ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.968:519.6

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, И.К. РАХИМОВ

ОБ ОДНОМ ОПТИМАЛЬНОМ СПЛАЙН-МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

В работе американского математика Арнольда [1] предложен и исследован смешанный метод решения одного класса слабосингулярных интегральных уравнений I-рода, названный им "сплайн-тригонометрическим методом Галёркина". Суть этого метода заключается в следующем: приближенное решение ищется в виде полиномиального сплайна, а его коэффициенты определяются по методу Галёркина на основе тригонометрической системы функций. В последующие годы указанный метод исследовался в ряде работ (в частности, [2]; [3], § 19, гл. 2), в которых рассматривались одномерные слабосингулярные интегральные уравнения I-рода с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора и интегральные уравнения Фредгольма II-рода.

Ниже предлагается теоретическое обоснование данного метода в смысле ([4], гл. 14; [5], гл. 1, 2) для операторных уравнений II-рода и приводящихся к ним в ряде функциональных пространств. Устанавливаются в определенном смысле неулучшаемые оценки погрешности и доказывается оптимальность по порядку метода. Доказывается также применимость полученных при этом общих результатов к регулярным и сингулярным интегральным и интегро–дифференциальным уравнениям.

1. Постановка задачи

Пусть X и Y — полные линейные нормированные пространства с нормами соответственно $\|x\|_X$ и $\|y\|_Y$ ($x \in X$, $y \in Y$). Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{1.1}$$

где A и $G : X \to Y$ — непрерывно обратимые операторы, а $T : X \to Y$ — вполне непрерывный или же малый по норме оператор. Ниже без особого ограничения общности под парой $(X; Y)$ будем понимать любую из пар пространств 2π-периодических функций

$$(L_2; W_2^1), (L_2; L_2), (W_2^1; L_2), (W_2^1; W_2^1); \tag{1.2}$$

здесь $L_2 = L_2(-\pi, \pi)$ — лебегово пространство квадратично суммируемых функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(s)|^2 ds \right\}^{1/2}, \quad \varphi \in L_2,$$

а $W_2^1 = W_2^1(-\pi, \pi)$ — пространство 2π-периодических функций Соболева с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^1} = \|\varphi(s)\|_{L_2} + \left\| \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|_{L_2}, \quad \varphi \in W_2^1.$$

Обозначим через X_n подпространство 2π-периодических сплайнов первой степени с узлами

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = \overline{-n, n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

наделенное нормой пространства X; нетрудно показать, что

$$X_n \subset X, \quad \dim X_n = 2n+1 < \infty. \tag{1.4}$$

Обозначим через Y_n множество всех тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos ks + b_k \sin ks \quad (\alpha_k \in \mathbb{C}, a_j, b_r \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}),$$

наделенное нормой пространства Y; очевидно,

$$Y_n \subset Y, \quad \dim Y_n = 2n+1 < \infty. \tag{1.5}$$

Введем оператор проектирования $\Phi_n : Y \to Y_n$ по формуле

$$\Phi_n(f; s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{iks}, \quad f \in Y, \tag{1.6}$$

где

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \tag{1.7}$$

— коэффициенты Фурье в комплексной форме функции $\varphi \in L_1(-\pi, \pi)$.

Приближенное решение уравнения (1.1) будем искать в виде сплайна

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \varphi_k(s) \in X_n \quad (\alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}), \tag{1.8}$$

который определим как точное решение следующего конечномерного уравнения

$$A_n x_n \equiv \Phi_n G x_n + \Phi_n T x_n = \Phi_n y \quad (x_n \in X_n, \quad \Phi_n y \in Y_n). \tag{1.9}$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.9) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k c_j(A\varphi_k) = c_j(y), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{1.10}$$

относительно коэффициентов сплайна (1.8), где $\varphi_k(s) = \varphi_{k,n}(s)$ — фундаментальные 2π-периодические сплайны первой степени для сетки узлов (1.3):

$$\varphi_k(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \le s_{k-1} \text{ и } s \ge s_{k+1}; \\ \dfrac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}} & \text{при } s_{k-1} \le s \le s_k; \\ \dfrac{s_{k+1} - s}{s_{k+1} - s_k} & \text{при } s_k \le s \le s_{k+1}. \end{cases} \tag{1.11}$$

В следующих параграфах приводится обоснование вычислительной схемы (1.1)–(1.11) в парах функциональных пространств (1.2). При этом всюду будем использовать условие

$$\Phi_n G x_n = G \Phi_n x_n, \quad x_n \in X_n, \tag{1.12}$$

которое во многих случаях выполняется, как будет показано ниже, за счет подходящего подбора главной части G оператора A. Будем пользоваться также величиной

$$E_n(\varphi)_X = \inf_{\alpha_k \in \mathbb{R}} \left\| \varphi - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|_X = \inf_{x_n \in X_n} \|\varphi - x_n\|_X$$

— наилучшим приближением функции $\varphi \in X$ всевозможными сплайнами вида (1.8) в пространстве X.

2. Основные результаты

Для вычислительной схемы (1.1)–(1.11) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* а) $T : X \to Y$ — *вполне непрерывный, а* $G : X \to Y$ — *непрерывно обратимый операторы*; б) *уравнение* (1.1) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *при любой правой части* $y \in Y$.

