И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 517.929

П.М. КУДИШИН

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Введение

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$ly \equiv y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2}\Big(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x)\Big)y^{(j)}, \quad 0 < x < T, \ \ n = 2m. \tag{1}$$

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ — корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu) = \sum_{j=0}^{n} \nu_j \prod_{k=0}^{j-1}(\mu - k), \quad \nu_n = 1, \ \ \nu_{n-1} = 0.$$

Для определенности полагаем $\mu_k - \mu_j \neq sn$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$; $\operatorname{Re}\mu_1 < \dots < \operatorname{Re}\mu_n$. Обозначим $\vartheta_{nj} := 0$, $j = \overline{0, n-2}$, если $\nu_k = 0$, $k = \overline{0, n-2}$, иначе $\vartheta_{nj} := n-1-\operatorname{Re}(\mu_n - \mu_1) - j$, и предположим, что $q_j(x)x^{\vartheta_{nj}} \in \mathcal{L}(0, T)$. При выполнении этих условий будем говорить, что $l \in V$.

Рассмотрим несамосопряженную краевую задачу $\mathcal{L}$ следующего вида:

$$ly = \lambda y, \quad 0 < x < T, \quad l \in V, \tag{2}$$

$$y(x) = O(x^{\mu_{m+1}}), \quad x \to 0, \tag{3}$$

$$V_j(y) \equiv y^{(\tau_j)}(T) + \sum_{k=0}^{\tau_j - 1} v_{jk} y^{(k)}(T) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \ \ 0 \le \tau_j \le n-1, \ \ \tau_j \neq \tau_s \ \ (j \neq s). \tag{4}$$

В данной статье получена теорема равносходимости разложений в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевых задач вида (2)–(4) внутри конечного интервала $(0, T)$.

Дифференциальное уравнение (2) изучалось в работах [1], [2], где построены специальные фундаментальные системы решений, получена асимптотика множителей Стокса, исследована обратная задача. В работе [3] изучалась краевая задача $\mathcal{L}$, исследовано асимптотическое поведение собственных значений, изучены свойства функции Грина краевой задачи, доказана теорема о полноте системы собственных и присоединенных функций, получена теорема о разложении и теорема равносходимости на отрезке $[0, T]$.

Наличие особенности у дифференциального оператора вносит существенные трудности в доказательство основной теоремы данной статьи. Примененный в данной работе метод позволяет установить факт равносходимости внутри конечного интервала для широкого класса краевых задач, а также равносходимость с рядом Фурье по тригонометрической системе. В случае отсутствия особенности у дифференциального оператора (1) ($\nu_j = 0$, $j = \overline{0, n-2}$) равносходимость имеет место для всякой суммируемой функции, что совпадает с результатом, полученным

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 97-01-00566.

М. Стоуном в [4]. Отметим, что вопросам равносходимости посвящены также работы [5]–[10] и многие другие.

1. Предварительные сведения

Пусть $\lambda = \rho^n$, $\varepsilon_k = \exp(2\pi i k/n)$, $k = \overline{0, n-2}$. Известно (см. [11], с.53), что для каждого сектора $S_{k_0} = \{\rho;\ \arg\rho \in (\frac{k_0\pi}{n}, \frac{(k_0+1)\pi}{n})\}$, $k_0 = \overline{-n, n-1}$, существует перестановка $\omega_1, \dots, \omega_n$ чисел $0, 1, \dots, n-1$ такая, что при $R_k = \varepsilon_{\omega_k}$, $\rho \in S_{k_0}$

$$\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \dots < \mathrm{Re}(\rho R_n).$$

Условимся, что

$$\rho^\mu = \exp(\mu(\ln|\rho| + i\arg\rho)), \quad \arg\rho \in (-\pi, \pi].$$

Пусть числа c_{j0}, $j = \overline{1, n}$, таковы, что

$$\prod_{j=1}^{n} c_{j_0} = (\det[\mu_j^{\nu-1}]_{j,\nu=\overline{1,n}})^{-1}. \tag{5}$$

В [3] построена фундаментальная система решений Вейля $\Phi_k(x, \lambda)$, $k = \overline{1, n}$, уравнения (2) при условиях $\Phi_k(x, \lambda) \sim c_{k0} x^{\mu_k}$, $x \to 0$; $V_p(\Phi_k) = 0$, $p = \overline{1, n-k}$, и установлено, что при $\rho \in G_{0,k} \cap \overline{S}_{k_0}$, $|\rho| \ge \rho^0$ имеют место оценки

$$|\Phi_k^{(\nu)}(x, \lambda)| \le C|\rho^{\nu-\mu_k} \exp(\rho R_k x)|, \quad |\rho| x \ge 1,$$
$$|\Phi_k^{(\nu)}(x, \lambda) \le C|x^{\mu_k-\nu}|, \quad |\rho| x \le 1, \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

где $G_{0,k} = \{\rho;\ |\rho - \rho_{lk}^0| \ge \varepsilon_0\}$, $\lambda_{lk}^0 = (\rho_{lk}^0)^n$, $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda_{lk}^0 = (-1)^k \big(\frac{\pi}{T\sin\frac{k\pi}{n}}(l + \vartheta_k)\big)^n$, ϑ_k — некоторые комплексные константы, свои для каждой краевой задачи. Здесь и везде в дальнейшем одним и тем же символом C будем обозначать различные положительные константы в оценках, не зависящие от x, ρ.

