ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 517.929+517.534

С.А. ГУСАРЕНКО

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Как известно, задача минимизации квадратичного функционала

$$\frac{1}{2}\langle Ux,x\rangle - \langle f,x\rangle \to \min,$$

где линейный, самосопряженный, ограниченный оператор U действует в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, $f\in\mathbf{H}$, разрешима тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение $Ux=f$ и оператор U положительно определен. Напомним, что оператор U называется *положительно определенным*[1], если $\langle Ux,x\rangle \geq 0$ при всех $x\in\mathbf{H}$. Таким образом, при решении задачи минимизации функционалов возникает необходимость проверки условий положительной определенности оператора U. Известно ([1], с. 249), что спектр $\sigma(U)$ самосопряженного оператора U принадлежит отрезку $[m_U,M_U]$, где $m_U=\inf\limits_{x\neq 0}\frac{\langle Ux,x\rangle}{\langle x,x\rangle}$, $M_U=\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\langle Ux,x\rangle}{\langle x,x\rangle}$, причем $\|U\|=\max\{-m_U,M_U\}$. Таким образом, оператор U положительно определен тогда и только тогда, когда его спектр $\sigma(U)$ неотрицательный: $m_U\geq 0$. В некоторых случаях спектр оператора U удается вычислить, однако в общей ситуации приходится использовать различные достаточные условия неотрицательности спектра. В частности, оператор U положительно определен тогда и только тогда, когда существует такой самосопряженный оператор $G:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$, что $\|U-G\|\leq m_G$. Эффективное использование этого утверждения возможно, если в качестве оператора G выбирается оператор, нижняя граница спектра которого m_G известна, или ее можно оценить снизу.

Пример 1. Рассмотрим экстремальную задачу минимизации квадратичного функционала в пространстве $\mathbf{L}_2[0,3\tau]$

$$\frac{1}{2}\int_0^{3\tau}\left(x^2(t)-(Sx)(t)x(t)-(Kx)(t)x(t)-2f(t)x(t)\right)\,dt \longrightarrow \min, \tag{1}$$

где оператор внутренней суперпозиции

$$(Sx)(t)=\begin{cases} p(t)x(t-\tau), & \text{если } t\in[\tau,3\tau];\\ 0, & \text{если } t\in[0,\tau),\end{cases}$$

и интегральный оператор $(Kx)(t)=\int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds$ непрерывно действуют в пространстве $\mathbf{L}_2[0,3\tau]$, функция $p:[0,3\tau]\to\mathbf{R}$ измерима и ограничена в существенном на $[\tau,3\tau]$, $f\in\mathbf{L}_2[0,3\tau]$. Разрешимость задачи (1) эквивалентна разрешимости уравнения $Ux\overset{\text{def}}{=}(I-\frac{1}{2}(S^*+S)-\frac{1}{2}(K^*+K))x=f$ и положительной определенности оператора U. Положим $G=I-\frac{1}{2}(S^*+S)$. Тогда

$$(S^*x)(t)=\begin{cases} p(t+\tau)x(t+\tau), & \text{если } t\in[0,2\tau];\\ 0, & \text{если } t\in(2\tau,3\tau],\end{cases}$$

[1] Используется также термин *положительный оператор.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00511).

нижняя граница спектра оператора G равна $m_G = 1 - \frac{1}{2} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \sqrt{p^2(t+\tau)+p^2(t+2\tau)}$, следовательно, оператор U положительно определен, если норма интегрального оператора $\frac{1}{2}\int\limits_0^{3\tau}(\mathcal{K}(t,s)+\mathcal{K}(s,t))x(s)\,ds$ не превосходит m_G.

Ясно, что оператор $\mu I - K$ положительно определен, если $\|K\| \le \mu$. Особый интерес представляет ситуация, когда это условие является необходимым. Дадим в связи с этим следующее определение.