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$, *хотя бы начиная с некоторого, СЛАУ* (1.10) *имеет единственное решение* $\alpha_k^* \in \mathbb{R}$, $k = \overline{-n, n}$. *Приближенные решения*

$$x_n^*(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^* \varphi_k(s) \in X_n \tag{1.8*}$$

сходятся в пространстве X *к точному решению* $x^*(s) \in X$ *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(x^*)_X \leq \|x^* - x_n^*\|_X = O\left\{E_n(x^*)_X\right\}. \tag{2.1}$$

Следствие. Пусть A — ограниченный оператор из пространства X в пространство $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой. Тогда невязка $r_n(s) \equiv y(s) - A(x_n^*; s)$ исследуемого метода сходится равномерно со скоростью

$$\|r_n(s)\|_{C_{2\pi}} = \max_s |r_n(s)| = O\{E_n(x^*)_X\}. \tag{2.2}$$

Следуя [5], [6], выясним оптимальные свойства исследуемого метода в классе $M_n = \{m_n\}$ всевозможных прямых методов, позволяющих построить приближенное решение уравнения (1.1) в виде сплайна (1.8).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *справедливы соотношения*

$$V_n = \inf_{m_n \in M_n} \|x^* - x_n\|_X \asymp E_n(x^*)_X,$$

и метод (1.1)–(1.11) *оптимален по порядку в классе сплайновых методов* M_n *решения операторного уравнения* (1.1).

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{E} = \{e\}$ — *класс однозначно разрешимых уравнений вида* (1.1), *где класс* $X^* = \{x^*\}$ *искомых элементов образует центрально-симметрический компакт в пространстве* X. *Тогда справедливы соотношения*

$$V_n(\mathcal{E}) = \inf_{m_n \in M_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n\|_X \asymp \rho(X^*, X_n),$$

и метод (1.1)–(1.11) *оптимален по порядку в классе сплайновых методов* M_n *решения класса* $\mathcal{E}$ *операторных уравнений* (1.1).

Следует отметить, что теоремы 2 и 3 позволяют установить роль и место метода (1.1)–(1.11) лишь в классе однотипных, а именно, *сплайновых* методов $M_n = \{m_n\}$. Если же мы хотим решить указанную задачу оптимизации в классе *всех прямых* методов, то необходимо знать аппроксимативные и экстремальные свойства введенных в § 1 подпространств сплайнов X_n. Например, из теоремы 3 и результатов [6] следует

Теорема 4. *Если подпространства* X_n *экстремальны хотя бы по порядку для колмогоровского поперечника* $d_{2n+1}(X^*, X)$ *множества* X^* *в пространстве* X, *то метод* (1.1)–(1.11) *будет оптимальным по порядку среди всевозможных прямых методов (ранга* $\asymp n$*) решения класса* $\mathcal{E} = \{e\}$ *однозначно разрешимых уравнений* (1.1), *класс решений* $X^* = \{x^*\}$ *которых образует центрально-симметрический компакт в пространстве* X.

3. Предварительные результаты

Доказательство сформулированных выше теорем существенным образом опирается на вспомогательные результаты, часть из которых имеют, на наш взгляд, и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $X = Y = L_2$. Тогда для любого сплайна $x_n \in X_n$ справедливо неравенство*

$$\|\Phi_n x_n\|_{L_2} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|x_n\|_{L_2}, \quad \Phi_n : X_n \to Y_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Доказательство. С помощью леммы 5.2 ([3], гл. 1) и равенства Парсеваля для любого $x_n \in X_n$ находим (3.1):

$$\|\Phi_n x_n\|_{L_2} = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} |c_k(x_n)|^2 \right\}^{1/2} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x_n)|^2 \right\}^{1/2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|x_n\|_{L_2}.$$

Лемма 2. *Пусть $X = Y = W_2^1$. Тогда для любого сплайна $x_n \in X_n$ справедлива оценка*

$$\|\Phi_n x_n\|_{W_2^1} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|x_n\|_{W_2^1}, \quad \Phi_n : X_n \to Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Поскольку операторы Фурье и оператор дифференцирования перестановочны, то для любого $x_n \in X_n$ в пространстве W_2^1 имеем

$$\|\Phi(x_n; s)\|_{W_2^1} = \|\Phi_n(x_n(\sigma); s)\|_{L_2} + \left\| \frac{d}{ds} \Phi_n(x_n(\sigma); s) \right\|_{L_2} = \|\Phi_n(x_n; s)\|_{L_2} +$$
$$+ \|\Phi_n\left(\frac{d}{d\sigma} x_n(\sigma); s\right)\|_{L_2} = \|\Phi_n x_n\|_{L_2} + \|\Phi_n y_n\|_{L_2}, \quad y_n(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} x_n(\sigma). \tag{3.2}$$

Применяя к первому слагаемому в правой части (3.2) неравенство (3.1), а ко второму – лемму 5.1 ([3], гл. 1), последовательно находим

$$\|\Phi_n x_n\|_{W_2^1} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|x_n\|_{L_2} + \left\{ \sum_{k=-n}^{n} |c_k(y_n)|^2 \right\}^{1/2} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|x_n\|_{L_2} +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(y_n)|^2 \right\}^{1/2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|x_n(s)\|_{L_2} + \frac{2}{\pi} \|y_n(s)\|_{L_2} \geq$$
$$\geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left\{ \|x_n(s)\|_{L_2} + \left\| \frac{d}{ds} x_n(s) \right\|_{L_2} \right\} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|x_n\|_{W_2^1}, \quad x_n \in X_n.$$

Лемма 3. *Если оператор $G : X \to Y$ непрерывно обратим, то при всех $n \in \mathbb{N}$ операторы $G_n = \Phi_n G : X_n \to Y_n$ также непрерывно обратимы, а обратные операторы $G_n^{-1} : Y_n \to X_n$ ограничены по норме в совокупности*:

$$\|G_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|G^{-1}\|_{Y \to X}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Для любого $x_n \in X_n$ с помощью лемм 1 и 2 и условия (1.12) находим

$$\|G_n x_n\|_Y = \|\Phi_n G x_n\|_Y = \|G \Phi_n x_n\|_Y \geq \frac{1}{\|G^{-1}\|_{Y \to X}} \|\Phi_n x_n\|_X \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|G^{-1}\|_{Y \to X}^{-1} \|x_n\|_X. \tag{3.4}$$

Из (3.4), как известно (напр., [4], с. 208–211), следует, что операторы $G_n : X_n \to Y_n$ имеют левые обратные G_{nl}^{-1} и

$$\|G_{nl}^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leq (2/\pi)^2 \|G^{-1}\|_{Y \to X}. \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.5) и (1.4), (1.5) следует требуемое утверждение.

