ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 514.763

М.Ш. ЯКУПОВ

КАНОНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

Продолжается исследование операторов в дискретном пространстве, начатое в [1]. В части II принимается сквозная нумерация разделов и формул, продолжающая нумерацию из части I.

Для векторных пространств над $\mathbb{D} = (\mathbb{K}, \mathbb{K}^*)$ рассматривается комплекс $C(\mathbb{D}; \delta)$, порожденный кодифференцированиями, строится каноническая система базисов КСБ(δ) по аналогии с КСБ(∂) для (ко)граничных ∂-отображений. Устанавливаются формулы перехода между этими двумя КСБ. Далее изучаются уравнения с кодифференцированиями, находятся обращения операторов кодифференцирований в КСБ(δ). Исследование дискретных операторов Лапласа проводится в КСБ(∂). Получены формулы обращения этих операторов, рассматриваются неполные операторы Лапласа. Найдены необходимые и достаточные условия существования дискретных гармонических полей. В заключение доказаны два предложения о восстановлении и разложении (ко)векторных полей, обобщающие и расширяющие область применения аналогичных теорем классического векторного анализа.

7. Каноническая система базисов

Кодифференцирования были определены в статье автора [2]

$$\begin{cases} \overset{p}{\delta} = \underset{p+1}{z} \circ \underset{p}{\partial} \circ \overset{p}{z} : C^p \to C^{p+1}; \quad \overset{p}{e} \to \overset{p}{\delta}\overset{p}{e} = \overset{p+1}{e} A(p+1), \quad \overset{p}{\delta} \circ \overset{p-1}{\delta} = 0, \\ \underset{p}{\delta} = \overset{p+1}{z}{}^{*} \circ \overset{p}{\partial} \circ \underset{p}{z}^{*} : C^p \to C^{p-1}; \quad \underset{p}{e} \to \underset{p}{\delta}\underset{p}{e} = A(p) \underset{p-1}{e}, \quad \underset{p}{\delta} \circ \underset{p+1}{\delta} = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

$$A(p) = \underset{p}{Z} C^{\mathrm{tr}}(p) \overset{p-1}{Z},$$

где z-отображения заданы в каждой паре (C^p, C^*_p),

$$\begin{cases} \overset{p}{z} : C^p \to C^*_p; \quad \overset{p}{e}_k \to \overset{p}{z}\overset{p}{e}_k = \underset{p}{e}^i \overset{p}{z}_{ik} \sim \overset{p}{z}\overset{p}{e} = \underset{p}{e}^{\mathrm{tr}} \overset{p}{Z}, \\ \underset{p}{z} : C^*_p \to C^p; \quad \underset{p}{e}^k \to \underset{p}{z}\underset{p}{e}^k = \overset{p}{e}_i \underset{p}{z}^{ik} \sim \underset{p}{z}\underset{p}{e} = \underset{p}{Z}^{\mathrm{tr}} \overset{p}{e}^{\mathrm{tr}}, \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\underset{p}{z}^{ij} = (\underset{p}{e}^i, \underset{p}{e}^j), \quad \overset{p}{z}{}^*_{ij} = (\overset{p}{e}_i, \overset{p}{e}_j) = \overset{p}{z}_{ji},$$

$$\overset{p}{z} \circ \underset{p}{z} = \mathrm{id}, \quad \underset{p}{z} \circ \overset{p}{z} = \mathrm{id} \sim \underset{p}{Z}\overset{p}{Z} = 1$$

и устанавливают соответствующие скалярные произведения. Вследствие изоморфизма Пуанкаре $C^*_p(\mathbb{K}_n) \cong C^{n-p}(\mathbb{K}^*_n)$ с формулами перехода (4.10) они являются дискретными аналогами оператора Ходжа в пространстве $\mathbb{D}_n(\mathbb{K}_n, \mathbb{K}^*_n)$.

Тем самым над $\mathbb{D}$ наряду с исходным комплексом $C(\mathbb{D}; \partial)$ для (ко)граничных отображений возникает комплекс векторных пространств $C(\mathbb{D}; \delta)$ с δ-отображениями [2]. Эти два комплекса определены в одной и той же последовательности векторных пространств $\{(C^p, C^*_p)\}_{n+3}$. В качестве “матриц инцидентностей” в δ-комплексе выступают матрицы $A(p)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} A(p) &= \underset{p}{Z} C^{\mathrm{tr}}(p) \overset{p-1}{Z}, \quad A(p+1)A(p) = 0, \\ C^{\mathrm{tr}}(p) &= \overset{p}{Z} A(p) \underset{p-1}{Z}, \quad C(p)C(p+1) = 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Из невырожденности квадратных z-матриц следует

$$\operatorname{rang} \underset{\alpha_p \times \alpha_{p-1}}{A(p)} = \operatorname{rang} \underset{\alpha_{p-1} \times \alpha_p}{C(p)} \equiv r_p. \tag{7.4}$$

Так как подпространства (ко)границ, (ко)гомологий и а(ко)циклических элементов в конечном комплексе полностью определяются рангами матриц инцидентностей, то из (7.4) следуют изоморфизмы по равенству размерностей между этими подпространствами ∂- и δ-комплексов. В частности, отсутствие ∂-(ко)гомологий в $C(\mathbb{D};\partial)$ приводит к отсутствию δ-(ко)гомологий и в комплексе $C(\mathbb{D};\delta)$. Это следует непосредственно из формулы $\alpha_p = r_p + r_{p+1} + \beta_p$ (β_p — p-е число Бетти), одинаково выполняющейся в обоих комплексах. Следовательно, отсутствие ∂-(ко)гомологий приводит к отсутствию и δ-(ко)гомологий (все $\beta_p = 0$). При этом вследствие (7.3) и (7.4) матрицы $A(p)$ имеют с точностью до транспонирований те же свойства, сформулированные в разделе 5, что и исходные матрицы инцидентностей $C(p)$.

Подпространства δ-(ко)границ $B(\delta)$ и δ-а(ко)циклических элементов $X(\delta)$ в $C(\mathbb{D};\delta)$ определяются так же, как и соответствующие ∂-подпространства в $C(\mathbb{D};\partial)$, представленные формулами (3.1). Расписывая эти определения, получаем в качестве аналога предложения 1 для $C(\mathbb{D};\partial)$

Предложение 6. *В комплексе $C(\mathbb{D};\delta)$ для пространств $C^p(\mathbb{K}_n)$ и $C_p^*(\mathbb{K}_n)$ имеют место разложения*

$$\begin{gathered} C^p = X^p_{(r_{p+1})}(\delta) \oplus B^p_{(r_p)}(\delta), \quad C_p^* = B_p^{(r_{p+1})}(\delta) \oplus X_p^{(r_p)}(\delta), \\ B^p(\delta) \perp B_p(\delta), \quad X^p(\delta) \perp X_p(\delta), \quad \alpha_p = r_p + r_{p+1}. \end{gathered} \tag{7.5}$$