Самосопряженный оператор $K : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ будем называть *позитивным*, если $M_K \ge -m_K$. Условие позитивности можно записать виде $\frac{1}{2}(M_K + m_K) \ge 0$, т. е. центр спектрального отрезка $[m_K, M_K]$ позитивного оператора K неотрицательный. Для позитивного оператора K (и только для него) $\|K\| = M_K$.

Отметим, что всякий положительно определенный оператор является позитивным. Другим примером позитивных операторов служат вполне непрерывные операторы, изотонные по некоторому воспроизводящему конусу положительных элементов ([2], с. 401). От требования полной непрерывности изотонного оператора можно отказаться, заменив его условием “изотонности” скалярного произведения. Пусть в пространстве $\mathbf{H}$ задан такой воспроизводящий конус положительных элементов T^+, что каждый $x \in \mathbf{H}$ единственным образом представим в виде $x = x^+ - x^-$, где x^+, $x^- \in T^+$, $\langle x^+, x^-\rangle = 0$. Обозначим $|x| = x^+ + x^-$.

Теорема 1. *Если $\langle Kx, x\rangle \ge 0$ при всех $x \in T^+$, то оператор K позитивен.*

Доказательство. Предположим, что существует такой элемент $x \in \mathbf{H}$, что $-\langle Kx,x\rangle > M_K\langle x,x\rangle$. Из представления $x = x^+ - x^-$ следует, что $\langle K|x|,|x|\rangle = \langle Kx^+,x^+\rangle + 2\langle Kx^+,x^-\rangle + \langle Kx^-,x^-\rangle \ge -\langle Kx^+,x^+\rangle + 2\langle Kx^+,x^-\rangle - \langle Kx^-,x^-\rangle = -\langle Kx,x\rangle > M_K\langle x,x\rangle = M_K\langle |x|,|x|\rangle$. Неравенство $\langle K|x|,|x|\rangle > M_K\langle |x|,|x|\rangle$ противоречит определению M_K. Следовательно, $-\langle Kx,x\rangle \le M_K\langle x,x\rangle$ при всех $x \in \mathbf{H}$, но тогда $m_K \ge -M_K$. □

Приведем примеры позитивных операторов.

Матричный оператор $\left(\begin{smallmatrix} p & w \\ w & q\end{smallmatrix}\right) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ позитивен тогда и только тогда, когда $p + q \ge 0$.

Матричный оператор $\left(\begin{smallmatrix} p & w & u \\ w & q & v \\ u & v & r\end{smallmatrix}\right) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ позитивен тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:
$a_1 \ge 0$, $a_3 \ge 0$; $a_1 \ge 0$, $a_3 \le 0$, $a_1a_2 \le a_3$; $a_1 \ge 0$, $a_3 \le 0$, ${a_1}^2 + a_2 \ge 0$; $a_1 \le 0$, $a_3 \ge 0$, $a_1a_2 \le a_3$, ${a_1}^2 + a_2 \le 0$, где $a_1 = p + q + r$, $a_2 = pq + rp + rq - u^2 - v^2 - w^2$, $a_3 = pqr + 2uvw - pv^2 - qu^2 - rw^2$.

Оператор $(Kx)(t) = p(t)\int\limits_a^b p(s)x(s)\,ds$, $K : \mathbf{L}_2[a,b] \to \mathbf{L}_2[a,b]$, всегда позитивен.

Оператор $(Kx)(t) = \int\limits_a^b (p(t)p(s) + q(t)q(s))x(s)\,ds$, $K : \mathbf{L}_2[a,b] \to \mathbf{L}_2[a,b]$, всегда позитивен.

Оператор $(Kx)(t) = \int\limits_a^b (p(t)q(s) + p(s)q(t))x(s)\,ds$, $K : \mathbf{L}_2[a,b] \to \mathbf{L}_2[a,b]$, позитивен тогда и только тогда, когда $\int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds \ge 0$.