Лемма 4. *В условиях леммы 3 для любого $y \in Y$*

$$\lim_{n\to\infty} G_n^{-1}\Phi_n y = G^{-1}y \tag{3.6}$$

в пространстве X, причем для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}\Phi_n y\|_X = \|(E - G_n^{-1}\Phi_n G)G^{-1}y\|_X \le \frac{\pi^2}{2}\nu(G)E_n(G^{-1}y)_X, \tag{3.7}$$

где $\nu(G) = \|G\|_{X\to Y}\|G^{-1}\|_{Y\to X}$ — число обусловленности оператора G.

Доказательство. Поскольку $1 \le \nu(G) < \infty$, а система функций (1.11) полна в любом из пространств L_2 и W_2^1, то (3.6) следует из (3.7). Поэтому докажем (3.7), применяя при этом теорему 6 ([5], гл. 1) к уравнениям

$$Gx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{3.8}$$

$$G_n x_n \equiv \Phi_n G x_n = \Phi_n y \quad (x_n \in X_n, \quad \Phi_n y \in Y_n). \tag{3.9}$$

Тогда с помощью леммы 3 для решений уравнений (3.8) и (3.9) находим

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}\Phi_n y\|_X = \|(E - G_n^{-1}\Phi_n G)G^{-1}y\|_X \le \|E - G_n^{-1}\Phi_n G\|_{X\to X}\|G^{-1}y - \overline{x}_n\|_X, \tag{3.10}$$

где $\overline{x}_n$ — произвольный элемент из X_n. Из (3.10) за счет подходящего выбора элемента $\overline{x}_n \in X_n$ находим

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}\Phi_n y\|_X \le E_n(G^{-1}y)_X\{1 + \|G_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n}\|\Phi_n\|_{Y\to Y_n}\|G\|_{X\to Y}\}. \tag{3.11}$$

Поскольку (напр., [7], с. 21) для любых $n \in \mathbb{N}$

$$\|\Phi_n\|_{W_2^1\to W_2^1} = 1, \quad \|\Phi_n\|_{L_2\to L_2} = 1, \tag{3.12}$$

то из (3.11), (3.12) и (3.3) следуют соотношения (3.7).

Лемма 5. *Для любого сплайна $x_n \in X_n \subset L_2$ справедливы оценки*

$$\|x_n\|_{C_{2\pi}} \le \sqrt{3(2n+1)}\|x_n\|_{L_2} = O(\sqrt{n})\|x_n\|_{L_2}. \tag{3.13}$$

Доказательство. В силу (1.8), (1.11) и неравенства Буняковского равномерно относительно $s \in \mathbb{R}$ имеем

$$|x_n(s)| \le \left\{\sum_{k=-n}^{n}|\alpha_k|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=-n}^{n}|\varphi_k(s)|^2\right\}^{1/2} \le \left\{\sum_{k=-n}^{n}|\alpha_k|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=-n}^{n}\varphi_k(s)\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{k=-n}^{n}|x_n(s_k)|^2\right\}^{1/2} = \sqrt{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}|x_n(s_k)|^2\right\}^{1/2}, \quad x_n \in X_n.$$

Отсюда и из леммы 3.2 ([7], гл. 4) находим оценки (3.13).

Лемма 6. *Для любого сплайна $x_n \in X_n \subset W_2^1$ справедливы оценки*

$$\left\|\frac{d}{ds}x_n(s)\right\|_{L_2} \le \frac{\sqrt{3}}{\pi}(2n+1)\|x_n(s)\|_{L_2} = O(n)\|x_n\|_{L_2}. \tag{3.14}$$

Доказательство. В силу (1.8), (1.11) с учетом периодичности имеем

$$\left\|\frac{d}{ds}x_n(s)\right\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{d}{ds}x_n(s)\right|^2 ds = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{s_{k-1}}^{s_k}\left|\frac{d}{ds}x_n(s)\right|^2 ds =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{s_{k-1}}^{s_k}\left|\frac{x_n(s_k)-x_n(s_{k-1})}{s_k-s_{k-1}}\right|^2 ds = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\frac{|x_n(s_k)-x_n(s_{k-1})|^2}{s_k-s_{k-1}} =$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi^2}\sum_{k=-n}^{n}|x_n(s_k)-x_n(s_{k-1})|^2 \le \frac{2n+1}{\pi^2}\sum_{k=-n}^{n}|x_n(s_k)|^2 =$$

$$= \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}|x_n(s_k)|^2,$$

$$\left\|\frac{d}{ds}x_n(s)\right\|_{L_2} \le \frac{2n+1}{\pi}\left\{\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}|x_n(s_k)|^2\right\}^{1/2}.$$

Отсюда и из леммы 3.2 ([7], гл. 4) находим оценки (3.14)

$$\|x_n'(s)\|_{L_2} \le \frac{2n+1}{\pi}\sqrt{3}\|x_n(s)\|_{L_2} = O(n)\|x_n\|_{L_2}.$$

4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Поскольку оператор $G : X \to Y$ (по предположению) и операторы $G_n : X_n \to Y_n$ при любых $n \in \mathbb{N}$ (по доказанному в лемме 3) непрерывно обратимы, то уравнения (1.1) и (1.9) эквивалентны уравнениям соответственно