В комплексе $C(\mathbb{D};\delta)$ можно построить каноническую систему базисов аналогично тому, как это было сделано в комплексе $C(\mathbb{D};\partial)$. Сравнивая соответствующие формулы для действия ∂- и δ-операторов (2.2) и (7.1), разложения (3.1), (3.6) и (7.5), (7.6), заключаем, что процедура построения КСБ (δ) с точностью до транспонирований и переобозначений совпадает с процедурой построения КСБ (∂). Поэтому, опуская промежуточные записи формул, приведем только сводку основных формул, располагая их ниже в тексте параллельно для пространств C^p и C_p^*,

<u>КСБ (δ) в $C^p(\mathbb{K}_n)$:</u> | <u>КСБ (δ) в $C_p^*(\mathbb{K}_n)$:</u>

$$\overset{p}{e} \to \overset{p}{e}_{st} = \overset{p}{e} P(p) = (\overset{p}{y}_{(r_{p+1})} \overset{p}{a}_{(r_p)}), \qquad \underset{p}{e} \to \underset{p}{e}_{st} = Q(p) \underset{p}{e} = \begin{pmatrix} \underset{p}{a}^{(r_{p+1})} \\ \underset{p}{y}^{(r_p)} \end{pmatrix},$$

$$\overset{p}{\delta}\overset{p}{y} = \overset{p+1}{a}, \quad \overset{p}{\delta}\overset{p}{a} = 0, \qquad \underset{p}{\delta}\underset{p}{a} = 0, \quad \underset{p}{\delta}\underset{p}{y} = \underset{p-1}{a},$$

$$\underset{\alpha_p \times \alpha_p}{P(p)} = (\underset{\alpha_p \times r_{p+1}}{P_y(p)} \; \underset{\alpha_p \times r_p}{P_a(p)}), \qquad \underset{\alpha_p \times \alpha_p}{Q(p)} = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1} \times \alpha_p}{Q^a(p)} \\ \underset{r_p \times \alpha_p}{Q^y(p)} \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

$$\begin{cases} \overset{p}{y} = \overset{p}{e} P_y(p), \quad \operatorname{rang} P_y(p) = r_p, \quad \underset{p}{a} = Q^a(p) \underset{p}{e} = Q^y(p) A(p+1) \underset{p}{e}, \\ \overset{p}{a} = \overset{p}{e} P_a(p) = \overset{p}{e} A(p) P_y(p-1), \quad \underset{p}{y} = Q^y(p) \underset{p}{e}, \quad \operatorname{rang} Q^y(p) = r_p \end{cases} \tag{7.7}$$

с заменой (в формулах перехода к КСБ (∂)) обозначений b на a, x на y, но с сохранением обозначения для матриц перехода $P(p)$, $Q(p)$. При одновременном использовании формул перехода от ИСБ к КСБ (∂) и КСБ (δ) для различения можно проставить штрихи в последнем случае.

Запишем матрицы δ-инцидентностей $A(p)$ с разбиением на блоки в ИСБ согласно (4.1) и в КСБ (δ)

$$\underset{\alpha_p\times\alpha_{p-1}}{A(p)} = (\underset{\alpha_p\times r_p}{A_1(p)}\ \underset{\alpha_p\times r_{p+1}}{A_2(p)}) = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1}\times\alpha_p}{A^1(p)} \\ \underset{r_p\times\alpha_{p-1}}{A^2(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1}\times r_p}{A_1^1(p)} & \underset{r_{p+1}\times r_{p-1}}{A_2^1(p)} \\ \underset{r_p\times r_p}{A_1^2(p)} & \underset{r_p\times r_{p-1}}{A_2^2(p)} \end{pmatrix},$$

$$A_2^1(p) = A_1^1(p)(A_1^2(p))^{-1}A_2^2(p), \quad A_1^1(p) = -(A_1^2(p+1))^{-1}A_2^2(p+1)A_1^2(p),$$

$$A(p)\to A_{st}(p) = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1}\times r_p}{0} & \underset{r_{p+1}\times r_{p-1}}{0} \\ \underset{r_p\times r_p}{1} & \underset{r_p\times r_{p-1}}{0} \end{pmatrix}, \qquad S_{st}(p) = \begin{pmatrix} B'(p+1) & 0 \\ 0 & B'(p) \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

$$B'(p) \equiv \left\langle \underset{p-1}{a}, \overset{p-1}{y} \right\rangle = \left\langle \underset{p}{y}, \overset{p}{a} \right\rangle = A_1^2(p), \quad \left\langle \underset{p}{a}, \overset{p}{a} \right\rangle = 0.$$

Формулы действия δ-отображений имеют вид (7.1) с заменами e и $A(p)$ на e_{st} и $A_{st}(p)$.

Уточняя вид матриц $P_y(p)$ и $Q^y(p)$, с учетом условий на их ранги и условия $\langle \underset{p}{y}, \overset{p}{y}\rangle = Q^y(p)P_y(p) = 0$ получаем окончательный вид матриц преобразований $P(p)$ и $Q(p)$ от ИСБ к КСБ (δ)

$$P(p) = \left(\begin{array}{c|c} \underset{r_{p+1}\times r_{p+1}}{1} & \\ \underset{r_p\times r_{p+1}}{0} & \underset{\alpha_p\times r_p}{A_1(p)} \end{array}\right), \qquad Q(p) = \left(\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\underset{r_{p+1}\times\alpha_p}{A^2(p)}} \\ \hline \underset{r_p\times r_{p+1}}{0} & \underset{r_p\times r_p}{1} \end{array}\right), \tag{7.9}$$

$$P^{-1}(p) = S_{st}^{-1}(p)Q(p), \qquad Q^{-1}(p) = P(p)S_{st}^{-1}(p).$$

Матрицы δ-инцидентностей $A(p)$ зависят от структуры невырожденных z-матриц согласно формуле (7.3). A priori других условий для z-матриц нет. Однако в приложениях эти матрицы в ИСБ оказываются обычно диагональными или блочно-диагональными симметричными матрицами. Для уточнения этого обстоятельства запишем z-матрицы в ИСБ с разбиением на блоки матриц, размеры которых согласовываются с разбиением на блоки матриц $A(p)$ по формуле (7.8) и соответствующим разбиением на блоки матриц базисных элементов, аналогичных разбиению (4.1),

$$\overset{p}{Z} = \begin{pmatrix} \overset{p}{Z}{}^{11} & \overset{p}{Z}{}^{12} \\ \overset{p}{Z}{}^{21} & \overset{p}{Z}{}^{22} \end{pmatrix}, \qquad \underset{p}{Z} = \begin{pmatrix} \underset{p}{Z}{}_{11} & \underset{p}{Z}{}_{12} \\ \underset{p}{Z}{}_{21} & \underset{p}{Z}{}_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} r_{p+1}\times r_{p+1} & r_{p+1}\times r_p \\ r_p r_{p+1} & r_p\times r_p \end{pmatrix}.$$

Если $Z_{12} = Z^{12} = 0$, $Z_{21} = Z^{21} = 0$, то $\operatorname{rang} Z^{11} = \operatorname{rang} Z_{11} = r_{p+1}$, $\operatorname{rang} Z^{22} = \operatorname{rang} Z_{22} = r_p$, $A_1^2(p) = \underset{p}{Z}{}_{22}B(p)\overset{p-1}{Z}{}^{11} \equiv B'(p)$ и $\operatorname{rang} B'(p) = r_p$.