В [3] введена целая функция $\Delta(\lambda)$, называемая характеристической функцией задачи $\mathcal{L}$, и доказано, что для нее справедливо следующее представление:

$$\Delta(\lambda) = \det[V_p(\Phi_j)]_{p=\overline{1,m};\, j=\overline{m+1,n}}.$$

Положим

$$\Phi_k^*(x, \lambda) := \det[\Phi_j^{(\nu)}(x, \lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n}\setminus n-k+1},$$
$$\mu_k^* := n - 1 - \mu_{n-k+1}, \qquad G_0 := G_{0,m},$$
$$G(x, t, \lambda) := \begin{cases} \sum\limits_{k=m+1}^{n} (-1)^{k-1} \Phi_{n-k+1}(x, \lambda) \Phi_k^*(t, \lambda), & x \ge t; \\ \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k \Phi_{n-k+1}(x, \lambda) \Phi_k^*(t, \lambda), & x \le t, \end{cases}$$
$$B_\lambda := (l - \lambda I)^{-1},$$

где I — тождественный оператор.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество функций $y(X)$ таких, что функции $y^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0, n-1}$, являются абсолютно непрерывными на отрезке $[\varepsilon, T]$ при каждом $0 < \varepsilon < T$.

В [3] сформулированы и доказаны следующие три утверждения.

Теорема А. 1) *Краевая задача $\mathcal{L}$ имеет счетное множество собственных значений, которые совпадают с нулями характеристической функции $\Delta(\lambda)$. Все собственные значения, начиная с некоторого, являются простыми нулями функции $\Delta(\lambda)$.*

2) *Имеет место оценка снизу*

$$|\Delta(\lambda) \geq C\Big|\rho^{\sum\limits_{j=1}^{m}\tau_j - \sum\limits_{j=m+1}^{n}\mu_j} e^{\rho T \sum\limits_{j=m+1}^{n} R_j}\Big|, \quad \rho \in G_0 \cap \overline{S}_{k_0}, \quad |\rho| \geq \rho^0.$$

Теорема B. *Пусть* $f(t)t^{\mu^*_{m+1}} \in \mathcal{L}(0,T)$, $\Delta(\lambda) \neq 0$.

1) *Положим*

$$y(x) := \int_0^t G(x,t,\lambda)f(t)dt. \tag{6}$$

Тогда

$$y(x) \in \mathfrak{N}, \quad y(x) = o(x^{\mu_m}), \quad x \to 0, \quad V_p(y) = 0, \quad p = \overline{1,m}, \tag{7}$$

$$ly - \lambda y = f. \tag{8}$$

2) *Обратно, если некоторая функция* $y(x)$ *удовлетворяет* (7), (8), *то верно представление* (6).

3) *Кроме того, если* $f(t)t^{\chi} \in \mathcal{L}(0,T)$, $\chi \leq \operatorname{Re}\mu^*_{m+1}$, *то при* $x \to 0$

$$y^{(\nu)}(x) = \begin{cases} o(x^{n-1-\chi-\nu}), & \chi > \operatorname{Re}\mu^*_m, \\ O(x^{\mu_{m+1}-\nu}), & \chi \leq \operatorname{Re}\mu^*_m. \end{cases}$$

Условимся, что символ $\omega(\rho)$ везде в дальнейшем обозначает разные непрерывные неотрицательные функции со свойством $\omega(\rho) \to 0$ при $|\rho| \to \infty$.

Теорема C. *Пусть* $f(t)t^{\chi} \in \mathcal{L}(0,T)$, $\chi \leq \operatorname{Re}\mu^*_{m+1}$. *Тогда при* $\rho \in G_0$, $|\rho| \geq \rho^0$, $0 < x \leq T$, *имеют место оценки*

$$\left|\int_0^T G_j(x,t,\lambda)f(t)dt\right| \leq \omega(\rho)\begin{cases} |\rho|^{j-n+1+\langle\chi\rangle}, & |\rho|x \geq 1; \\ |\rho^{-\mu^*_m+\langle\chi\rangle}x^{\mu_{m+1}-j}| + \Omega x^{n-1-j-\chi}, & |\rho|x \leq 1, \end{cases}$$

где $\langle\chi\rangle := \max(\chi,0)$, $G_j(x,t,\lambda) := \frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,t,\lambda)$, $\Omega = 0$ *при* $\chi \leq \operatorname{Re}\mu^*_m$, $\Omega = 1$ *при* $\chi > \operatorname{Re}\mu^*_m$.

2. Теорема равносходимости

Наряду с задачей $\mathcal{L}$ будем рассматривать задачу $\widetilde{\mathcal{L}}$ того же вида, но с другими $\tilde{l}$, $\widetilde{V}_j$. Условимся, что если некоторый символ Ψ обозначает объект, относящийся к задаче $\mathcal{L}$, то $\widetilde{\Psi}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче $\widetilde{\mathcal{L}}$, а $\hat{\Psi} := \Psi - \widetilde{\Psi}$.