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (x, G^{-1}y \in X), \tag{4.1}$$

$$K_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1}\Phi_n T x_n = G_n^{-1}\Phi_n y \quad (x_n, G_n^{-1}\Phi_n y \in X_n). \tag{4.2}$$

Покажем, что уравнения (4.1) и (4.2) близки в смысле гл. 1 из [5]. Для их правых частей в силу леммы 4 имеем

$$\delta_n \equiv \|G^{-1}y - G_n^{-1}\Phi_n y\|_X = \|(E - G_n^{-1}\Phi_n G)G^{-1}y\|_X \le \frac{\pi^2}{2}\nu(G)E_n(G^{-1}y)_X, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Из (4.1)–(4.3) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X = \|G^{-1}Tx_n - G_n^{-1}\Phi_n T x_n\|_X =$$

$$= \|(E - G_n^{-1}\Phi_n G)G^{-1}Tx_n\|_X \le \frac{\pi^2}{2}\nu(G)E_n(G^{-1}Tx_n)_X. \tag{4.4}$$

Из (4.4) для любого $x_n \in X_n$, $x_n \neq 0$, получаем

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X \le \frac{\pi^2}{2}\nu(G)\|x_n\|_X\, E_n(G^{-1}Tz_n)_X, \quad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \le \frac{\pi^2}{2}\nu(G)\sup_{z\in S}E_n(G^{-1}Tz)_X \equiv \frac{\pi^2}{2}\nu(G)\varepsilon_n', \tag{4.5}$$

где $S = S(0,1)$ — шар радиуса единица с центром в нулевой точке пространства X. Поскольку $U \equiv G^{-1}TS$ — компактное множество в X, то в силу теоремы И.М. Гельфанда (напр., [4], с. 322–323)

$$\varepsilon_n' = E_n(G^{-1}TS) = \sup_{\varphi\in U}E_n(\varphi)_X \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.6}$$

Поэтому в силу (4.5) и (4.6) имеем $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, что наряду с (3.6), (4.3) и с условиями теоремы позволяет применить к уравнениям (4.1) и (4.2) теорему 7 ([5], гл. 1). Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv \varepsilon_n \|K^{-1}\|_{X \to X} < 1, \quad K^{-1} = A^{-1}G, \tag{4.7}$$

операторы $K_n \equiv G_n^{-1}A_n : X_n \to X_n$ (а следовательно, и операторы $A_n = G_n K_n : X_n \to Y_n$) непрерывно обратимы и

$$\|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \leq \frac{\|K^{-1}\|_{X \to X}}{1 - q_n} \leq 2\|K^{-1}\|_{X \to X} \quad (n \geq n_0), \tag{4.8}$$

причем для любого $y \in Y$

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|K^{-1}G^{-1}y - K_n^{-1}G_n^{-1}\Phi_n y\|_X = \|A^{-1}y - A_n^{-1}\Phi_n y\|_X = O(\varepsilon_n + \delta_n) \to 0, \ \ n \to \infty. \tag{4.9}$$

Из (4.7)–(4.9) видно, что операторы $A_n^{-1}\Phi_n : Y \to X_n$ сходятся сильно, поэтому в силу теоремы Банаха–Штейнхауса (напр., [4], с. 271–272) они (а следовательно, и операторы $A_n^{-1} : Y_n \to X_n$) ограничены по норме в совокупности

$$\|A_n^{-1}\Phi_n\|_{Y \to X} = O(1), \quad \|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} = O(1). \tag{4.10}$$

Кроме того, в силу (4.8) и (3.3) имеем

$$\|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} = \|K_n^{-1}G_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leq \|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n}\|G_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leq$$
$$\leq \frac{\|K^{-1}\|_{X \to X}}{1 - q_n}\|G^{-1}\|_{Y \to X}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \leq \frac{\pi^2}{2}\nu(G)\|A^{-1}\|_{Y \to X} \ \ (n \geq n_0). \tag{4.11}$$

Поэтому, применяя к уравнениям (1.1) и (1.9) теорему 6 ([5], гл. 1), находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|A^{-1}y - A_n^{-1}\Phi_n y\|_X = \|(E - A_n^{-1}\Phi_n A)x^*\|_X \leq \|E - A_n^{-1}\Phi_n A\|_{X \to X} E_n(x^*)_X. \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.10)–(4.12) и (3.12) следуют оценки (2.1).

Если $A : X \to C_{2\pi}$ — ограниченный оператор, то из (1.1) находим

$$\|r_n\|_{C_{2\pi}} = \|A(x^* - x_n^*)\|_{C_{2\pi}} \leq \|A\|_{X \to C_{2\pi}}\|x^* - x_n^*\|_X,$$

откуда и из (2.1) следует оценка (2.2). Теорема 1 и ее следствие доказаны.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $\|x^* - x_n\|_X \geq E_n(x^*)_X$ для любого $x^* \in X$ и любых $x_n \in X_n$, то

$$E_n(x^*)_X \leq V_n \leq \|x^* - x_n^*\|_X, \tag{4.13}$$

где x_n^* — приближенное решение уравнения (1.1), построенное по методу Арнольда по формуле (1.8*). Из (4.13) и (2.1) получаем неравенства

$$E_n(x^*)_X \leq V_n \leq \|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n(x^*)_X\}. \tag{4.14}$$

Отсюда и из соответствующих результатов [5], [6] следует требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 3. В условиях этой теоремы из (4.14) получаем неравенства

$$\rho(X^*, X_n) \leq V_n(\mathcal{E}) \leq \sup_{x^* \in X^*}\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\rho(X^*, X_n)\}, \tag{4.15}$$

где, как и выше, $\rho(X^*, X_n)$ — расстояние от множества X^* до подпространства X_n в метрике пространства X. Из (4.15) и соответствующих результатов [5], [6] получаем утверждение теоремы 3.