Оператор $(Kx)(t) = \int\limits_a^b (p(t)p(s) + q(t)q(s) + r(t)r(s))x(s)\,ds$, $K : \mathbf{L}_2[a,b] \to \mathbf{L}_2[a,b]$, позитивен тогда и только тогда, когда позитивен матричный оператор

$$\begin{pmatrix} \int\limits_a^b p^2(s)\,ds & \int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds & \int\limits_a^b p(s)r(s)\,ds \\ \int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds & \int\limits_a^b q^2(s)\,ds & \int\limits_a^b q(s)r(s)\,ds \\ \int\limits_a^b p(s)r(s)\,ds & \int\limits_a^b q(s)r(s)\,ds & \int\limits_a^b r^2(s)\,ds \end{pmatrix}.$$

Оператор $(Kx)(t) = \int\limits_a^b (p(t)q(s) + p(s)q(t) + r(t)r(s))x(s)\,ds$, $K : \mathbf{L}_2[a,b] \to \mathbf{L}_2[a,b]$, позитивен тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:
$a_1 \geq 0$, $a_3 \geq 0$; $a_1 \geq 0$, $a_3 \leq 0$, $a_1 a_2 \leq a_3$; $a_1 \geq 0$, $a_3 \leq 0$, ${a_1}^2 + a_2 \geq 0$; $a_1 \leq 0$, $a_3 \geq 0$, $a_1 a_2 \leq a_3$, ${a_1}^2 + a_2 \leq 0$, где $a_1 = \int\limits_a^b (2p(s)q(s) + r^2(s))\,ds$, $a_2 = \Big(\int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds\Big)^2 + \int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds \int\limits_a^b r^2(s)\,ds -$
$-2\int\limits_a^b p(s)r(s)\,ds \int\limits_a^b q(s)r(s)\,ds - \int\limits_a^b p^2(s)\,ds \int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds$,
$a_3 = \int\limits_a^b p^2(s)\,ds \int\limits_a^b q^2(s)\,ds \int\limits_a^b r^2(s)\,ds + 2\int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds \int\limits_a^b p(s)r(s)\,ds \int\limits_a^b q(s)r(s)\,ds -$
$-\Big(\int\limits_a^b p(s)q(s)\,ds\Big)^2 \int\limits_a^b r^2(s)\,ds - \Big(\int\limits_a^b p(s)r(s)\,ds\Big)^2 \int\limits_a^b q^2(s)\,ds - \Big(\int\limits_a^b q(s)r(s)\,ds\Big)^2 \int\limits_a^b p^2(s)\,ds.$

Теорема 2. *Оператор $S-K$ позитивен, если $M_K \leq \frac{1}{2}(M_S + m_S)$ или если $\frac{1}{2}(m_K + M_K) \leq m_S$.*

Доказательство. Отметим, что из совпадения множеств $\sigma(U - \lambda I) = \sigma(U) - \lambda$ следует, что $M_{U-\lambda I} = M_U - \lambda$, $m_{U-\lambda I} = m_U - \lambda$. Так как $M_{S-K} = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle (S-K)x, x\rangle \geq \sup\limits_{\|x\|=1} \langle (S - M_K I)x, x\rangle = M_S - M_K$, $M_{S-K} = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle (S-K)x, x\rangle \geq \sup\limits_{\|x\|=1} \langle (m_S I - K)x, x\rangle = m_S - m_K$, $m_{S-K} = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle (S - K)x, x\rangle \geq \inf\limits_{\|x\|=1} \langle (S - M_K I)x, x\rangle = m_S - M_K$, то $M_{S-K} + m_{S-K} \geq M_S - M_K + m_S - M_K \geq 0$, если выполнено первое условие и $M_{S-K} + m_{S-K} \geq m_S - m_K + m_S - M_K \geq 0$, если выполнено второе условие. $\square$

Следствие 1. Сумма позитивного и положительно определенного операторов — позитивный оператор.

Следствие 2. Пусть $M_K \leq m_S$. Тогда оператор $S - K$ позитивен.