Итак, в комплексе $C(\mathbb{D})$ наравне с ИСБ определяются две канонические системы базисов: КСБ (∂) и КСБ (δ), в которых соответствующие матрицы инцидентностей имеют простейший квазидиагональный вид. При этом КСБ (∂) является более геометричной, не зависящей от z-отображений. По установленным формулам переходов от ИСБ к КСБ (∂) и КСБ (δ) можно построить формулы перехода от КСБ (∂) к КСБ (δ) и обратно.

В следующем разделе КСБ (δ) будет использована для обращения δ-отображений.

8. Обращение δ-операторов

Исследование δ-операторов кодифференцирования принципиально ничем не отличается от исследования ∂-операторов дифференцирования. Отсутствие δ-(ко)гомологий приводит к аналогичным условиям разрешимости и δ-уравнений. Как и в случае ∂-уравнений, используется соответствующая КСБ (δ), и полученные в ней общие решения δ-уравнений могут быть переведены преобразованиями (ко)базисов в ИСБ и затем при необходимости и в КСБ (∂). Поэтому далее ограничимся только формулировками и записями основных соотношений без пояснений.

Определение 2. δ-уравнениями в комплексе $C(\mathbb{K}_n;\delta)$ будем называть уравнения вида

$$\delta v = f, \tag{8.1}$$

где f — заданное (ко)векторное поле, v — искомый (ко)вектор.

Предложение 7. *Для уравнения* (8.1) *условие* $\delta f = 0$ *является необходимым и достаточным условием совместности. Произвол в общем решении определяется заменой* $v \to v' = v + \delta u$, *где* u — *произвольный (ко)вектор соответствующей размерности.*

Общие решения δ-уравнений.

1) В комплексе $C(\mathbb{K}_n;\delta)$

$$\overset{p}{\delta}\overset{p}{v} = \overset{p+1}{f}; \quad \overset{p+1}{\delta}\overset{p+1}{f} = 0, \quad \overset{p}{v} \to \overset{p}{v}{}' = \overset{p}{v} + \overset{p-1}{\delta}\overset{p-1}{u};$$

в координатах

$$\underset{\alpha_{p+1}\times\alpha_p}{A(p+1)}\underset{\alpha_p\times 1}{\overset{p}{V}} = \underset{\alpha_{p+1}\times 1}{\overset{p+1}{F}}, \quad \operatorname{rang} A(p+1) = r_{p+1};$$

общее решение в КСБ(δ)

$$\begin{cases} \overset{p}{V}{}_y^{(r_{p+1})} = \overset{p+1}{F}{}_y^{(r_{p+1})}, \quad \overset{p+1}{F}{}_y^{(r_{p+2})} = 0, \\ \overset{p}{V}{}_a^{(r_p)} = \overset{p}{C}{}^{(r_p)} \equiv \overset{p}{C}{}_a^{(r_p)} + \overset{p-1}{U}{}_y^{(r_p)}; \end{cases} \tag{8.2}$$

в матричной записи

$$\overset{p}{V} = A^+_{st}(p+1)\overset{p+1}{F} + [1 - A^+_{st}(p+1)A_{st}(p+1)]\overset{p}{C},$$

$$\underset{\alpha_p\times\alpha_{p+1}}{A^+_{st}(p+1)} = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1}\times r_{p+2}}{0} & \underset{r_{p+1}\times r_{p+1}}{1} \\ \underset{r_p\times r_{p+2}}{0} & \underset{r_p\times r_{p+1}}{0} \end{pmatrix}$$

или

$$\overset{p}{V} = N(p+1)\overset{p}{E},$$

$$N(p+1) \equiv (A^+_{st}(p+1) \mid [1 - A^+_{st}(p+1)A_{st}(p+1)]), \quad \overset{p}{E} \equiv \begin{pmatrix} \overset{p+1}{F} \\ \overset{p}{C} \end{pmatrix},$$

где $N(p+1)$ — матрица обращения оператора $\overset{p}{\delta}$.

2) В комплексе $C^*(\mathbb{K}_n;\delta)$

$$\underset{p}{\delta}\underset{p}{w} = \underset{p-1}{f}; \quad \underset{p-1}{\delta}\underset{p-1}{f} = 0, \quad \underset{p}{w} \to \underset{p}{w}{}' = \underset{p}{w} + \underset{p+1}{\delta}\underset{p+1}{u};$$

в координатах

$$\underset{p}{\overset{1\times\alpha_p}{W}}\overset{\alpha_p\times\alpha_{p-1}}{A(p)} = \underset{p-1}{\overset{1\times\alpha_{p-1}}{F}}, \quad \operatorname{rang} A(p) = r_p;$$

общее решение в КСБ(δ)

$$\begin{cases} \underset{p}{W}{}^a_{(r_{p+1})} = \underset{p}{C}{}_{(r_{p+1})} \equiv \underset{p}{C}{}^a_{(r_{p+1})} + \underset{p+1}{U}{}^y_{(r_{p+1})}, \\ \underset{p}{W}{}^y_{(r_p)} = \underset{p-1}{F}{}^a_{(r_p)}, \quad \underset{p-1}{F}{}^y_{(r_{p-1})} = 0; \end{cases} \tag{8.3}$$

в матричной записи

$$\underset{p}{W} = \underset{p-1}{F} A_{st}^{+}(p) + \underset{p}{C}[1 - A_{st}(p)A_{st}^{+}(p)],$$

$$\underset{\alpha_{p-1}\times\alpha_p}{A_{st}^{+}(p)} = \begin{pmatrix} \underset{r_p\times r_{p+1}}{0} & \underset{r_p\times r_p}{1} \\ \underset{r_{p-1}\times r_{p+1}}{0} & \underset{r_{p-1}\times r_p}{0} \end{pmatrix}$$

или

$$\underset{p}{W} = \underset{p}{E} M(p),$$

$$M(p) \equiv \begin{pmatrix} A_{st}^{+}(p) \\ 1 - A_{st}(p)A_{st}^{+}(p) \end{pmatrix}, \qquad \underset{p}{E} \equiv (\underset{p-1}{F} \mid \underset{p}{C}),$$

где $M(p)$ — матрица обращения оператора $\underset{p}{\delta}$.