5. О скорости сходимости метода

Теорема 1 и установленные для ее доказательства леммы и известные результаты теории приближений сплайнами [8]–[10] позволяют установить скорость сходимости исследуемого метода в зависимости от структурных свойств элементов уравнения (1.1). Приведем некоторые результаты такого характера.

Теорема 5. *Пусть $X = L_2$, а $Y = L_2$ или W_2^1. Если элементы уравнения* (1.1) *таковы, что его решение $x^* \in W_2^r$ ($r \in \mathbb{N}$), то в условиях теоремы* 1 *метод* (1.1)–(1.11) *сходится в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = \{O(n^{-r}) \ \text{ при } \ r = 1 \ \text{ и } \ 2; \quad O(n^{-2}) \ \text{ при } \ r \geq 3\}. \tag{5.1}$$

Следствие 1. В условиях теоремы метод (1.1)–(1.11) сходится равномерно со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{C_{2\pi}} = \{O(n^{-r+1/2}) \ \text{ при } \ r = 1 \ \text{ и } \ 2; \quad O(n^{-3/2}) \ \text{ при } \ r \geq 3\}. \tag{5.2}$$

Следствие 2. В условиях теоремы метод (1.1)–(1.11) сходится в пространстве W_2^1 со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} = O(1/n) \ \text{ при } \ r \geq 2. \tag{5.3}$$

Доказательство. Теорема 5 и следствие 1 с оценкой (5.2) доказываются по схеме доказательства теоремы 19.4 ([3], гл. 2) с использованием при этом леммы 5; поэтому докажем лишь следствие 2.

В силу (5.1) справедливо представление

$$x^*(s) - x_n^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2^k n}^*(s) - x_{2^{k-1}n}^*(s), \tag{5.4}$$

где ряд сходится по крайней мере в среднем. Из (5.1), (5.4) и леммы 6 находим

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{d}{ds}[x^*(s) - x_n^*(s)]\right\|_{L_2} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{d}{ds}[x_{2^k n}^*(s) - x_{2^{k-1}n}^*(s)]\right\|_{L_2} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} O(2^k n)\|x_{2^k n}^* - x_{2^{k-1}n}^*\|_{L_2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} O(2^k n)\{\|x^* - x_{2^k n}^*\|_{L_2} + \|x^* - x_{2^{k-1}n}^*\|_{L_2}\} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} O(2^k n)\Big\{O\Big(\frac{1}{(2^k n)^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{(2^{k-1}n)^2}\Big)\Big\} = O\Big(\frac{1}{n}\Big)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = O\Big(\frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (5.1) следует оценка (5.3).

Теорема 6. *Пусть $X = W_2^1$, а $Y = L_2$ или W_2^1. Если в условиях теоремы* 1 *имеем $\frac{d}{ds}x^*(s) \in H_2^{\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$), то метод* (1.1)–(1.11) *сходится в пространстве W_2^1 со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{5.5}$$

Следствие. В условиях теоремы 6 метод (1.1)–(1.11) сходится равномерно и в пространстве Гёльдера H_β ($0 < \beta \leq 1/2$) со скоростью, определяемой неравенствами

$$\|x^* - x_n^*\|_{C_{2\pi}} \leq \|x^* - x_n^*\|_{H_\beta} = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \tag{5.6}$$

Доказательство. Из теоремы 1 в рассматриваемом частном случае получаем

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_n^*\|_{W_2^1} &= O(E_n(x^*)_{W_2^1}) = O\{\|x^* - P_n x^*\|_{W_2^1}\} = \\
&= O\Big\{\|x^* - P_n x^*\|_{L_2} + \left\|\frac{d}{ds}[x^*(s) - P_n(x^*; s)]\right\|_{L_2}\Big\},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

где

$$P_n(x^*; s) = \sum_{k=-n}^{n} x^*(s_k)\varphi_k(s). \tag{5.8}$$

Используя аппроксимативные свойства сплайна (5.8), из (5.7) получаем оценку (5.5). Неравенства (5.6) следуют из оценки (5.5) и из того факта, что пространство W_2^1 непрерывно вложено в пространство H_β при любых $\beta \in (0, 1/2]$, а последнее (при любых $\beta \in (0, 1])$ — в пространство $C_{2\pi}$.

6. Приложения к интегральным и интегродифференциальным уравнениям

Приведем примеры конкретных уравнений, к которым могут быть применены установленные выше результаты, причем эти уравнения встречаются в многочисленных прикладных задачах (см., напр., [3], [5], [7], [11]–[14] и библиографию в них).

6.1. *Слабосингулярное интегральное уравнение* I-*рода.* Пусть $X = L_2$, $Y = W_2^1$, а

$$Ax \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma - s}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \tag{6.1}$$

где $y(s) \in W_2^1$ и $h(s,\sigma) \in W_2^1 \otimes L_2$. Такой выбор основных пространств позволяет [7] считать задачу решения некорректного уравнения (6.1) корректно поставленной.