Основным результатом данной статьи является

Теорема. *Пусть краевые задачи* $\mathcal{L}$ *и* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *вида* (2)–(4) *таковы, что* $\hat{q}_j(t)t^{n-2-j} \in \mathcal{L}(0,T)$, $j = \overline{0,n-2}$. *Тогда*

$$\lim_{N\to+\infty}\max_{\delta\leq x\leq T-\delta}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}(\widetilde{B}_\lambda f - B_\lambda f)d\lambda\right| = 0$$

для любой функции $f(t)$ *такой, что* $f(t)t^{\varkappa_0} \in \mathcal{L}(0,T)$, *где* $0 < \delta \leq T - \delta < T$, $\varkappa_0 := \min(0, \operatorname{Re}\mu^*_{m+1}, \operatorname{Re}\tilde{\mu}^*_{m+1})$, $\Gamma_N := \{\lambda;\ |\lambda| = r_N\}$ — *окружности радиусов* $r_N \to +\infty$, *отстоящие на положительном расстоянии от спектров задач* $\mathcal{L}$ *и* $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любого $\alpha \in (0,1)$ существует $C = C(\alpha) > 0$ такое, что для любого контура $\gamma = \{\rho \in \overline{S}_{k_0},\ |\rho| = \rho_1\}$*

$$\int_\gamma [\mathrm{Re}(\rho R_{m+1})]^{-\alpha} |d\rho| \le C \rho_1^{1-\alpha}.$$

Доказательство для определенности проведем для сектора S_0. Обозначим $\varphi := \arg \rho$, $\psi := \arg R_{m+1}$. Известно, что для сектора S_0 $R_{m+1} = \begin{cases} \varepsilon_{3q}, & \text{при } m = 2q; \\ \varepsilon_q, & \text{при } m = 2q+1. \end{cases}$ Возможны следующие варианты:

А) если $m = 2q$, то $\frac{3\pi}{2} \le \arg(\rho R_{m+1}) \le 2\pi$,

Б) если $m = 2q+1$, то $0 \le \arg(\rho R_{m+1}) \le \frac{\pi}{2}$.

Так как $\cos x \ge \begin{cases} -\frac{2}{\pi}x + 1, & x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \\ \frac{2}{\pi}x - 3, & x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi], \end{cases}$ то

$$\int_0^{\pi/n} [\cos(\psi + \varphi)]^{-\alpha} d\varphi \le \int_0^{\pi/n} [a(\psi + \varphi) + b]^{-\alpha} d\varphi \le C,$$

где

$$a = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}, & \text{при } m = 2q+1; \\ \frac{2}{\pi}, & \text{при } m = 2q, \end{cases} \qquad b = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 2q+1; \\ -3, & \text{при } m = 2q. \end{cases} \qquad \square$$

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Для любого $M > 0$ существует константа $C = C(M) > 0$ такая, что для любого контура $\gamma = \{\rho \in \overline{S}_{k_0},\ |\rho| = \rho_1\}$*

$$\int_\gamma e^{-M\,\mathrm{Re}(\rho R_{m+1})} |d\rho| \le C.$$

Лемма 3. *Пусть функция $f(t)$ такова, что $f(t)t^\chi \in \mathcal{L}(0,T)$, где $\chi \le \mathrm{Re}\,\mu^*_{m+1}$. Тогда при $\rho \in G_0 \cap \overline{S}_{k_0}$, $|\rho| \ge \rho^0$, $|\rho|^{-1} \le x \le T$, имеют место оценки*

$$\left| \int_{|\rho|^{-1}}^T G_j(x,t,\lambda) f(t) dt \right| \le C|\rho|^{j-n+1} \left(\int_{|\rho|^{-1}}^x |e^{\rho R_{m+1}(t-x)} f(t)| dt + \int_x^T |f(t)| dt \right), \tag{9}$$

$$\left| \int_0^{|\rho|^{-1}} G_j(x,t,\lambda) f(t) dt \right| \le C|\rho^{j+\chi-n+1} e^{-\rho R_{m+1} x}| \int_0^{|\rho|^{-1}} |f(t) t^\chi| dt. \tag{10}$$

Доказательство. Так как

$$G_j(x,t,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=m+1}^n (-1)^{k-1} \Phi^{(j)}_{n-k+1}(x,\lambda) \Phi^*_k(t,\lambda), & x \ge t; \\ \sum\limits_{k=1}^m (-1)^k \Phi^{(j)}_{n-k+1}(x,\lambda) \Phi^*_k(t,\lambda), & x \le t, \end{cases}$$

и при $|\rho| t \ge 1$

$$|\Phi^{(j)}_{n-k+1}(x,\lambda) \Phi^*_k(t,\lambda)| \le C|\rho^{j-n+1} e^{\rho R_k (t-x)}|,$$

то отсюда следует неравенство (9).