9. Обращение операторов Лапласа

Операторы Лапласа в $\mathbb{D}$ были определены в [2] следующим образом:

$$\begin{aligned} \overset{p}{\Delta} &= (-1)^p[\overset{p+1}{\partial} \circ \overset{p}{\delta} - \overset{p-1}{\delta} \circ \overset{p}{\partial}] = \overset{p+1}{\partial} \circ \overset{p}{\delta}{}' + \overset{p-1}{\delta}{}' \circ \overset{p}{\partial}, \quad \overset{p}{\delta}{}' \equiv (-1)^p \overset{p}{\delta}, \\ \underset{p}{\Delta} &= (-1)^p[\underset{p+1}{\delta} \circ \underset{p}{\partial} - \underset{p-1}{\partial} \circ \underset{p}{\delta}] = \underset{p+1}{\delta}{}' \circ \underset{p}{\partial} + \underset{p-1}{\partial} \circ \underset{p}{\delta}{}', \quad \underset{p}{\delta}{}' \equiv (-1)^{p+1} \underset{p}{\delta} \end{aligned} \tag{9.1}$$

с формулами действия

$$\begin{aligned} &\overset{p}{\Delta}\overset{p}{e} = \overset{p}{e}D(p); \quad \overset{p}{\Delta}\overset{p}{V} = D(p)\overset{p}{V}, \quad \overset{p}{v} = \overset{p}{e}\overset{p}{V} \in C^p(\mathbb{K}), \\ &\underset{p}{\Delta}\underset{p}{e} = D(p)\underset{p}{e}; \quad \underset{p}{\Delta}\underset{p}{W} = \underset{p}{W}D(p), \quad \underset{p}{w} = \underset{p}{W}\underset{p}{e} \in C_p^*(\mathbb{K}), \end{aligned} \tag{9.2}$$

где

$$D(p) = (-1)^p[C(p+1)A(p+1) - A(p)C(p)].$$

Приведем явные выражения Δ-операторов в $\mathbb{D} = (\mathbb{K}, \mathbb{K}^*)$ при $p = 0, 1, 2, 3$ с некоторыми упрощениями в обозначениях по сравнению с обозначениями в [2]

$$\begin{cases} \overset{0}{\Delta} = \operatorname{div} \circ \operatorname{Grad} - Cn \circ sm, & \underset{0}{\Delta} = \operatorname{Div}^* \circ \operatorname{grad}^* - cn^* \circ Sm^* = \overset{3}{\Delta}{}^*, \\ \overset{1}{\Delta} = -\operatorname{rot} \circ \operatorname{Rot} + \operatorname{Grad} \circ \operatorname{div}, & \underset{1}{\Delta} = -\operatorname{Rot}^* \circ \operatorname{rot}^* + \operatorname{grad}^* \circ \operatorname{Div}^* = \overset{2}{\Delta}{}^*, \\ \overset{2}{\Delta} = \operatorname{grad} \circ \operatorname{Div} - \operatorname{Rot} \circ \operatorname{rot}, & \underset{2}{\Delta} = \operatorname{Grad}^* \circ \operatorname{div}^* - \operatorname{rot}^* \circ \operatorname{Rot}^* = \overset{1}{\Delta}{}^*, \\ \overset{3}{\Delta} = -cn \circ Sm + \operatorname{Div} \circ \operatorname{grad}, & \underset{3}{\Delta} = -Cn^* \circ sm^* + \operatorname{div}^* \circ \operatorname{Grad}^* = \overset{0}{\Delta}{}^*. \end{cases} \tag{9.3}$$

Здесь индексы над и под символами Δ-операторов указывают места их действий на p-элементах в $\mathbb{K}_3$ и $\mathbb{K}_3^*$.

Замечаем, что операторы Лапласа, определенные формулами (9.1), состоят из двух слагаемых-половинок (левой и правой). Выделим явно эти слагаемые

$$\begin{aligned} \overset{p}{\Delta}_L &\equiv (-1)^p \overset{p+1}{\partial} \circ \overset{p}{\delta}, \quad \overset{p}{\Delta}_R \equiv (-1)^{p-1} \overset{p-1}{\delta} \circ \overset{p}{\partial}, \\ \underset{p}{\Delta}_L &\equiv (-1)^p \underset{p+1}{\delta} \circ \underset{p}{\partial}, \quad \underset{p}{\Delta}_R \equiv (-1)^{p-1} \underset{p-1}{\partial} \circ \underset{p}{\delta}, \end{aligned} \tag{9.4}$$

называя их далее неполными или односторонними (левыми и правыми) операторами Лапласа, а исходные операторы Лапласа (9.1) — полными, которые представляются в виде сумм

$$\overset{p}{\Delta} = \overset{p}{\Delta}_L + \overset{p}{\Delta}_R, \quad \underset{p}{\Delta} = \underset{p}{\Delta}_L + \underset{p}{\Delta}_R. \tag{9.5}$$

Неполные операторы Лапласа (9.4) действуют так же, как и полные, по формулам (9.2) с матрицами

$$D_L(p) = (-1)^p C(p+1)A(p+1), \quad D_R(p) = (-1)^{p-1}A(p)C(p). \tag{9.6}$$

Отметим соотношения между Δ-, Δ_L-, Δ_R-операторами

$$\begin{cases} \overset{p}{\partial}\overset{p}{\Delta} = \overset{p}{\partial}\overset{p}{\Delta}_R = \overset{p-1}{\Delta}_L\overset{p}{\partial}, \quad \overset{p}{\Delta}\overset{p+1}{\partial} = \overset{p}{\Delta}_L\overset{p+1}{\partial} = \overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{\Delta}_R, \\ \overset{p}{\delta}\overset{p}{\Delta} = \overset{p}{\delta}\overset{p}{\Delta}_L = \overset{p+1}{\Delta}_R\overset{p}{\delta}, \quad \overset{p}{\Delta}\overset{p-1}{\delta} = \overset{p}{\Delta}_R\overset{p-1}{\delta} = \overset{p-1}{\delta}\overset{p-1}{\Delta}_L, \\ \underset{p}{\partial}\underset{p}{\Delta} = \underset{p}{\partial}\underset{p}{\Delta}_L = \underset{p+1}{\Delta}_R\underset{p}{\partial}, \quad \underset{p}{\Delta}\underset{p-1}{\partial} = \underset{p}{\Delta}_R\underset{p-1}{\partial} = \underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{\Delta}_L, \\ \underset{p}{\delta}\underset{p}{\Delta} = \underset{p}{\delta}\underset{p}{\Delta}_R = \underset{p-1}{\Delta}_L\underset{p}{\delta}, \quad \underset{p}{\Delta}\underset{p+1}{\delta} = \underset{p}{\Delta}_L\underset{p+1}{\delta} = \underset{p+1}{\delta}\underset{p+1}{\Delta}_R, \end{cases} \tag{9.7}$$

$$\begin{gathered} \overset{p}{\Delta}_L\overset{p}{\Delta}_R = 0, \quad \overset{p}{\Delta}_R\overset{p}{\Delta}_L = 0, \quad \overset{p}{\Delta}{}^k = \overset{p}{\Delta}{}_L^k + \overset{p}{\Delta}{}_R^k, \\ \underset{p}{\Delta}_L\underset{p}{\Delta}_R = 0, \quad \underset{p}{\Delta}_R\underset{p}{\Delta}_L = 0, \quad \underset{p}{\Delta}{}^k = \underset{p}{\Delta}{}_L^k + \underset{p}{\Delta}{}_R^k \end{gathered} \tag{9.8}$$

и тождества

$$\begin{gathered} \overset{p}{\partial}\overset{p}{\Delta}_L = 0, \quad \overset{p}{\Delta}_L\overset{p-1}{\delta} = 0, \quad \underset{p}{\delta}\underset{p}{\Delta}_L = 0, \quad \underset{p}{\Delta}_L\underset{p-1}{\partial} = 0, \\ \overset{p}{\delta}\overset{p}{\Delta}_R = 0, \quad \overset{p}{\Delta}_R\overset{p+1}{\partial} = 0, \quad \underset{p}{\partial}\underset{p}{\Delta}_R = 0, \quad \underset{p}{\Delta}_R\underset{p+1}{\delta} = 0, \end{gathered} \tag{9.9}$$

которые будут использованы в тексте следующего раздела.