Здесь операторы G и $T : X \to Y$ определяем по формулам

$$G(x; s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma - s}{2}\right| x(\sigma)d\sigma, \quad T(x; s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma, \tag{6.2}$$

причем $T : X \to Y$ является вполне непрерывным, а $G : X \to Y$, как показано в ([7], § 2, гл. 1), непрерывно обратимым оператором с оценками

$$\|G\|_{X\to Y} \leq 1, \quad \|G^{-1}\|_{Y\to X} = 2. \tag{6.3}$$

Покажем, что для оператора $G : X \to Y$ из (6.2) условие (1.12) выполняется. Действительно, полагая

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{iks}, \quad x \in L_2,$$

и следуя ([7], § 2, гл. 1), для любой функции $x \in L_2$ последовательно находим

$$\Phi_n(x; s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(x)e^{iks}, \quad G(x; s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k c_k(x)e^{iks},$$

$$\Phi_n(Gx; s) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k c_k(x)e^{iks},$$

$$G(\Phi_n x; s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k c_k(\Phi_n x)e^{iks} = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k c_k(x)e^{iks},$$

где

$$\lambda_k = \{-\ln 2 \text{ при } k = 0; \ -\tfrac{1}{2|k|} \text{ при } |k| = 1, 2, \dots\},$$
$$c_k(\Phi_n x) = \{c_k(x) \text{ при } |k| \leq n; \ 0 \text{ при } |k| > n\}.$$

Отсюда получаем требуемое тождество $\Phi_n(Gx; s) = G(\Phi_n x; s)$, $x \in L_2$, что наряду с (6.3) показывает, что для операторов G и $T : X \to Y$ все требования из § 1 выполнены.

6.2. *Сингулярное интегральное уравнение* I-*рода.* Пусть $X = Y = L_2$, а

$$Ax \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \tag{6.4}$$

где $y \in L_2(-\pi, \pi)$, $h \in L_2(-\pi, \pi)^2$, причем сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу [15].

Операторы G и $T : X \to X$ определим формулами

$$G(x; s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}\right) x(\sigma) d\sigma, \quad T(x; s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-1 + h(s, \sigma)] x(\sigma) d\sigma. \tag{6.5}$$

Тогда оператор $T : X \to X$, как хорошо известно, является вполне непрерывным; кроме того, с учетом свойств сингулярного интегрального оператора с ядром Гильберта в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ (напр., [15]) легко показать, что оператор $G : X \to X$ является непрерывно обратимым, причем

$$\|G\|_{X \to X} = 1, \quad \|G^{-1}\|_{X \to X} = 1. \tag{6.6}$$

В самом деле, решая уравнение $Gx = y$ $(x, y \in X)$ и представляя элементы x и $y \in X$ в виде рядов

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{iks}, \quad y(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}, \tag{6.7}$$

запишем его в эквивалентном виде

$$G(x; s) = c_0(x) + i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \, c_k(x) e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}, \tag{6.8}$$

где

$$\operatorname{sgn} k = \{+1 \text{ при } k > 0; \ \ 0 \text{ при } k = 0; \ \ -1 \text{ при } k < 0\}.$$

Теперь с помощью равенства Парсеваля для любых $x \in X$ находим

$$\|Gx\|_X = \left\{ |c_0(x)|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |c_k(x)|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \right\}^{1/2} = \|x\|_X,$$

откуда и следует первое из соотношений (6.6). Кроме того, из (6.8) находим $c_0(x) = c_0(y)$, $c_k(x) = -i \operatorname{sgn} k \, c_k(y)$, $k \neq 0$; поэтому в силу (6.7) справедливо представление

$$x(s) = G^{-1}(y; s) = c_0(y) - i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \, c_k(y) e^{iks}, \ \ x \in X,$$

а тогда в силу равенства Парсеваля для любого $y \in X$ имеем

$$\|G^{-1}y\|_X = \left\{ |c_0(y)|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |c_k(y)|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(y)|^2 \right\}^{1/2} = \|y\|_X,$$

откуда следует второе из соотношений (6.6).

Заметим также, что для оператора $G : X \to X$ из (6.5) условие (1.12) выполняется. Действительно, в силу (6.7) и (6.8) последовательно находим

$$\Phi_n(x; s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(x) e^{iks}, \quad \Phi_n(Gx; s) = c_0(x) + i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{sgn} k \, c_k(x) e^{iks},$$

$$G(\Phi_n x; s) = c_0(\Phi_n x) + i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \, c_k(\Phi_n x) e^{iks} =$$

$$= c_0(x) + i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{sgn} k \, c_k(x) e^{iks} = \Phi_n(Gx; s);$$

здесь использованы также приведенные выше соотношения для $c_k(\Phi_n x)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Заметим, что результат этого пункта легко переносится на полное уравнение вида $Ax \equiv ax + bGx + Bx = y$, где $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, B — вполне непрерывный оператор в пространстве L_2.

6.3. *Интегральное уравнение Фредгольма* II*-рода с составным ядром.* Пусть $X = Y = L_2$, а

$$Ax \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \tag{6.9}$$

где $y(s) \in L_2(-\pi,\pi)$, $g(t) \in L_1(-\pi,\pi)$, $h(s,\sigma) \in L_2(-\pi,\pi)^2$.

Здесь в качестве операторов G и $T : X \to X$ берем

$$G(x;s) = x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma, \quad T(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma. \tag{6.10}$$

Известно, что оператор T является вполне непрерывным, а оператор G, как показано в ([7], § 6, гл. 2), непрерывно обратимым, причем

$$\|G\|_{X\to X} \le \max_{k=0,\pm1,\ldots} |1 + c_k(g)| \le 1 + \|g\|_{L_1(-\pi,\pi)},$$
$$\|G^{-1}\|_{X\to X} \le \max_{k=0,\pm1,\ldots} |1 + c_k(g)|^{-1} \quad (c_k(g) \neq -1).$$

Кроме того, из соответствующих результатов [7] следует, что для оператора $G : X \to X$ из (6.10) имеем $\Phi_n G x = G\Phi_n x$, $x \in X$, т. е. здесь условие (1.12) также выполнено.

6.4. *Периодическая краевая задача для операторно-дифференциального уравнения.* Пусть $X = W_2^1$, $Y = L_2$, а

$$Ax \equiv x'(s) + B(x;s) = y(s), \quad x(-\pi) = x(+\pi), \tag{6.11}$$

где $y \in L_2$, а $B : W_2^1 \to L_2$ — вполне непрерывный (в частности, интегродифференциальный) оператор.