При $|\rho| t \le 1$ и $m+1 \le k \le n$

$$|\Phi^{(j)}_{n-k+1}(x,\lambda) \Phi^*_k(t,\lambda)| \le C|t^{\mu^*_k} \rho^{j-\mu_{n-k+1}} e^{-\rho R_k x}| \le C|(t\rho)^{\mu^*_k} \rho^{j-n+1} e^{-\rho R_k x}| \le C|t^{\mu^*_{m+1}} \rho^{j-\mu_m} e^{-\rho R_{m+1} x}|.$$

Отсюда следует неравенство (10). $\square$

Обозначим

$$\vartheta := \sum_{j=0}^{n-2} |\hat{\nu}_j|, \quad y := B_\lambda f, \quad f_0(x,\lambda) := (\hat{l} B_\lambda f)(x).$$

Лемма 4. *Пусть краевые задачи $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ и функция $f(t)$ удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Re}\mu_{m+1}^* \le \operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*, \quad f(t)t^\chi \in \mathcal{L}(0,T), \quad \chi \le \operatorname{Re}\mu_{m+1}^*,$$

если $\vartheta \ne 0$, то $\chi < \operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*$. Тогда при $\rho \in G_0$, $|\rho| \ge \rho^0$, $0 < x < T$, справедливы утверждения
а) $f_0(x,\lambda)x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*} \in \mathcal{L}(0,T)$,
б) $|f_0(x,\lambda)| \le \omega(\rho)\sum\limits_{j=0}^{n-2}(|\hat{\nu}_j|x^{j-n} + |\hat{q}_j(x)|)\begin{cases}|\rho|^{j-n+1+\langle\chi\rangle}, & |\rho|x \ge 1;\\ \Omega x^{n-1-j-\chi} + |\rho^{-\mu_m^*+\langle\chi\rangle}x^{\mu_{m+1}-j}, & |\rho|x \le 1.\end{cases}$

Доказательство. а) В силу теоремы B при $x \to 0$

$$f_0(x,\lambda)x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*} = x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*}\sum_{j=0}^{n-2}(\hat{\nu}_j x^{j-n} + \hat{q}_j(x))y^{(j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{\hat{\nu}_j}{x^{n-j}} + \hat{q}_j(x)\right)\begin{cases}o(x^{n-1-\chi-j+\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*}), & \chi > \operatorname{Re}\mu_m^*;\\ O(x^{\mu_{m+1}-j+\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*}), & \chi \le \operatorname{Re}\mu_m^*.\end{cases}$$

Если $\chi > \operatorname{Re}\mu_m^*$, то при $x \to 0$

$$f_0(x,\lambda)x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*} = \sum_{j=0}^{n-2}[\hat{\nu}_j\, o(x^{-1+\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*-\chi}) + \hat{q}_j(x)x^{n-1-j}\, o(x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*-\chi})].$$

Из предположений леммы и того, что $y \in \mathfrak{N}$, следует утверждение а) в случае $\chi > \operatorname{Re}\mu_m^*$.

Если $\chi \le \operatorname{Re}\mu_m^*$, то при $x \to 0$

$$f_0(x,\lambda)x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*} = \sum_{j=0}^{n-2}[\hat{\nu}_j\, O(x^{-1+\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*-\operatorname{Re}\mu_m^*}) + \hat{q}_j(x)x^{n-1-j}\, O(x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}_{m+1}^*-\operatorname{Re}\mu_m^*})].$$

Отсюда следует первое утверждение леммы 4.

Утверждение б) очевидным образом следует из теоремы C. $\square$

Лемма 5. *Для любого $\delta > 0$ существует константа $C = C(\delta) > 0$ такая, что для любого $x \in [\delta, T]$, $\rho \in S_{k_0}$, $|\rho| \ge \rho^0$*

$$\sum_{j=0}^{n-2}|\hat{\nu}_j|\,|\rho|^j\int_{|\rho|^{-1}}^x e^{(t-x)\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})}t^{j-n}dt \le C|\rho|^{n-1}e^{-\frac{\delta}{2}\operatorname{Re}(\rho R_{m+1}} + C|\rho|^{n-3/2}[\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})]^{-1/2}.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $r := |\rho|$, $\nu := \operatorname{Re}(|\rho|^{-1}\rho R_{m+1}$. Интегрируя $(n-1-j)$ раз по частям и отбрасывая отрицательные слагаемые, получаем

$$\int_{r^{-1}}^x e^{(t-x)r\nu}t^{j-n}dt = \sum_{k=0}^{n-2-j}(-1)^k(r\nu)^k x^{j-n+1+k}\left(\prod_{s=0}^k(j-n+1+s)\right)^{-1} -$$
$$- \sum_{k=0}^{n-2-j}(-1)^k(r\nu)^k r^{n-1-k-j}\left(\prod_{s=0}^k(j-n+1+s)\right)^{-1}e^{(r^{-1}-x)r\nu} +$$
$$+ (-1)^{n-1-j}(r\nu)^{n-1-j}\left(\prod_{s=0}^{n-2-j}(j-n+1+s)\right)^{-1}\int_{r^{-1}}^x e^{(t-x)r\nu}t^{-1}dt \le$$
$$\le Cr^{n-1-j}e^{-\frac{\delta}{2}r\nu} + C(r\nu)^{n-1-j}\int_{r^{-1}}^x e^{(t-x)r\nu}t^{-1}dt.$$

Покажем, что $\int\limits_{r^{-1}}^{x} r\nu^{n-1-j+\frac{1}{2}}t^{-1}e^{(t-x)r\nu}dt \le C$. Действительно,

А) $\int\limits_{\delta/2}^{x} r\nu^{n-1-j+\frac{1}{2}}t^{-1}e^{(t-x)r\nu}dt \le \frac{2}{\delta}r\nu^{n-1-j+\frac{1}{2}}(r\nu)^{-1}(1-\exp(-\frac{\delta}{2}r\nu)) \le C$,

Б) $\int\limits_{r^{-1}}^{\delta/2} r\nu^{n-1-j+\frac{1}{2}}t^{-1}e^{(t-x)r\nu}dt \le e^{-\frac{\delta}{2}r\nu}r\nu^{n-1-j+\frac{1}{2}}\ln\frac{\delta}{2}r := h(r,\nu)$.