Следствие 3. Пусть оператор K позитивен и $\|K\| \leq \frac{1}{2}(m_S + M_S)$. Тогда оператор $S - K$ позитивен.

Теорема 3. *Если оператор K позитивный, то оператор $U = \mu I - K$ положительно определен тогда и только тогда, когда $\|K\| \leq \mu$.*

Доказательство. Пусть оператор K позитивный и оператор $U = \mu I - K$ положительно определен. Тогда $\sigma(K) \subset (-\infty, \mu]$. В силу позитивности оператора K $m_K \geq -\mu$, поэтому $\|K\| \leq \mu$. $\square$

Пример 2. Рассмотрим экстремальную задачу минимизации квадратичного функционала в пространстве $\mathbf{L}_2[a,b]$

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left(x^2(t) - (Kx)(t)x(t) - 2f(t)x(t)\right)\,dt \longrightarrow \min, \tag{2}$$

где интегральный оператор $(Kx)(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds$ непрерывно действует в пространстве $\mathbf{L}_2[a,b]$, $f \in \mathbf{L}_2[a,b]$. Разрешимость задачи (2) эквивалентна разрешимости уравнения $Ux \stackrel{\mathrm{def}}{=} (I - \frac{1}{2}(K^* + K))x = f$ и положительной определенности оператора U. Для позитивности оператора $\frac{1}{2}(K^* + K)$ в силу теорем 2, 3 достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из двух условий: $\mathcal{K}(t,s) + \mathcal{K}(s,t) \geq 0$ при почти всех $(t,s) \in [a,b]\times[a,b]$ или $\Big(\int\limits_a^b\int\limits_a^b (\mathcal{K}(t,s) - 2\mathcal{K}(s,s) + \mathcal{K}(s,t))^2\,ds\,dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2\int\limits_a^b \mathcal{K}(s,s)\,ds$. При выполнении этих условий оператор U положительно определен тогда и только тогда, когда норма интегрального оператора $\frac{1}{2}\int\limits_a^b (\mathcal{K}(t,s) + \mathcal{K}(s,t))x(s)\,ds$ не превосходит единицы.

Следствие 4. Если оператор V обратим, то оператор $V^*V - K^*K$ положительно определен тогда и только тогда, когда $\|KV^{-1}\| \le 1$.

Пример 3. Рассмотрим экстремальную задачу минимизации квадратичного функционала в пространстве $\mathbf{L}_2[a,b]$

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(x^2(t) - (Sx)^2(t) - (Kx)^2(t) - 2f(t)x(t)\right)\, dt \longrightarrow \min, \tag{3}$$

где оператор внутренней суперпозиции

$$(Sx)(t) = \begin{cases} p(t)x[h(t)], & \text{если } h(t) \in [a,b]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [a,b], \end{cases}$$

и интегральный оператор $(Kx)(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\, ds$ непрерывно действуют в пространстве $\mathbf{L}_2[a,b]$, $f \in \mathbf{L}_2[a,b]$. Разрешимость задачи (3) эквивалентна разрешимости уравнения $(Ux) \stackrel{\text{def}}{=} (I - S^*S - K^*K)x = f$ и положительной определенности оператора U. Так как $(S^*Sx)(t) = \nu(t)x(t)$, где

$$\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{h^{-1}([a,t])} p^2(s)\, ds, & \text{если } [a,t] \in h([a,b]); \\ 0, & \text{если } [a,t] \notin h([a,b]), \end{cases}$$

то, полагая $(Vx)(t) = \sqrt{1-\nu(t)}x(t)$, в силу следствия 4 получаем, что оператор U положительно определен тогда и только тогда, когда $\nu(t) \le 1$ на $[a,b]$, и норма интегрального оператора $\int\limits_a^b \frac{\mathcal{K}(t,s)}{\sqrt{1-\nu(s)}}x(s)\, ds$ не превосходит единицы.

Литература

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.
2. Крейн С.Г. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1972. – 544 с.

Пермский государственный университет

Поступила
18.09.2000