В этом случае операторы G и $T : X \to Y$ определяем формулами

$$G(x;s) = x'(s) + x(s), \quad T(x;s) = B(x;s) - x(s). \tag{6.12}$$

Тогда оператор $T : W_2^1 \to L_2$ является вполне непрерывным, а $G : W_2^1 \to L_2$ непрерывно обратимым, причем $\|G\|_{X\to Y} \le 1$, $\|G^{-1}\|_{Y\to X} \le \sqrt{2}$. Кроме того, здесь соотношение (1.12) становится очевидным ввиду отмеченой выше перестановочности операторов Фурье Φ_n и обобщенного дифференцирования. Поэтому для операторов G и $T : X \to Y$, определенных в (6.12), выполнены все требования из § 1.

6.5. *Обыкновенное интегродифференциальное уравнение.* Пусть $X = Y = W_2^1$, а

$$Ax \equiv x(s) + \int_{-\pi}^{\pi} h_0(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma + \int_{-\pi}^{\pi} h_1(s,\sigma)x'(\sigma)d\sigma = y(s), \tag{6.13}$$

где $y(s) \in W_2^1$ и $h_i(s,\sigma) \in W_2^1 \otimes L_2$ $(i = 1,2)$. Такой выбор основных пространств позволяет [16] решение некорректного уравнения (6.13) считать корректно поставленной задачей. Здесь полагаем $Gx = x$ $(G : W_2^1 \to W_2^1)$, $A = G + T$. Тогда оператор $T : W_2^1 \to W_2^1$ является вполне непрерывным, а оператор $G = E : W_2^1 \to W_2^1$ удовлетворяет всем указанным в § 1 требованиям.

6.6. *Сингулярное интегродифференциальное уравнение* I*-рода.* Пусть $X = W_2^1$, $Y = L_2$,

$$Ax \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x'(\sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2}d\sigma + B(x;s) = y(s), \quad x(-\pi) = x(\pi), \tag{6.14}$$

где $y \in L_2$, а $B : W_2^1 \to L_2$ — вполне непрерывный (в частности, интегродифференциальный) оператор, причем сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу [15].

Здесь операторы G и $T : X \to Y$ определяем формулами

$$G(x;s) = -x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x'(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma \equiv -x(s) + J(x';s), \quad T(x;s) = x(s) + B(x;s). \tag{6.15}$$

Тогда оператор $T : X \to Y$ является вполне непрерывным, а оператор $G : X \to Y$ непрерывно обратимым, причем ([7], § 6, гл. 3) $\|G\|_{X\to Y} \le 1$, $\|G^{-1}\|_{Y\to X} \le \sqrt{2}$. Кроме того, в силу (6.15) для любой функции $x \in W_2^1$ последовательно находим

$$G\Phi_n x = -\Phi_n x + JD\Phi_n x = -\Phi_n x + J\Phi_n Dx = -\Phi_n x + \Phi_n JDx = \Phi_n(-x + JDx) = \Phi_n Gx,$$

где

$$D(\varphi;t) = \frac{d}{dt}\varphi(t), \quad J(D\varphi;s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\varphi'(\sigma)d\sigma, \quad \varphi \in W_2^1.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае условие (1.12) также выполняется.

Заметим, что результат этого пункта легко переносится на полное уравнение вида $Ax \equiv \alpha_1 x' + \beta_1 Jx' + Bx = y$, где $\alpha_1 = \mathrm{const}$, $\beta_1 = \mathrm{const}$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \ne 0$, а B — вполне непрерывный оператор из W_2^1 в L_2.

Как следует из сказанного выше, к уравнениям из примеров 1–6 могут быть применены полученные в предыдущих параграфах результаты по сплайн-тригонометрическому методу Галёркина. Более того, некоторые из указанных результатов применительно к конкретным уравнениям (6.1), (6.4), (6.9), (6.11), (6.13) и (6.14) несколько упрощаются и усиливаются.

7. Некоторые замечания и дополнения

7.1. Как видно из доказательства теоремы 1, погрешность метода (1.1)–(1.11) может быть оценена с помощью соотношений (2.1) и (4.9). Кроме того, из тождества $x^* \equiv G^{-1}y - G^{-1}Tx^*$ и неравенства (2.1) находим оценку

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n(G^{-1}y)_X + E_n(G^{-1}Tx^*)_X\}, \tag{7.1}$$

в ряде случаев более удобную, чем (2.1) и (4.9).

7.2. При $r = 2$ из теоремы 5 получаем оценку

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O(n^{-2}), \quad x^* \in W_2^2, \tag{7.2}$$

которая не может быть улучшена ни при каком улучшении дифференциальных свойств искомой функции $x^*(s)$, следовательно, исследуемый метод является насыщаемым [17]. Поэтому при наличии у $x^*(s)$ более хороших дифференциальных свойств для получения более сильных, чем (7.2) и (7.1), оценок, необходимо использовать приближения сплайнами более высоких степеней.

