И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.982:517.5

Г.В. АРУТЮНЯНЦ

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть Θ — произвольное подмножество отрезка $[0;\pi/2]$. Обозначим через $\Re_\Theta$ совокупность прямоугольников на плоскости в направлениях из Θ. Введенная совокупность является дифференциальным базисом.

Рассмотрим теперь общую проблему о том, *как связаны область значений* $p \in [1;+\infty]$, *для которых базис* $\Re_\Theta$ *дифференцирует* $L^p(R^2)$, *с конкретным видом множества* Θ. При этом под дифференцированием класса будем понимать дифференцирование интегралов всех функций из данного класса.

Классическая теорема Б. Йессена, Ю. Марцинкевича и А. Зигмунда [1] влечет дифференцируемость $L\log^+ L$, если Θ — конечное множество. Позже А. Зигмунд заметил, что если $\Theta = [0;\pi/2]$, то $\Re_\Theta$ не является даже плотностным, т. е. $\Re_\Theta$ не дифференцирует L^∞. В рамках тех же рассуждений можно получить и более сильный результат. *Пусть* $\Theta \subset [0;\pi/2]$ *и замыкание этого множества имеет положительную меру. Тогда* $\Re_\Theta$ *также является неплотностным* ([2], с. 228). Таким образом, интерес представляет случай, когда замыкание множества Θ имеет нулевую меру.

Пример бесконечного множества Θ с хорошими свойствами $\Re_\Theta$ впервые был предложен в [3], где рассмотрен случай, когда Θ является лакунарной последовательностью, например, $\Theta = \{\pi 2^{-k}\}_{k=1}^{\infty}$. Используя оригинальную геометрическую идею, Й. Стремберг доказал, что $\Re_\Theta$ дифференцирует $L^2(\log^+ L)^{4+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Позже в [4] было показано, что $\Re_\Theta$ дифференцирует L^2. Наконец в [5] было доказано, что $\Re_\Theta$ дифференцирует L^p, $p > 1$. Предложенный в [5] подход основан на современных достижениях анализа Фурье таких, как интерполяция в пространствах со смешанной нормой (так называемый "bootstrap argument"), рандомизация, теорема Марцинкевича о мультипликаторах Фурье и пр. Вопрос о геометрическом доказательстве теоремы А. Нагеля, И. Стейна и С. Вейенгера [5] является важной открытой проблемой. Ее решение позволило бы найти точный класс дифференцирования. Пока лишь известно, что этот класс не шире, чем $L\log^2 L$.

Результаты из [5] были обобщены в [6], где рассматривались множества, получаемые путем итераций лакунарных направлений. Было показано, что в случае конечных итераций соответствующий базис $\Re_\Theta$ также дифференцирует L^p, $p > 1$. В случае бесконечных итераций соответствующее множество Θ приобретает вид Канторова множества, которое можно записать в форме

$$\Theta = \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \omega_i, \;\; \varepsilon_i \in \{0,1\}; \;\; \omega_n > 0; \;\; \sum_{i=n+1}^{\infty} \omega_i < \omega_n, \;\; n \in N; \;\; \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i = \pi/2 \Big\}.$$

В [6] доказано, что если $\omega_{n+1}/\omega_n = q$, $0 < q < 1/2$, $n \in N$, то $\Re_\Theta$ не дифференцирует L^p, где

$$p < 1 + \log 2 / \log q^{-1}.$$

Классическое Канторово множество на $[0;\pi/2]$ получается, если $\omega_{n+1}/\omega_n = 1/3$, $n \in N$.

В данной статье изучается предельный случай $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n = 1/2$. Показывается (теорема 1), что соответствующий базис не является плотностным.

Определим максимальный оператор $\mathcal{M}_\Theta f$ по правилу

$$(\mathcal{M}_\Theta f)(x) = \sup_{x \in I \subset \Re_\Theta} |I|^{-1} \int_I |f(y)|\, dy,$$

где $f \in L_{\mathrm{loc}}(R^2)$.

В [7] доказано, что в случае классического Канторова множества соответствующий дифференциальный базис $\Re_\Theta$ не дифференцирует L^p, $1 \le p \le 2$.