Операторы Лапласа были определены в [2] с учетом их физического смысла. Именно, неполные операторы Лапласа измеряют отклонение значений соответствующих p-(ко)векторных полей на p-элементах от их средних значений в окрестностях этих элементов (по коинцидентным $(p+1)$-элементам для левых операторов и по инцидентным $(p-1)$-элементам для правых) с учетом свойств среды. Полные операторы Лапласа измеряют разность отмеченных средних значений с исключением значений (ко)векторных полей на самих p-элементах, т. е. измеряют отклонение от равновесия соответствующих рассматриваемым полям физических величин с учетом свойств среды (в δ-операторы входят z-отображения, определяющие в приложениях физические характеристики среды).

Перейдем к исследованию аналогов уравнений Лапласа и Пуассона в $\mathbb{D}$.

Определение 3. Δ-уравнением в $\mathbb{D} = (\mathbb{K}, \mathbb{K}^*)$ будем называть уравнение вида

$$\Delta v = f, \tag{9.10}$$

где f — заданное (ко)векторное поле, v — искомый (ко)вектор, а Δ-оператор может быть как полным, так и неполным оператором Лапласа.

Исследование уравнений (9.10) проведем в КСБ(∂). Для этого в этой системе базисов установим явный вид матриц действия $D(p)$ операторов Лапласа. При переходе от ИСБ к КСБ(∂) z-матрицы и матрица $A(p)$ преобразуются согласно их определениям (7.1) и (7.2) по формулам

$$\begin{gathered} \overset{p}{Z}_{st} = Q_{\mathrm{tr}}^{-1}(p)\overset{p}{Z}P(p) = S_{\mathrm{tr}}^{-1}(p)P_{\mathrm{tr}}(p)\overset{p}{Z}P(p), \\ \underset{p}{Z}_{st} = P^{-1}(p)\underset{p}{Z}Q_{\mathrm{tr}}(p) = S^{-1}(p)Q(p)\underset{p}{Z}Q_{\mathrm{tr}}(p), \\ A_{st}(p) = P^{-1}(p)A(p)P(p-1) = S^{-1}(p)Q(p)A(p)P(p-1), \end{gathered} \tag{9.11}$$

где матрицы $S(p)$, $P(p)$, $Q(p)$ определены формулами (4.7), (4.10). Матрицы в (9.11) представим в блочном виде согласно соответствующим разбиениям (3.2) матриц базисных элементов

$$\overset{p}{Z}_{st} = \begin{pmatrix} \overset{p}{Z}{}^{bb} & \overset{p}{Z}{}^{bx} \\ \overset{p}{Z}{}^{xb} & \overset{p}{Z}{}^{xx} \end{pmatrix}, \qquad \underset{p}{Z}_{st} = \begin{pmatrix} \underset{p}{Z}{}_{xx} & \underset{p}{Z}{}_{xb} \\ \underset{p}{Z}{}_{bx} & \underset{p}{Z}{}_{bb} \end{pmatrix}, \qquad A_{st}(p) = \begin{pmatrix} A_x^b(p) & A_b^b(p) \\ A_x^x(p) & A_b^x(p) \end{pmatrix},$$

где

$$A_x^b(p) = \underset{p}{Z}_{xb}\overset{p-1}{Z}{}^{bb}, \quad A_b^b(p) = \underset{p}{Z}_{xb}\overset{p-1}{Z}{}^{bx},$$

$$A_x^x(p) = \underset{p}{Z}_{bb}\overset{p-1}{Z}{}^{bb}, \quad A_b^x(p) = \underset{p}{Z}_{bb}\overset{p-1}{Z}{}^{bx}.$$

Элементы z-матриц в КСБ$\,(\partial)$ через элементы этих матриц в ИСБ выражаются формулами преобразований (9.11), например,

$$\overset{p}{Z}{}^{xx} = B_{\mathrm{tr}}^{-1}(p)\overset{p}{Z}{}^{22}, \quad \underset{p}{Z}_{xx} = B^{-1}(p+1)\underset{p}{Z}_{11} \quad \text{и т.д.}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} L(p) \equiv (-1)^{p-1}A_x^x(p) = (-1)^{p-1}\underset{p}{Z}_{bb}\overset{p-1}{Z}{}^{bb}, \\ K(p) \equiv (-1)^{p+1}A_b^x(p+1) + (-1)^p A_x^b(p) = K_L(p+1)K_R(p). \end{gathered} \tag{9.12}$$

Тогда соответствующие D-матрицы операторов Лапласа запишутся в КСБ$\,(\partial)$ в виде

$$\begin{gathered} \underset{\alpha_p\times\alpha_p}{D(p)} = D_L(p) + D_R(p) = \begin{pmatrix} L(p+1) & -K(p) \\ 0 & L(p) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} r_{p+1}\times r_{p+1} & r_{p+1}\times r_p \\ r_p\times r_{p+1} & r_p\times r_p \end{pmatrix}, \\ D_L(p) = \begin{pmatrix} L(p+1) & -K_L(p+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_R(p) = \begin{pmatrix} 0 & -K_R(p) \\ 0 & L(p) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9.13}$$

Из сказанного выше в разделах 7, 8 о свойствах матриц $A(p)$ и z-матрицах следует, что ранг $\underset{r_p\times r_p}{L(p)} = r_p$. Следовательно, квадратные L-матрицы являются невырожденными и существуют $L^{-1}(p)$. Отсюда и из (9.13) получаем

Предложение 8. *D-матрицы полных операторов Лапласа являются невырожденными и*

$$D^{-1}(p) = \begin{pmatrix} L^{-1}(p+1) & L^{-1}(p+1)K(p)L^{-1}(p) \\ 0 & L^{-1}(p) \end{pmatrix}. \tag{9.14}$$

Используя полученные выражения (9.13) для D-матриц операторов Лапласа в КСБ$\,(\partial)$, можно записать явные решения для всех Δ-уравнений (9.10) с точным указанием произвола в решениях. Для полных операторов Лапласа

$$\overset{p}{\Delta}\overset{p}{v} = \overset{p}{f} \sim D(p)\overset{p}{V} = \overset{p}{F}, \quad \underset{p}{\Delta}\underset{p}{w} = \underset{p}{f} \sim \underset{p}{W}D(p) = \underset{p}{F}.$$

Решения этих уравнений определяются однозначно

$$\overset{p}{V} = D^{-1}(p)\overset{p}{F}, \quad \underset{p}{W} = \underset{p}{F}D^{-1}(p), \tag{9.15}$$

где матрица обращения полного Δ-оператора дана формулой (9.14).

