i, c^j\rangle$ ([2], гл. 1, § 8, с. 48) всех компонент мартингала c будем предполагать абсолютно непрерывными относительно меры, задаваемой функцией λ. Последнее означает, что

$$b^i = \int_0^\cdot a^i d\lambda, \quad \langle c^i, c^j\rangle = \int_0^\cdot A^{i,j} d\lambda \quad (i,j = 1,\ldots,m).$$

Пусть $a = \mathrm{col}(a^1,\ldots,a^m)$, $A = [A^{ij}]$ — $n\times m$-матрица. Известно [3], что в этом случае пространство $L(Z)$ состоит из предсказуемых $n \times m$-матриц H, для которых выполнено неравенство $\int\limits_0^t (|Ha| + \|HAH^T\|)d\lambda < \infty$ п.н. для любого $t \geq 0$ и $\int\limits_0^t H\,dZ = \int\limits_0^t H\,db + \int\limits_0^t H\,dc$. Кроме того, имеет место неравенство $(E|\int\limits_0^t H\,dZ|^{2p})^{1/2p} \leq (E(\int\limits_0^t |Ha|d\lambda)^{2p})^{1/2p} + c_p(E(\int\limits_0^t \|HAH^T\|d\lambda)^p)^{1/2p}$, где c_p — положительное число, зависящее от p ([2], гл. 1, § 9, с. 65).

Рассмотрим уравнение вида

$$dx(t) + \overline{\alpha}\xi(t)x(t)d\lambda(t) = g(t)dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{10}$$

где ξ — скалярная неотрицательная функция на $[0, +\infty[$, локально суммируемая по мере, задаваемой функцией λ, $\overline{\alpha}$ — некоторое положительное число. Разумеется, выбор подпространств B пространства $L(Z)$, для которых $D_p^n \subset M_p^\gamma$ при некоторой функции γ, существенно зависит от ξ и $\overline{\alpha}$. Рассмотрим примеры таких подпространств, являющихся разновидностью функциональных пространств со смешанной нормой. Пусть $1 \leq q \leq \infty$, обозначим через

$$\Lambda_{p,q}^n(\xi) = \{H : H \in L(Z),\ (E|Ha|^p)^{1/p}\xi^{1/q-1},\ (E\|HAH^T\|^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2} \in L_q^\lambda\}$$

линейное подпространство $L(Z)$ с нормой

$$\|H\|_{\Lambda_{p,q}^n(\xi)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|(E|Ha|^p)^{1/p}\xi^{1/q-1}\|_{L_q^\lambda} + \|(E\|HAH^T\|^{p/2})^{1/p}\xi^{1/q-1/2}\|_{L_q^\lambda}$$

($\Lambda_{p,q}^n(1) = \Lambda_{p,q}^n$). Тогда из теоремы 3 [4] следует, что если $B = (\Lambda_{2p,q}^n(\xi))^\gamma$, $\gamma(t) = \exp\{\beta\int\limits_0^t \xi(s)ds\}$, $\beta > 0$, то $D_{2p}^n \subset M_{2p}^\gamma$.

Применим вышеизложенное к уравнению Ито с “максимумом”. В этом случае $Z(t) = \mathrm{col}(t, \mathcal{W}^1(t),\ldots,\mathcal{W}^{(m-1)}(t))$, где $\mathcal{W}^i$ $(i = 1,\ldots,m-1)$ — независимые винеровские процессы и $\lambda(t) = t$, $a = \mathrm{col}(1,0,\ldots,0)$, $A = \mathrm{diag}\,[0,1,\ldots,1]$.

Рассмотрим уравнение вида

$$dx(t) = [(Vx)(t) + (Fx)(t) + f(t)]dZ(t), \quad t \geq 0, \tag{11}$$

где $f \in B$, $V : D_p^n \to B$ — k^1-линейный оператор, $Fx \stackrel{\mathrm{def}}{=} T\{x, S_1^\varphi x,\ldots,S_r^\varphi x\}$ и $F : \widehat{D}_p^n \to B$ — нелинейный оператор, а оператор S_d^φ определен равенством

$$S_d^\varphi x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{col}(S_d^{\varphi_1}x_1,\ldots,S_d^{\varphi_n}x_n),$$

где $(S_d^{\varphi_i}x_i)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{s\in[h_{id}(t),g_{id}(t)]}(E|\widehat{x}_i(s)|^{2p})^{1/2p}$,

$$\widehat{x}_i(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} x_i(s), & \text{если } s \geq 0;\\ \varphi_i(s), & \text{если } s < 0,\end{cases}$$

$x = \operatorname{col}(x_1, \dots, x_n)$, $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $h_{id}, g_{id} : [0, +\infty[\to R^1$ — измеримые по Лебегу функции такие, что $h_{id}(t) \le g_{id}(t)$ при всех $t \ge 0$, $\varphi_i :]-\infty, 0[\times \Omega \to R^1$ — случайный процесс с п.н. непрерывными траекториями, $\sup\limits_{t<0} (E|\varphi_i(t)|^{2p})^{1/2p} < \infty$ при $i = 1, \dots, n$, $d = 1, \dots, r$.