Такое альтернативное поведение дифференциальных свойств базисов $\Re_\Theta$ позволяет высказать предположение: *либо базис $\Re_\Theta$ дифференцирует L^2, либо не является плотностным.*

Доказательство теоремы 1 основано на изучении арифметической структуры множеств Канторового типа. А именно, выбирается некоторая регулярная последовательность направлений, для которой используется конструкция Безиковича. Несмотря на то, что используются относительно элементарные рассуждения, полученный результат может быть применен в достаточно нетривиальных вопросах, например, в теории мультипликаторных операторов Фурье (теорема 2). Отметим, что вопрос об арифметической природе эффектов, наблюдаемых в теории мультипликаторов, достаточно часто обсуждается в различных работах. В частности, интересные рассуждения можно найти в ([8] и [9], с. 162).

Теорема 1. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

то $\Re_\Theta$ не является плотностным.

Пусть $\widehat{R}$ — произвольный прямоугольник на плоскости. Продлим пару его сторон в обе стороны, а также проведем два отрезка параллельных паре других сторон прямоугольника $\widehat{R}$, таким образом, чтобы получилось три прямоугольника одинаковой меры. Обозначим через R средний прямоугольник, а через $\widetilde{R}$ — объединение двух оставшихся. В этих терминах сформулируем основную лемму, из которой теорема 1 получается стандартными рассуждениями (см. [2], с. 370).

Лемма 1. *Пусть $\Theta = \{\Theta_n\}_{n=1}^\infty$, $\Theta_n \downarrow 0$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} = 1. \tag{2}$$

Тогда для некоторого $q > 0$ и любого $\eta > 0$ можно найти множество E и прямоугольники $\{R_k\}_{k=1}^m$ со следующими свойствами:

(i) *направление $R_s \in \Theta$, $s = 1, \ldots, m$,*

(ii) $|E| \le \eta \sum\limits_{k=1}^m |R_k|$,

(iii) $|\widetilde{R}_k \cap E| \ge q|\widetilde{R}_k|$, $|R_i \cap R_j| = \emptyset$, $i \ne j$.

Из последних трех свойств следует, что для некоторого $q > 0$ можно найти последовательность множеств $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{(\mathcal{M}_\Theta \chi_{E_n})(x) > q\}|}{|E_n|} = \infty. \tag{3}$$

Используя (3) и критерий Буземана–Феллера [10], устанавливаем, что базис $\Re_\Theta$ не является плотностным.

Лемма 1 является модификацией леммы Ч. Феффермана из [11]. Она была получена А.М. Стоколосом [12] при условии, что

$$\Theta_n \downarrow 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \Theta_{n+1}/\Theta_n = 1$$

и $\{\Theta_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ является выпуклой. Условия леммы 1 позволяют доказать ее, используя те же рассуждения.

Таким образом, необходимо доказать, что при условии (1) можно выбрать последовательность точек из Θ, обладающих свойством (2).

Лемма 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_{n+1}/\omega_n = 1/2$. *Тогда существует последовательность точек* $\{\Theta_n\}$ *из* Θ *такая, что* $\Theta_n \downarrow 0$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} = 1.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\alpha_n = \omega_{n+1}/\omega_n; \quad \widetilde{\alpha}_n = \inf(\alpha_i, i \geq n); \quad K_n = \Theta_n \cap [\gamma_{n+1}; \gamma_n], \quad n \in N,$$

где $\gamma_n \downarrow 0$, $\lim \gamma_{n+1}/\gamma_n = 1$, $\gamma_n \notin \Theta$. Заметим, что такая последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует, т.к. Θ нигде не плотно. Не ограничивая общности, можно считать $K_1 \neq \emptyset$. Пусть $\Theta_1 = \inf K_1$ и $\Theta_2, \ldots, \Theta_n$ уже выбраны. И пусть Θ_n принадлежит некоторому K_s, $s \in N$. Выберем Θ_{n+1} следующим образом:

(a) если $\Theta_n = \sup K_s$, то $\Theta_{n+1} = \inf K_s$;

(b) если $\Theta_n = \inf K_s$, то $\Theta_{n+1} = \sup \cup_{i=s+1}^{\infty} K_i$.

Очевидно, $\Theta_n \downarrow 0$, $\Theta_n \in \Theta$. Далее рассмотрим два случая.

1) Θ_n и Θ_{n+1} принадлежат одному множеству, например, K_p или двум соседним K_p, K_{p+1}. Тогда

$$1 \geq \frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} > \frac{\gamma_{p+1}}{\gamma_p},$$

и (2) следует из этой оценки.