Запишем решения уравнений (9.7) с неполными операторами Лапласа в двух комплексах.

В комплексе $C(\mathbb{K})$

1) $\overset{p}{\Delta}_L\overset{p}{v} = \overset{p}{f} \sim \begin{pmatrix} L(p+1) & -K_L(p+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overset{p}{V}_b \\ \overset{p}{V}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{p}{F}_b \\ \overset{p}{F}_x \end{pmatrix}$;

общее решение с произволом $\overset{p}{V}_x = \overset{p}{C}_x \in X^p \subset C^p(\mathbb{K})$ и условием $\overset{p}{F}_x = 0$ на f

$$\overset{p}{V} = \begin{pmatrix} L^{-1}(p+1)[K_L(p+1)\overset{p}{C}_x + \overset{p}{F}_b] \\ \overset{p}{C}_x \end{pmatrix}; \tag{9.16}$$

2) $\overset{p}{\Delta}_R \overset{p}{v} = \overset{p}{f} \sim \begin{pmatrix} 0 & -K_R(p) \\ 0 & L(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{p}{V}_x \\ \overset{p}{V}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{p}{F}_b \\ \overset{p}{F}_x \end{pmatrix}$;

$$\overset{p}{V} = \begin{pmatrix} \overset{p}{C}_x \\ L^{-1}(p)\overset{p}{F}_x \end{pmatrix}, \quad \overset{p}{F}_b = -K_R(p)L^{-1}(p)\overset{p}{F}_x. \tag{9.17}$$

В комплексе $C^*(\mathbb{K})$

1) $\underset{p}{\Delta}_L \underset{p}{w} = \underset{p}{f} \sim (\underset{p}{W}^x \, \underset{p}{W}^b) \begin{pmatrix} L(p+1) & -K_L(p+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\underset{p}{F}^x \, \underset{p}{F}^b)$,

$$\underset{p}{W} = (\underset{p}{F}^x L^{-1}(p+1) \mid \underset{p}{C}^b), \quad \underset{p}{F}^b = -\underset{p}{F}^x L^{-1}(p+1)K_L(p+1); \tag{9.18}$$

2) $\underset{p}{\Delta}_R \underset{p}{w} = \underset{p}{f} \sim (\underset{p}{W}^x x \, \underset{p}{W}^b) \begin{pmatrix} 0 & -K_R(p) \\ 0 & L(p) \end{pmatrix} = (\underset{p}{F}^x \, \underset{p}{F}^b)$,

$$\underset{p}{W} = (\underset{p}{C}^x \mid [\underset{p}{F}^b + \underset{p}{C}^x K_R(p)]L^{-1}(p)), \quad \underset{p}{F}^x = 0. \tag{9.19}$$

Определение 4. Всякое ненулевое решение уравнения (9.10) с $f = 0$ дискретного аналога уравнения Лапласа будем называть гармоническим полем для соответствующего оператора в $\mathbb{D}$.

Из полученных решений (9.15)–(9.19) уравнения (9.10) с полными и неполными операторами Лапласа следуют три утверждения.

Предложение 9. *Для Δ-уравнений с полными операторами Лапласа решения определяются однозначно. Не существует дискретных гармонических полей для полных операторов Лапласа.*

Предложение 10. *Решение Δ-уравнений с неполными операторами Лапласа определяются с указанием места их задания и с выделенными условиями на правую часть уравнений f.*

Предложение 11. *Гармонические поля в $\mathbb{D}$ существуют только для неполных операторов Лапласа. Их выражения получаются из общих решений* (9.13)–(9.16) *при $f = 0$ с точным указанием места их задания в $(C(\mathbb{K}), C^*(\mathbb{K}))$.*

Ясно, что все полученные решения Δ-уравнений можно перевести из КСБ (∂) в ИСБ согласно формулам преобразований при заменах базисов, используя известные матрицы преобразований $\mathbb{D}(p)$ и $Q(p)$.

Сравним полученные выводы с известными результатами из классического анализа. Для классического скалярного оператора Лапласа $\Delta_{\text{ск}} = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$ дискретными аналогами при $z = 1$ являются неполные операторы $\overset{0}{\Delta}_L$, $\overset{3}{\Delta}_R$ и $\underset{0}{\Delta}_L$, $\underset{3}{\Delta}_R$, а для векторного оператора Лапласа $\Delta_{\text{вект}} = -\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} + \operatorname{grad} \circ \operatorname{div}$ — полные операторы $\overset{1}{\Delta}$, $\overset{2}{\Delta}$ и $\underset{1}{\Delta}$, $\underset{2}{\Delta}$ $(z = 1)$. Для таких операторов в классическом анализе не существует развернутой теории, как для $\Delta_{\text{ск}}$. В тех же приложениях, в которых встречается оператор $\Delta_{\text{вект}}$, например, в электродинамике, фактически остается только левая часть $-\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot}$ — непрерывный аналог неполных операторов Лапласа $\overset{1}{\Delta}_L$, $\overset{2}{\Delta}_R$ и $\underset{1}{\Delta}_L$, $\underset{2}{\Delta}_R$ $(z = 1)$. Единственный непрерывный аналог полного оператора Лапласа — это оператор Гамильтона в квантовой механике с точностью до постоянного множителя с $z \neq 1$. И в этом случае аналогом предложения 9 является известный факт, что для оператора Гамильтона не существует отличного от нуля собственного вектора с нулевым собственным значением.

10. Восстановление и разложение (ко)векторных полей

Построим дискретные аналоги классических теорем о восстановлении и разложении скалярных и векторных полей, а именно, о восстановлении скалярного поля по заданному его градиенту, векторного поля по заданным его дивергенции и ротору, о разложении векторного поля на сумму соленоидального и потенциального слагаемых.

Очевидно, аналогами теоремы о восстановлении скалярного поля по его градиенту являются рассмотренные в разделах 6, 8 ∂- и δ-уравнения. Тем самым аналог указанной теоремы распространяется на все структурные части полной диаграммы комплекса $C(\mathbb{K},\mathbb{K}^*)$.

Аналоги теоремы о восстановлении векторного поля по его дивергенции и ротору в комплексе $C(\mathbb{K},\mathbb{K}^*)$ могут быть сформулированы следующим образом:

1) для векторных полей в $C(\mathbb{K})$

$$\overset{p}{\partial}\overset{p}{v} = \overset{p-1}{f}, \quad \overset{p}{\delta}\overset{p}{v} = \overset{p+1}{f}; \tag{10.1}$$

2) для ковекторных полей в $C(\mathbb{K}^*)$

$$\underset{p}{\partial}\underset{p}{w} = \underset{p+1}{f}, \quad \underset{p}{\delta}\underset{p}{w} = \underset{p-1}{f}, \tag{10.2}$$

где правые части f — заданные поля, а поля v и w подлежат определению.