Точкой возможного экстремума функции $h(r,\nu)$ при фиксированном r является $\nu_{\text{экс}} = 2\frac{n-1-j+1/2}{\delta r}$. Следовательно,

$$h(r,\nu) \le \max\{h(r,0),\ h(r,1),\ h(r,\nu_{\text{экс}})\} \le \max\{e^{-\frac{\delta r}{2}}r\ln\frac{\delta r}{2},\ Cr^{-n+2+j-\frac{1}{2}}\ln\frac{\delta r}{2}\} \le C. \quad \square$$

Лемма 6. *Пусть краевые задачи $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ и функция $f(t)$ удовлетворяют условиям*

$$\hat{q}_j(t)t^{n-2-j} \in \mathcal{L}(0,T), \quad j=\overline{0,n-2}, \qquad \operatorname{Re}\mu^*_{m+1} \le \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}, \quad f(t)t^{\chi} \in \mathcal{L}(0,T), \quad \chi \le \operatorname{Re}\mu^*_{m+1},$$

и, кроме того, если $\vartheta \ne 0$, то $\chi < \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$. Тогда для любого $\rho \in G_0 \cap \widetilde{G}_0 \cap S_{k_0}$, $|\rho| \ge \rho^0$, $x \in [\delta, T-\delta]$ справедлива оценка

$$|\widetilde{R}_\lambda \hat{l} R_\lambda f| \le \omega(\rho)[|\rho|^{-n+\langle\chi\rangle} + |\rho|^{-n+1+\langle\chi\rangle}e^{-\frac{\delta}{2}\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})} + |\rho|^{-n+\frac{1}{2}+\langle\chi\rangle}[\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})]^{-\frac{1}{2}}].$$

Доказательство. Обозначим $\varkappa := \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$. Из лемм 3 и 4 следует

$$I_1 := \left|\int_0^{|\rho|^{-1}} \widetilde{G}(x,t,\lambda)f_0(t,\lambda)dt\right| \le C|\rho^{\varkappa-n+1}e^{-\rho R_{m+1}x}|\int_0^{|\rho|^{-1}}|f_0(t,\lambda)t^{\varkappa}|dt \le$$

$$\le \omega(\rho)|\rho^{\varkappa-n+1}e^{-\rho R_{m+1}x}|\sum_{j=0}^{n-2}\Big[\Omega\int_0^{|\rho|^{-1}}(|\hat{\nu}_j|t^{j-n}+|\hat{q}_j(t)|)t^{\varkappa-n+1-j-\chi}dt+$$

$$+|\rho^{-\mu^*_m-\langle\chi\rangle}|\int_0^{|\rho|^{-1}}(|\hat{\nu}_j|t^{j-n}+|\hat{q}_j(t)|)t^{\varkappa+\operatorname{Re}\mu_{m+1}-j}dt\Big].$$

Вычисляя интегралы от степенной функции, получаем

$$I_1 \le \omega(\rho)|\rho^{\varkappa-n+1}e^{-\rho R_{m+1}x}|\sum_{j=0}^{n-2}\Big[\Omega|\hat{\nu}_j|\,|\rho|^{\chi-\varkappa}+\Omega\int_0^{|\rho|^{-1}}|\hat{q}_j(t)t^{n-2-j}|t^{\varkappa-\chi+1}dt+$$

$$+|\rho^{-\mu^*_m+\langle\chi\rangle}|(|\hat{\nu}_j|\,|\rho|^{\operatorname{Re}\mu^*_m-\varkappa}+\int_0^{|\rho|^{-1}}|\hat{q}_j(t)t^{n-2-j}|t^{\varkappa-\operatorname{Re}\mu^*_m+1}dt)\Big].$$

Из монотонности степенной функции следует

$$I_1 \le \omega(\rho)|\rho^{\varkappa-n+1}e^{-\rho R_{m+1}x}|[\vartheta\Omega|\rho|^{\chi-\varkappa}+\Omega|\rho|^{\chi-\varkappa-1}+|\rho^{-\mu^*_m+\langle\chi\rangle}|(\vartheta|\rho|^{\operatorname{Re}\mu^*_m-\varkappa}+|\rho|^{\operatorname{Re}\mu^*_m-\varkappa-1})] \le$$
$$\le \omega(\rho)|e^{-\frac{\delta}{2}\rho R_{m+1}}|(\vartheta\Omega|\rho|^{\chi-n+1}+\Omega|\rho|^{\chi-n}+\vartheta|\rho|^{\langle\chi\rangle-n+1}+|\rho|^{\langle\chi\rangle-n}) \le \omega(\rho)e^{-\frac{\delta}{2}\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})}|\rho|^{\langle\chi\rangle-n+1}.$$