В дальнейшем в качестве уравнения (1) возьмем уравнение (10) с $\xi(t) \equiv t$, $t \ge 0$, $B = (\Lambda^n_{2p,\infty})^\gamma$, $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, $\beta \in [0, \overline{\alpha}[$, $B^1 = (L^n_\infty)^\gamma = \{f : f \in L^n_\infty,\ \gamma f \in L^n_\infty\}$ — линейное пространство с нормой $\|f\|_{B^1} = \|\gamma f\|_{L^n_\infty}$. Тогда по теореме 3 из [4] $D^n_{2p} \subset M^\gamma_{2p}$.

Замечание. Так как рассматривается уравнение Ито, то в дальнейшем все случайные процессы прогрессивно измеримы относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ ([2], гл. 1, § 1, с. 11). Ясно, что любой случайный процесс из пространства $\widehat{D}^n_{2p}$ прогрессивно измерим и его траектории п.н. непрерывны.

Лемма 3. *Для каждого случайного процесса $x \in \widehat{D}^n_{2p}$ и для каждого d $(1 \le d \le r)$ функция $S^\varphi_d x$ измерима.*

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство леммы 1 из [1]. При этом необходимо воспользоваться тем, что функция $(E|\widehat{x}|^{2p})^{1/2p}$ непрерывна справа, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Обозначим $S^0_d \overset{\text{def}}{=} S^\varphi_d$ при $\varphi = 0$, $d = 1, \dots, r$.

Лемма 4. *Пусть существует такое $\delta > 0$, что $0 \le t - h_{id}(t) \le \delta$ при всех $t \ge 0$ и всех $i = 1, \dots, n$, $d = 1, \dots, r$. Тогда при любом $\beta > 0$ для всех $x, y \in \widehat{D}^n_p$ справедливо неравенство*

$$\|S^0_d x - S^0_d y\|_{B^1} \le \exp\{\beta\delta\} \|x - y\|_{\widehat{D}^n_{2p}}, \quad d = 1, \dots, r. \tag{12}$$

Доказательство. В силу леммы 3 для любых $x \in \widehat{D}^n_{2p}$, d $(1 \le d \le r)$ функция $S^0_d x$ измерима. Более того, очевидно, что функция $S^0_d x$ принадлежит пространству B^1 при любом $\beta > 0$. Пусть $x, y \in \widehat{D}^n_p$, тогда $x(t) = \zeta_\beta(t) x_\beta(t)$, $y(t) = \zeta_\beta(t) y_\beta(t)$, где $\zeta_\beta(t) \overset{\text{def}}{=} \exp\{-\beta t\}$, $x_\beta, y_\beta \in M_{2p}$, $x_\beta = \operatorname{col}(x_{1\beta}, \dots, x_{n\beta})$, $y_\beta = \operatorname{col}(y_{1\beta}, \dots, y_{n\beta})$, $d_i(t) \overset{\text{def}}{=} |(S^0_d x_i)(t) - (S^0_d y_i)(t)| \exp\{\beta t\}$. Таким образом, для функции d_i при всех $t \ge 0$ имеем

$$\begin{aligned} d_i(t) &\le \exp\{\beta t\} |(S^0_d \zeta_\beta x_{i\beta})(t) - (S^0_d \zeta_\beta y_{i\beta})(t)| \le \exp\{\beta t\} (S^0_d \zeta_\beta |x_{i\beta} - y_{i\beta}|)(t) \le \\ &\le \exp\{\beta t\} (S^0_d \zeta_\beta)(t) (S^0_d |x_{i\beta} - y_{i\beta}|)(t) \le \exp\{\beta\delta\} (S^0_d |x_{i\beta} - y_{i\beta}|)(t) \end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, n$, $d = 1, \dots, r$. Тогда при $d = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned} \|S^0_d x - S^0_d y\|_{B^1} &\le \operatorname{vrai} \sup_{t \ge 0} (E|\operatorname{col}(d_1(t), \dots, d_n(t))|^{2p})^{1/2p} \le \\ &\le \exp\{\beta\delta\} \sup_{t \ge 0} (E|x_\beta(t) - y_\beta(t)|^{2p})^{1/2p} = \exp\{\beta\delta\} \|x - y\|_{\widehat{D}^n_p}. \quad \square \end{aligned}$$

Неравенство (12) позволяет применить теорему $1'$ к уравнению (11). Заметим, что если уравнение (3) D^n_{2p}-устойчиво, то оператор Коши K этого уравнения действует из пространства B в пространство D^n_{2p} и ограничен.