Ясно, что решение систем (10.1) и (10.2) сводится к совместному исследованию соответствующих ∂- и δ-уравнений. Подробный анализ показывает, что эти системы совместны и имеют единственные решения. Это исследование и явный вид решений систем (10.1) и (10.2) здесь опускаются, при необходимости они могут быть восстановлены по схеме исследований из разделов 6 и 8.

Предложение 12. *В дискретном пространстве имеют место аналоги классических теорем векторного анализа о восстановлении скалярного и векторного полей, эти теоремы определены во всех структурных частях полной диаграммы комплекса $C(\mathbb{K},\mathbb{K}^*)$.*

И, наконец, приведем аналоги теоремы о разложении векторного поля, представляющие основные результаты данного исследования.

С учетом структуры полной диаграммы операторов в дискретном пространстве [2] аналог теоремы о разложении сформулируем в каждой структурной части диаграммы (включая и операторы замыкания [2]), располагая параллельно соответствующие формулы

1) в $C(\mathbb{K})$ $\qquad$ 1*) в $C(\mathbb{K}^*)$

$$\overset{p}{v} = (-1)^p \overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{v_1} + (-1)^{p-1}\overset{p-1}{\delta}\overset{p-1}{v_1}, \qquad \underset{p}{w} = (-1)^p \underset{p+1}{\delta}\underset{p+1}{w_1} + (-1)^{p+1}\underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{w_1}. \tag{10.3}$$

Знаковые множители в этих уравнениях выбраны так, чтобы в последующем получить единообразное написание общих формул.

В уравнениях (10.3) поля v и w в левых частях считаются заданными, а поля v_1 и w_1 в правых частях подлежат определению. Каждая из линейных систем (10.3) содержит α_p уравнений и $(\alpha_{p+1}+\alpha_{p-1})$ неизвестных. Так как $\alpha_4 = \alpha_{-1} = 1$ и $\chi(\mathbb{K}) = \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_0 = 0$, то число уравнений в этих системах меньше числа неизвестных.

Чтобы получить выражения для полей в правых частях через заданные поля в левых частях, применим к обеим частям уравнений (10.3) поочередно соответствующие операторы ∂ и δ. С обозначениями из (9.4) получим соответственно системы уравнений на искомые поля

$$\begin{aligned} \overset{p-1}{\Delta}_L \overset{p-1}{v_1} &= \overset{p}{\partial}\overset{p}{v}, \quad \underset{p-1}{\Delta}_L \underset{p-1}{w_1} = \underset{p}{\delta}\underset{p}{w}, \\ \overset{p+1}{\Delta}_R \overset{p+1}{v_1} &= \overset{p}{\delta}\overset{p}{v}, \quad \underset{p+1}{\Delta}_R \underset{p+1}{w_1} = \underset{p}{\partial}\underset{p}{w}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Каждая из этих систем совместна вследствие тождеств (9.8) и отсутствия (ко)гомологий в $\mathbb{K}$. Явный вид решений этих систем получаем, используя формулы (9.16)–(9.19).

Поля v_1 и w_1 в правых частях могут быть в свою очередь разложены точно так же, как и поля v и w. Посредством таких разложений разложения исходных полей могут быть продолжены.

Полагая, что разложения (10.3) с определяющими уравнениями (10.4) представляют первый этап разложения, перейдем к следующему этапу. Для этого запишем разложения, возможность которых доказана,

$$\overset{p+1}{v_1} = \overset{p}{\delta}\overset{p}{u}_{1L} + \overset{p+2}{\partial}\overset{p+2}{w_1}, \quad \underset{p+1}{w_1} = \underset{p}{\partial}\underset{p}{u}_{1L} + \underset{p+2}{\delta}\underset{p+2}{v_1},$$
$$\overset{p-1}{v_1} = \overset{p}{\partial}\overset{p}{u}_{1R} + \overset{p-2}{\delta}\overset{p-2}{w_1}, \quad \underset{p-1}{w_1} = \underset{p}{\delta}\underset{p}{u}_{1R} + \underset{p-2}{\partial}\underset{p-2}{v_1}.$$

Подставляя эти выражения для v_1 и w_1 в (10.3) и (10.4), получим разложения для исходных полей $\overset{p}{v} = \overset{p}{\Delta}_L\overset{p}{u}_{1L} + \overset{p}{\Delta}_R\overset{p}{u}_{1R}$, $\underset{p}{w} = \underset{p}{\Delta}_L\underset{p}{u}_{1L} + \underset{p}{\Delta}_R\underset{p}{u}_{1R}$ с определяющими уравнениями

$$\overset{p-1}{\Delta}_L\overset{p}{\partial}\overset{p}{u}_{1R} = \overset{p}{\partial}\overset{p}{v}, \quad \underset{p-1}{\Delta}_L\underset{p}{\delta}\underset{p}{u}_{1R} = \underset{p}{\delta}\underset{p}{w}, \quad \overset{p+1}{\Delta}_R\overset{p}{\delta}\overset{p}{u}_{1L} = \overset{p}{\delta}\overset{p}{v}, \quad \underset{p+1}{\Delta}_R\underset{p}{\partial}\underset{p}{u}_{1L} = \underset{p}{\partial}\underset{p}{w}.$$

На третьем этапе запишем разложения для полей u_{1L} и u_{1R}, которые представим в виде

$$\overset{p}{u}_{1L} = (-1)^p\overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{v_2} + \overset{p-1}{\delta}\overset{p-1}{v}_{2L}, \qquad \overset{p}{u}_{1L} = (-1)^p\underset{p+1}{\delta}\underset{p+1}{w_2} + \underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{w}_{2L},$$
$$\overset{p}{u}_{1R} = (-1)^{p-1}\overset{p-1}{\delta}\overset{p-1}{v_2} + \overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{v}_{2R}, \quad \underset{p}{u}_{1R} = (-1)^{p-1}\underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{w_2} + \underset{p+1}{\delta}\underset{p+1}{w}_{2R}.$$

Далее, действуя так же, как и на втором этапе, получим разложения для исходных полей

$$\overset{p}{v} = (-1)^p\overset{p}{\Delta}_L\overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{v_2} + (-1)^{p-1}\overset{p}{\Delta}_R\overset{p-1}{\delta}\overset{p-1}{v_2}, \quad \underset{p}{w} = (-1)^p\underset{p}{\Delta}_L\underset{p+1}{\delta}\underset{p+1}{w_2} + (-1)^{p-1}\underset{p}{\Delta}_R\underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{w_2}$$

с определяющими уравнениями

$$\overset{p-1}{\Delta}_L\overset{p-1}{\Delta}_L\overset{p-1}{v_2} = \overset{p}{\partial}\overset{p}{v}, \quad \underset{p-1}{\Delta}_L\underset{p-1}{\Delta}_L\underset{p-1}{w_2} = \underset{p}{\delta}\underset{p}{w}, \quad \overset{p+1}{\Delta}_R\overset{p+1}{\Delta}_R\overset{p+1}{v_2} = \overset{p}{\delta}\overset{p}{v}, \quad \underset{p+1}{\Delta}_R\underset{p+1}{\Delta}_R\underset{p+2}{w_2} = \underset{p}{\partial}\underset{p}{w}.$$

Очевидно, этот процесс последовательных разложений может быть продолжен неограниченно.