Используя леммы 3 и 4, получаем

$$I_2 := \left|\int_{|\rho|^{-1}}^{T}\widetilde{G}(x,t,\lambda)f_0(t,\lambda)dt\right| \le C|\rho|^{-n+1}\int_{|\rho|^{-1}}^{x}|e^{\rho R_{m+1}(t-x)}f_0(t,\lambda)|dt + C|\rho|^{-n+1}\int_x^T|f_0(t,\lambda)|dt \le$$

$$\le \omega(\rho)|\rho|^{-n+1}\sum_{j=0}^{n-2}|\rho|^{j-n+1+\langle\chi\rangle}\left(\int_{|\rho|^{-1}}^{x}|e^{\rho R_{m+1}(t-x)}|(|\hat{\nu}_j|t^{j-n}+|\hat{q}_j(t)|)dt+\int_x^T(|\hat{\nu}_j|t^{j-n}+|\hat{q}_j(t)|)dt\right) \le$$

$$\le \omega(\rho)|\rho|^{-2n+2+\langle\chi\rangle}\sum_{j=0}^{n-2}|\rho|^j\left(\int_{|\rho|^{-1}}^{x}|e^{\rho R_{m+1}(t-x)}|(|\hat{\nu}_j|t^{j-n}+|\hat{q}_j(t)t^{n-2-j}|t^{-(n-2-j)})dt+\right.$$

$$+\int_{\delta}^{T}(|\hat{\nu}_j|t^{j-n}+|\hat{q}_j(t)|)dt\Big).$$

Из леммы 5 и монотонности степенной функции

$$I_2\le\omega(\rho)|\rho|^{-2n+2+\langle\chi\rangle}\Big(|\rho|^{n-1}e^{-\frac{\delta}{2}\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})}+|\rho|^{n-\frac{3}{2}}[\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})]^{-1/2}+$$
$$+\sum_{j=0}^{n-2}|\rho|^{n-2}\int_{|\rho|^{-1}}^{x}|\hat{q}_j(t)t^{n-2-j}|dt+C\sum_{j=0}^{n-2}|\rho|^{j}\Big)\le$$
$$\le\omega(\rho)|\rho|^{-n+\langle\chi\rangle}(|\rho|e^{-\frac{\delta}{2}\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})}+|\rho|^{1/2}[\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})]^{-1/2}+1).\quad\square$$

Доказательство теоремы. 1) Пусть $\operatorname{Re}\mu^*_{m+1}<\operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$, $\lambda\in\Gamma_N$. Положим $y:=R_\lambda f$. В силу теоремы B

$$y\in\mathfrak{N},\quad y=o(x^{\mu_m}),\quad x\to0,\quad V_p(y)=0,\quad p=\overline{1,m},\quad ly-\lambda y=f.$$

Следовательно, $\tilde{l}y-\lambda y=f-\hat{l}y=f-\hat{l}R_\lambda f=:f_1(x,\lambda)$.

Из леммы 4 следует включение $f_1(x,\lambda)x^{\operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}}\in\mathcal{L}(0,T)$. Обозначим $y_1:=\widetilde{R}_\lambda f_1=\widetilde{R}_\lambda f-\widetilde{R}_\lambda\hat{l}R_\lambda f$. Ясно, что

$$y_1\in\mathfrak{N},\quad y_1=o(x^{\widetilde{\mu}_m}),\quad x\to0,\quad \widetilde{V}_p(y_1)=0,\quad p=\overline{1,m},\quad \tilde{l}y_1-\lambda y_1=f_1.$$

Рассмотрим функцию $y_0:=y_1-y$. Она удовлетворяет условиям

$$\tilde{l}y_0-\lambda y_0=0,\quad y_0=o(x^{\widetilde{\mu}_m}),\quad x\to0,\quad \widetilde{V}_p(y_0)=-\widetilde{V}_p(y),\quad p=\overline{1,m}.\tag{11}$$

Оценим $y_0=y_0(x,\lambda)$. Из (11) следует, что существуют $c_k(\rho)$, $k=\overline{1,n}$, такие, что

$$y_0(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}c_k(\rho)\widetilde{\Phi}_k(x,\rho).$$

Так как $y_0(x,\lambda)=o(x^{\widetilde{\mu}_m})$, $x\to0$ и $\widetilde{\Phi}_k(x,\rho)\sim\tilde{c}_{k0}x^{\widetilde{\mu}_k}$, $x\to0$, $\tilde{c}_{k0}\ne0$, то $c_k(\rho)=0$, $k=\overline{1,m}$.

$$\widetilde{V}_p(y_0)=\sum_{k=m+1}^{n}c_k(\rho)\widetilde{V}_p(\widetilde{\Phi}_k)=-\widetilde{V}_p(y),\quad p=\overline{1,m}.$$

Таким образом, для определения $c_k(\rho)$, $k=\overline{m+1,n}$, получили систему линейных уравнений, из которой по правилу Крамера получаем

$$c_s(\rho)=-\frac{\det A_s(\rho)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)},\quad s=\overline{m+1,n},$$

где $A_s(\rho):=\widetilde{V}_j(\widetilde{\Phi}_{m+1}),\ldots,\widetilde{V}_j(\widetilde{\Phi}_{s-1}),\,\widetilde{V}_j(y),\,\widetilde{V}_j(\widetilde{\Phi}_{s+1}),\ldots,\widetilde{V}_j(\widetilde{\Phi}_n)]_{j=\overline{1,m}}$.