7.3. Из лемм 1 и 2 с учетом соотношений (1.4) и (1.5) получаем следующий интересный результат:

операторы Фурье Φ_n из (1.6), рассматриваемые как операторы из $X_n \subset X$ в $Y_n \subset Y$, где $X = Y = L_2$ и W_2^1, непрерывно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$, причем обратные операторы Φ_n^{-1} ограничены по норме в совокупности

$$\|\Phi_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n} \le (\pi/2)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.3}$$

7.4. При $X = L_2$ за X_n можно принять также подпространство $X_n^0 = \{x_n\}$ 2π-периодических сплайнов нулевого порядка вида

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\psi_k(s); \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\psi_k(s)$ — характеристические функции интервалов (s_k, s_{k+1}). В этом случае вместо $E_n(\varphi)_{L_2} \equiv E_n^1(\varphi)_{L_2}$ пользуемся величиной $E_n^0(\varphi)_{L_2} = \rho(\varphi, X_n^0)_{L_2}$, $\varphi \in L_2$, а вместо лемм 1, 2 и оценки (7.3) — следующим утверждением:

для любого $x_n \in X_n^0$ *справедливы неравенства*

$$\|\Phi_n x_n\|_{L_2} \geq \frac{2}{\pi}\|x_n\|_{L_2}, \quad \|\Phi_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n^0} \leq \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где подпространство Y_n *определено в п.* 1.

В рассматриваемом случае вычислительная схема исследуемого метода несколько упрощается, однако метод становится насыщаемым уже при $r = 1$ $(x^* \in W_2^r)$.

7.5. Результаты, полученные выше, без существенных изменений переносятся также на случай пространств $X = W_2^p$, $Y = W_2^q$ $(p+1, q+1 \in \mathbb{N};\ p, q \neq 0$ и $1)$, где нормы опеределяются согласно формуле

$$\|x\|_{W_2^r} = \|x\|_{L_2} + \|x^{(r)}\|_{L_2} \quad (x \in W_2^r, \quad r = p \text{ и } q).$$

В этом случае в качестве $X_n \subset W_2^p$ берем подпространство всех 2π-периодических сплайнов степени $m \in \mathbb{N}$ и дефекта 1 по сетке узлов (1.3), причем параметры m и p согласуются неравенством $m \geq p$. Однако ввиду громоздкости формулировок на конкретных результатах останавливаться не будем.

7.6. В приведенных выше теоремах существенным образом использовано требование полной непрерывности оператора $T : X \to Y$. В ряде случаев это требование может быть ослаблено. Для иллюстрации приведем лишь один результат при

$$\|G\|_{X \to Y} = \|G^{-1}\|_{Y \to X} = 1. \tag{7.4}$$

Выполнения равенств (7.4) очень часто можно добиться за счет подходящей нормировки основных пространств X и Y.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (7.4) *и*

$$q \equiv (\pi/2)^2 \|T\|_{X \to Y} < 1. \tag{7.5}$$

Тогда как уравнение (1.1), *так и аппроксимирующая его СЛАУ* (1.10), *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *однозначно разрешимы. Приближенные решения* (1.8*) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в пространстве* X, *причем справедливы следующие оценки*:

$$E_n(x^*)_X \leq \|x^* - x_n^*\|_X \leq 4(1-q)^{-1} E_n(x^*)_X, \ n \in \mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, использованными при доказательстве теоремы 1. Поскольку $A = GK = G(E + G^{-1}T)$ и в силу (7.4) и (7.5)

$$\|G^{-1}T\|_{X \to X} = \|T\|_{X \to Y} \leq q < 1,$$

то операторы $A : X \to Y$ и $K : X \to X$ обратимы одновременно и

$$\|A^{-1}\|_{Y \to X} = \|K^{-1}\|_{X \to X} \leq \frac{1}{1 - \|T\|_{X \to Y}}, \quad \|A\|_{X \to Y} = \|K\|_{X \to X} \leq 1 + \|T\|_{X \to X}. \tag{7.7}$$

В силу леммы 3 оператор $A_n = G_n K_n = G_n(E + G_n^{-1}\Phi_n T)$ для любых $n \in \mathbb{N}$, а в силу (3.3), (7.4), (3.12) и (7.5)

$$\|G_n^{-1}\Phi_n T\|_{X_n \to Y_n} \leq (\pi/2)^2 \|T\|_{X \to Y} = q < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому операторы $A_n : X_n \to Y_n$ и $K_n : X_n \to X_n$ для любых $n \in \mathbb{N}$ обратимы одновременно и

$$\|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leq \|G_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \leq (\pi/2)^2 \frac{1}{1-q}. \tag{7.8}$$

В силу (7.7) и (7.8) для любых $n \in \mathbb{N}$ имеет смысл величина $\|x^* - x_n^*\|_X = \|A^{-1}y - A_n^{-1}\Phi_n y\|_X$, для которой с учетом соотношений (7.4), (7.5), (7.7), (7.8) и (3.12) из теоремы 6 ([5], гл. 1) находим оценки (7.6)

$$E_n(x^*)_X \leq \|x^* - x_n^*\|_X \leq \{1 + \|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \|\Phi_n\|_{Y \to Y_n} \|A\|_{X \to Y}\} E_n(x^*)_X \leq$$
$$\leq \left\{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1 + \|T\|_{X \to Y}}{1 - q}\right\} E_n(x^*)_X \leq \frac{4}{1-q} E_n(x^*)_X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Литература

1. Arnold D.N. *A spline–trigonometric Galerkin method and an exponentially convergent boundary integral method* // Math. Comput. – 1983. – V. 41. – № 164. – P. 383–397.
2. Валеева Р.Т. *Сплайн-тригонометрический метод Галёркина решения интегральных уравнений.* – Казанск. гос. ун-т. – Казань, 1992. – 15с. – Деп. в ВИНИТИ 04.09.92, № 2726–Б92.
3. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
6. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.
7. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I*-рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционно-сеточные методы.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
9. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
10. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
11. Габдулхаев Б Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: Наука, 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.
12. Попов Г.Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* – М.: Наука, 1982. – 344 с.
13. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
14. Назарчук З.Т. *Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах.* – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.
15. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1980. – 514 S.
16. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов*, II // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 10. – С. 21–29.
17. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* – М.: Наука, 1986. – 744 с.

Казанский государственный университет
Казанская государственная
сельскохозяйственная академия

Поступила
07.09.2001