Запишем общие формулы для разложения

1) на четном этапе $n = 2K$, $K = 1, 2, \ldots$

$$\overset{p}{v} = \overset{p}{\Delta}{}^K_L\overset{p}{u}_{KL} + \overset{p}{\Delta}{}^K_R\overset{p}{u}_{KR}, \quad \underset{p}{w} = \underset{p}{\Delta}{}^K_L\underset{p}{u}_{KL} + \underset{p}{\Delta}{}^K_R\underset{p}{u}_{KR}, \tag{10.5}$$
$$\overset{p-1}{\Delta}{}^K_L\overset{p}{\partial}\overset{p}{u}_{KR} = \overset{p}{\partial}\overset{p}{v}, \quad \underset{p-1}{\Delta}{}^K_L\underset{p}{\delta}\underset{p}{u}_{KR} = \underset{p}{\delta}\underset{p}{w}, \quad \overset{p+1}{\Delta}{}^K_R\overset{p}{\delta}\overset{p}{u}_{KL} = \overset{p}{\delta}\overset{p}{v}, \quad \underset{p+1}{\Delta}{}^K_R\underset{p}{\partial}\underset{p}{u}_{KL} = \underset{p}{\partial}\underset{p}{w} \tag{10.6}$$

с уравнениями, связывающими эти разложения с разложениями на предыдущем нечетном этапе $(n = 2K - 1)$,

$$\begin{aligned} &\overset{p+1}{v_k} = \overset{p}{\delta}\overset{p}{u}_{KL} + \overset{p+2}{\partial}\overset{p+2}{w_K}, \quad \underset{p+1}{w_K} = \underset{p}{\partial}\underset{p}{u}_{KL} + \underset{p+2}{\delta}\underset{p+2}{v_K}, \\ &\overset{p-1}{v_K} = \overset{p}{\partial}\overset{p}{u}_{KR} + \overset{p-2}{\delta}\overset{p-2}{w_K}, \quad \underset{p-1}{w_K} = \underset{p}{\delta}\underset{p}{u}_{KR} + \underset{p-2}{\partial}\underset{p-2}{v_K}; \end{aligned} \tag{10.7}$$

2) на нечетном этапе $n = 2K-1$, $K = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\overset{p}{v} &= (-1)^p \overset{p}{\Delta}{}_L^{K-1} \overset{p+1}{\partial}\, \overset{p+1}{v}_K + (-1)^{p-1} \overset{p}{\Delta}{}_R^{K-1} \overset{p-1}{\delta}\, \overset{p-1}{v}_K, \\
\underset{p}{w} &= (-1)^p \underset{p}{\Delta}{}_L^{K-1} \underset{p+1}{\delta}\, \underset{p+1}{w}_K + (-1)^{p-1} \underset{p}{\Delta}{}_R^{K-1} \underset{p-1}{\partial}\, \underset{p-1}{w}_K;
\end{aligned} \tag{10.8}$$

$$\overset{p-1}{\Delta}{}_L^K \overset{p-1}{v}_K = \overset{p}{\partial}\overset{p}{v}, \quad \underset{p-1}{\Delta}{}_L^K \underset{p-1}{w}_K = \underset{p}{\delta}\underset{p}{w}, \quad \overset{p+1}{\Delta}{}_R^K \overset{p+1}{v}_K = \overset{p}{\delta}\overset{p}{v}, \quad \underset{p+1}{\Delta}{}_R^K \underset{p+1}{w}_K = \underset{p}{\partial}\underset{p}{w}; \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{p}{u}_{(K-1)L} = (-1)^p \overset{p+1}{\partial}\, \overset{p+1}{v}_K + \overset{p-1}{\delta}\, \overset{p-1}{v}_{KL}, \quad \underset{p}{u}_{(K-1)L} = (-1)^p \underset{p+1}{\delta}\, \underset{p+1}{w}_K + \underset{p-1}{\partial}\, \underset{p-1}{w}_{KL}, \\
&\overset{p}{u}_{(K-1)R} = (-1)^{p-1} \overset{p-1}{\delta}\, \overset{p-1}{v}_K + \overset{p+1}{\partial}\, \overset{p+1}{v}_{KR}, \quad \underset{p}{u}_{(K-1)R} = (-1)^{p-1} \underset{p-1}{\partial}\, \underset{p-1}{w}_K + \underset{p+1}{\delta}\, \underset{p+1}{w}_{KR}.
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Отметим, что в уравнениях (10.7) и (10.10), связывающих этапы разложений, вторые слагаемые не входят в разложения (10.5) и (10.8) — они определяют произвол в определениях.

Уравнения (10.6), (10.7) и (10.9), (10.10), определяющие и связывающие разложения, совместны вследствие тождеств (9.9) и отсутствия (ко)гомологий. При необходимости можно записать их явные решения с использованием результатов раздела 9.

Предложение 13. *Всякое (ко)векторное поле в $\mathbb{D}$ может быть разложено*

(1) *по (ко)векторным полям на смежных (ко)инцидентных элементах посредством сведе́ния их к рассматриваемым p-элементам с помощью ∂-, δ- и Δ_L-, Δ_R-операторов*;

(2) *по двум (ко)векторным полям, определенным на рассматриваемых p-элементах с применением Δ_L- и Δ_R-операторов.*

Замечание 4. Все полученные формулы для разложений верны только при $p = 0, 1, 2, 3$. Случаи $p = -2, -1, 4, 5$ требуют специального исследования, т. к. операторы замыкания не являются (ко)граничными. Это исследование сводится к решению простейших линейных уравнений и легко выполнимо.

Заключение

Построенные разложения (ко)векторных полей применяются в исследованиях физических процессов в дискретном пространстве-времени. Это связано с тем обстоятельством, что ∂- и δ-операторы имеют смысл пространственных и пространственно-временных дифференцирований, а Δ-операторы Лапласа — дифференцирований по времени в каждой структурной части $\mathbb{D}$. Полученные формулы можно использовать для согласованного описания физических явлений, одновременно происходящих в различных структурных частях дискретного пространства.

Литература

1. Якупов М.Ш. *Каноническое описание и обращение операторов в дискретном пространстве.* I // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 8. – С.59–71.
2. Якупов М.Ш. *Дифференцирование и кодифференцирование в дискретном пространстве с объемным фундаментальным элементом* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С.59–78.

Казанский государственный университет

Поступила
31.10.1997