Из (5) и теоремы C следует

$$\widetilde{V}_p(\widetilde{\Phi}_k)=O(\rho^{\widetilde{\tau}_p-\widetilde{\mu}_k}e^{\rho R_kT}),\quad \rho\in\widetilde{G}_{0,k}\cap\overline{S}_{k_0},\ \ |\rho|\ge\rho^0,$$
$$\widetilde{V}_p(y)=o(\rho^{\widetilde{\tau}_p-n+1}),\qquad\qquad \rho\in G_0\cap\overline{S}_{k_0},\ \ |\rho|\ge\rho^0.$$

Следовательно,

$$\det A_s(\rho)=\rho^{-\sum\limits_{k=m+1}^{n}\widetilde{\mu}_k+\widetilde{\mu}_s}e^{\rho T(\sum\limits_{k=m+1}^{n}R_k-R_s)}\rho^{\sum\limits_{k=1}^{m}\widetilde{\tau}_k}\sum_{j=1}^{m}\widetilde{V}_j(y)O(\rho^{-\widetilde{\tau}_j})=$$
$$=o(1)e^{\rho T(\sum\limits_{k=m+1}^{n}R_k-R_s)}\rho^{-\sum\limits_{k=m+1}^{n}\widetilde{\mu}_k+\sum\limits_{k=1}^{m}\widetilde{\tau}_k+\widetilde{\mu}_s-n+1}.$$

Отсюда и из теоремы A получаем

$$|c_s(\rho)| \le \omega(\rho)|\rho^{\widetilde{\mu}_s - n+1} e^{-T\rho R_s}|.$$

Следовательно, при $x \in [\delta, T-\delta]$, $\rho \in \overline{S}_{k_0} \cap \widetilde{G}_0 \cap G_0$

$$|y_0(x,\lambda)| \le \omega(\rho)|\rho|^{-n+1} \exp(-\tfrac{\delta}{2}\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})).$$

Из последней оценки и леммы 6 следует

$$|\widetilde{R}_\lambda f - R_\lambda f| = |y_0 + \widetilde{B}_\lambda \hat{l} B_\lambda f| \le \omega(\rho)(|\rho|^{-n+1} e^{-\frac{\delta}{2}\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})} + |\rho|^{-n} + |\rho|^{-n+\frac{1}{2}}[\operatorname{Re}(\rho R_{m+1})]^{-\frac{1}{2}}).$$

С учетом лемм 1 и 2 получаем утверждение теоремы B в случае $\operatorname{Re}\mu^*_{m+1} < \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$.

2) В случае $\operatorname{Re}\mu^*_{m+1} > \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$ рассуждения аналогичны приведенным выше.

3) Пусть $\operatorname{Re}\mu^*_{m+1} = \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$ и $\vartheta = 0$.

Доказательство теоремы в этом случае дословно повторяет доказательство случая 1.

Заметим, что при $n=2$ $\operatorname{Re}\mu^*_{m+1} = \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$ тогда и только тогда, когда $\vartheta = 0$.

4) Пусть $\operatorname{Re}\mu^*_{m+1} = \operatorname{Re}\widetilde{\mu}^*_{m+1}$, $\vartheta \ne 0$, $n \ge 4$. Введем в рассмотрение краевую задачу $\mathcal{L}_0$ такую, что

$$\overset{0}{\mu}_j = \mu_j, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad \overset{0}{\mu}_k = \mu_k, \quad k = \overline{m+2, n},$$
$$\overset{0}{\mu}_m = \mu_m - \varepsilon, \quad \overset{0}{\mu}_{m+1} = \mu_{m+1} + \varepsilon, \overset{0}{q}_j \equiv q_j, \quad j = \overline{0, n-2},$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\{\operatorname{Re}(\mu_m - \mu_{m-1}), \operatorname{Re}(\mu_{m+2} - \mu_{m+1})\}$. Ясно, что $\overset{0}{l} \in V$, т.к.

$$\overset{0}{q}_j(t) t^{\overset{0}{\vartheta}_{nj}} \in \mathcal{L}(0,T), \quad j = \overline{0, n-2},$$
$$\operatorname{Re}\overset{0}{\mu}_1 < \operatorname{Re}\overset{0}{\mu}_2 < \dots < \operatorname{Re}\overset{0}{\mu}_n, \quad \sum_{j=1}^{n} \overset{0}{\mu}_j = n(n-1)/2,$$

и существуют $\overset{0}{\nu}_j$, $j = \overline{0, n-2}$, такие, что $\overset{0}{\delta}(\overset{0}{\mu}_k) = 0$, $k = \overline{1,n}$, т.к.

$$\delta(\mu) = \mu^n + (n-1)n/2 \cdot \mu^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j \mu^j,$$

где a_j, $j = \overline{0, n-2}$, однозначно определяют ν_k, $k = \overline{0, n-2}$, а μ_s, $s = \overline{1,n}$, однозначно определяют a_j, $j = \overline{0, n-2}$, по формулам Виета.