2) В противном случае, используя геометрическую структуру множества Θ, отметим, что Θ_n и Θ_{n+1} являются концами интервала I, принадлежащего дополнению множества Θ. Тогда существуют $q = q(n)$, $n \in N$, и $\eta \geq 0$ такие, что

$$\Theta_n = \eta + \omega_q; \quad \Theta_{n+1} = \eta + \sum_{i=q+1}^{\infty} \omega_i.$$

Следовательно,

$$1 \geq \frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n} \geq \frac{\sum\limits_{i=q+1}^{\infty} \omega_i}{\omega_q} = \sum_{i=q+1}^{\infty} \prod_{j=q}^{i-1} \alpha_j = \sum_{i=q+1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_q^{i-q} = \sum_{s=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_q^{s} = \frac{\widetilde{\alpha}_q}{1-\widetilde{\alpha}_q}.$$

Осталось заметить, что $q = q(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Лемма 2 и теорема 1 доказаны.

Замечание. Если $\omega_n = 2^{-n}\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n = 1$, то по теореме 1 соответствующий базис $\Re_\Theta$ является неплотностным, однако нетрудно показать, что $\operatorname{mes}\Theta = 0$.

Укажем применение полученного результата в теории мультипликаторов. Определим в терминах преобразования Фурье мультипликаторный оператор $\widehat{T_E f(x)} = \chi_E(x)\widehat{f}(x)$, $f \in L^2 \cap L^p(R^2)$, $p > 1$, где E — измеримое множество. Говорят, что множество E является L^p-мультипликатором, если соответствующий мультипликаторный оператор ограничен в L^p.

Хорошо известно, что многоугольник с конечным числом сторон является L^p-мультипликатором для $1 < p < \infty$. С другой стороны, в [11] доказано, что единичный круг является мультипликатором только в тривиальном случае $p = 2$. Поэтому возник интерес к рассмотрению множеств, промежуточных в некотором смысле между обычным многоугольником и кругом ([2], с. 369; [12]).

Пусть Θ^* — периодическое продолжение Θ на $[0; 2\pi]$, а $\Phi = \{(\cos\phi, \sin\phi) : \phi \in \Theta^*\}$. Пусть P_Θ образован пересечением полуплоскостей, содержащих единичный шар, границы которых касаются единичной окружности в точках Φ. Очевидно, P_Θ является выпуклым многоугольником, стороны которого имеют нормали в направлении множества Канторового типа. Отсюда стандартной техникой ([2], с. 362; [11]) получается

Теорема 2. *Если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}=\frac{1}{2},$$

то T_{P_Θ} *ограничен только в* $L^2(R^2)$.

В заключение автор выражает благодарность А.М. Стоколосу за плодотворные обсуждения и полезные советы, а также П. Шегрену за интерес, проявленный к работе.

Литература

1. Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A. *Note on the differentiability of multiple integrals* // Fund. Math. – 1935. – V. 25. – P. 217–234.
2. De Guzman M. *Real variable methods in Fourier analysis.* – Amsterdam – N. Y.–Oxford: North-Holland Publ. – 1981. – 392 p.
3. Strömberg J.O. *Weak estimates on maximal functions with rectangles in certain directions* // Ark. Math. – 1977. – V. 15. – P. 229–240.
4. Cordoba A., Fefferman R. *On differentiation of integrals* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1977. – V. 74. – № 6. – P. 2211–2213.
5. Nagel A., Stein E.M., Wainger S. *Differentiation in lacunary directions* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1978. – V. 75. – P. 1060–1062.
6. Sjögren P., Sjölin P. *Littlewood–Paley decompositions and Fourier multipliers with singularities on certain sets* // Ann. Inst. Fourier. – 1981. – V. 31. – № 1. – P. 157–175.
7. Katz N.H. *Counterexamples for maximal operators over Cantor sets of directions* // Math. Research Letters. – 1996. – V. 3. – № 4. – P. 527–536.
8. Hare K.E., Klemes I. *Properties of Littlewood–Paley sets* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1989. – V. 83. – P. 485–495.
9. Edwards R.E., Gaudry G.I. *Littlewood–Paley and multiplier theory.* – Berlin: Springer, 1977. – 212 p.
10. Buseman H, Feller W. *Zur Differentiation das Lebesgueschen Integrale* // Fund. Math. – 1934. – Bd. 22. – S. 226–256.
11. Fefferman C. *The multiplier problem for the ball* // Ann. Math. – 1971. – V. 94. – № 2. – P. 330–336.
12. Стоколос А.М. *К вопросу М. Гусмана о мультипликаторах Фурье полигональных областей* // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 6. – С. 1392–1398.

Институт математики, экономики
и механики (г. Одесса, Украина)

Поступили
первый вариант 22.04.1997
окончательный вариант 22.04.1999