Пусть в дальнейшем оператор T действует из пространства $D^n_p \times (B^1)^r$ в пространство B. Тогда из теоремы $1'$ получим

Следствие. Пусть при некотором $\beta \in [0, \overline{\alpha}[$ уравнение (3) D^n_{2p}-устойчиво, $\widehat{c} \overset{\text{def}}{=} \|K\|_{B \to D^n_{2p}}$. Кроме того, $T\{0, \dots, 0\} = 0$ и существуют такие постоянные $\delta' > 0$, $\delta > 0$, $k_i > 0$ $(i = 0, \dots, r)$, что $t - h_{id}(t) \le \delta$ при всех $t \ge 0$ и всех $i = 1, \dots, n$, $d = 1, \dots, r$,

$$\|T\{u^2_0, \dots, u^2_r\} - T\{u^1_0, \dots, u^1_r\}\|_B \le k_0 \|u^2_0 - u^1_0\|_{D^n_{2p}} + \sum_{d=1}^r k_d \|u^2_d - u^1_d\|_{B^1}$$

для всех $u_0^i \in D_{2p}^n$, $\|u_0^i\|_{D_{2p}^n} \le \delta'$ для $i = 1,2$, $u_d^i \in B^1$, $\|u_d^i\|_{B^1} \le \delta'$ для $i = 1,2$, $d = 1,\dots,r$, причем $\widehat{c}\Big(k_0 + \exp\{\beta\delta\} \sum\limits_{d=1}^{r} k_d\Big) < 1$. Тогда при данном β уравнение $dx(t) = [(Vx)(t) + (T\{x, S_1^0 x, \dots, S_r^0 x\})(t) + f(t)]dZ(t)$, $t \ge 0$, локально D_{2p}^n-устойчиво.

В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение (11), в котором $(Vx)(t) = (-qx(t), 0, ..., 0)$, $(Fx)(t) = \Big(\sum\limits_{d=1}^{r_1} q_{1d}((S_{1d}^0 x)(t)), \dots, \sum\limits_{d=1}^{r_m} q_{md}((S_{md}^0 x)(t))\Big)$, $(S_{jd}^0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{s\in[h_{jd}(t), g_{jd}(t)]} (E|\widehat{x}(s)|^{2p})^{1/2p}$,

$$\widehat{x}(s) = \begin{cases} x(s), & \text{если } s \ge 0; \\ 0, & \text{если } s < 0, \end{cases}$$

$h_{jd}, g_{jd} : [0, +\infty[\to R^1$ — измеримые функции, $h_{jd}(t) \le g_{jd}(t)$ и $t - h_{jd}(t) \le \delta$ при всех $t \ge 0$ и некотором $\delta > 0$, q_{jd} — некоторая функция с $q_{jd}(0) = 0$ при $j = 1,\dots,m$, $d = 1,\dots,r_j$, q — некоторое положительное число.

В качестве (1) возьмем уравнение (10) с $\xi(t) = 1$, $t \ge 0$, $B = (\Lambda_{2p,\infty}^1)^\gamma$, $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$, $\beta \in [0, \overline{\alpha}[$. Тогда $D_{2p}^1 \subset M_{2p}^\gamma$, уравнение (3) D_{2p}^1-устойчиво при некотором $\beta \in [0, q[$ $(q < \overline{\alpha})$ и $\widehat{c} \stackrel{\text{def}}{=} \|K\|_{B \to D_{2p}^1} = 1/(q-\beta) + c_p(m-1)/(2(q-\beta))^{1/2}$. Кроме того, если для всех $u^2, u^1 \in B$ имеем $|q_{jd}(u^2) - q_{jd}(u^1)| \le \widehat{q}_{jd}|u^2 - u^1|$ при всех $j = 1,\dots,m$, $d = 1,\dots,r_j$ и выполнено неравенство

$$q/(1 + c_p(m-1)\sqrt{q/2}) > \sum_{d=1}^{r_1} \widehat{q}_{1d} + c_p \sum_{j=2}^{m} \sum_{d=1}^{r_m} \widehat{q}_{jd}^2 \stackrel{\text{def}}{=} A,$$

то при достаточно малом $\beta > 0$ выполняется неравенство $\widehat{c}\exp\{\beta\delta\}A < 1$, которое гарантирует в силу следствия при некотором $\beta > 0$ локальную D_{2p}^1-устойчивость уравнения (11).

Литература

1. Азбелев Н.В., Ермолаев М.Б., Симонов П.М. *К вопросу об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 10. – С. 3–9.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Теория мартингалов.* – М.: Наука, 1986. – 512 с.
3. Jacod J. *Integrales stochastiques par rapport a une cemimartingale vektorielle et changements de filtration* // Lect. Notes Math. – 1980. – V. 784. – P. 161–172.
4. Кадиев Р.И., Поносов А.В. *Устойчивость линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений при постоянно действующих возмущениях* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 198–207.
5. Кадиев Р.И. *Достаточные условия устойчивости стохастических систем* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 4. – С. 555–564.
6. Хатсон В., Пим Дж.С. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* – М.: Мир, 1983. – 432 с.

Дагестанский государственный университет

Поступила
29.10.1997