Пусть Γ^0_N — окружность, отстоящая на положительном расстоянии от спектров задач $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}_0$, тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^0_N} (\widetilde{B}_\lambda f - B_\lambda f) d\lambda\right| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^0_N} (\widetilde{B}_\lambda f - \overset{0}{B}_\lambda f) d\lambda\right| + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^0_N} (\overset{0}{B}_\lambda f - B_\lambda f) d\lambda\right|.$$

Следовательно, этот случай сводится к первым двум. $\square$

Положим $\eta_{nj} := 0$, $j = \overline{0, n-2}$, если $\nu_k = 0$, $k = \overline{0, n-2}$, иначе $\eta_{nj} := n-1-j-\max(1, \operatorname{Re}(\mu_n - \mu_1))$.

Следствие. Пусть краевая задача $\mathcal{L}$ имеет вид (2)–(4) и $q_j(t)t^{\eta_{nj}} \in \mathcal{L}(0,T)$, $j = \overline{0, n-2}$. Тогда

$$\lim_{k \to +\infty} \|S_{2k}(f) - \sigma_{k+s}(f)\|_{C[\delta, T-\delta]} = 0$$

для всякой функции $f(t)$ такой, что $f(t)t^{\varkappa_1} \in \mathcal{L}(0,T)$, где $\varkappa_1 := \min(0, \operatorname{Re}\mu^*_{m+1}$, $0 < \delta \le T-\delta < T$,

$$\sigma_k(f) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt + \frac{2}{T}\sum_{j=1}^{k}\Big(\cos\frac{2\pi jx}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi jt}{T}dt + \sin\frac{2\pi jx}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi jt}{T}dt\Big),$$

$S_k(f)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям задачи $\mathcal{L}$ (k — число членов), s — произвольная целая константа.

Доказательство. Введем в рассмотрение краевую задачу $\widetilde{\mathcal{L}}$ вида (2)–(4) такую, что $\widetilde{\nu}_j = 0$, $j = \overline{0, n-2}$, и краевую задачу $\mathcal{L}_0$:

$$y^{(n)} + \lambda y = 0,$$
$$y^{(\nu)}(0) - y^{(\nu)}(T) = 0, \quad \nu = \overline{0, n-1}.$$

Ясно, что $\sigma_k(f)$ есть частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям задачи $\mathcal{L}_0$.

Пусть $p = 2k$, $\Gamma_p = \{\lambda;\ |\lambda| = r_p\}$ — окружности радиусов $r_p \to +\infty$, отстоящие на положительном расстоянии от спектров задач $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}_0$ и содержащие внутри себя p, $\widetilde{p}$ собственных значений с учетом кратностей задач $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ соответственно.

Справедливо неравенство

$$\|S_{2k}(f) - \sigma_{k+s}(f)\| \le \|S_{2k}(f) - \widetilde{S}_{\widetilde{p}}(f)\| + \|\widetilde{S}_{\widetilde{p}}(f) - \widetilde{S}_{2k}(f)\| + \|\widetilde{S}_{2k}(f) - \sigma_k(f)\| + \|\sigma_k(f) - \sigma_{k+s}(f)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $C[\delta, T-\delta]$.

В силу только что доказанной теоремы и теоремы XIII′ (см. [4], p.756) для любого $\varepsilon > 0$ существует N_1 такое, что для любого $k \ge N_1$

$$\|S_p(f) - \widetilde{S}_{\widetilde{p}}(f)\| + \|\widetilde{S}_{2k}(f) - \sigma_k(f)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что существует $N > 0$ такое, что для любого контура Γ_p, выбранного описанным выше способом, $|p - \widetilde{p}| < N$. Отсюда и из теоремы XII′ (см. [4], p.756) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N_2 такое, что для любого $k \ge N_2$

$$\|\widetilde{S}_{\widetilde{p}}(f) - \widetilde{S}_p(f)\| + \|\sigma_k(f) - \sigma_{k+s}(f)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \square$$

Литература

1. Юрко В.А. *Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 8. – С. 1355-1362.
2. Yurko V.A. *On higher-order differential operators with a singular point* // Inverse Problems. – 1993. – V. 9. – № 4. – P. 495–502.
3. Юрко В.А. *О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 6. – 28 с.
4. Stone M.H. *A comparison of the series Fourier and Birkhoff* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – V. 28. – № 4. – P. 695–761.
5. Тамаркин Я.Д. *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.* – Петроград, 1917.
6. Хромов А.П. *Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов* // Матем. сб. – 1981. – Т. 114. – № 3. – С. 378–405.
7. Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 5. – С. 771–794.

8. Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений.* II // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 6. – С. 980–1009.
9. Минкин А.М. *Общие ряды по собственным и присоединенным функциям.* – Саратовск. ун-т. – Саратов, 1982. – 36 с. – Деп в ВИНИТИ 30.12.82, № 6481-82.
10. Минкин А.М. *Разложение по собственным функциям одного класса негладких дифференциальных операторов.* – Ред. журн. "Дифференц. уравнения". – Минск, 1989. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 5407-В87.
11. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

Саратовский государственный университет

Поступила
10.07.1995