ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 8 (507)

УДК 517.54

С.Р. НАСЫРОВ

РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, ОГРАНИЧЕННЫЕ КРИВЫМИ, С ЗАДАННЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ

1. Введение. Пусть N — компактная риманова поверхность (без края) рода g, M — компактная риманова поверхность с краем ∂M рода ρ_M, ограниченная кривой α, а $p : M \to N$ — непрерывное отображение, голоморфное в $M \setminus \partial M$. Пусть $\beta = p(\alpha)$ — проекция α на N. Назовем пару $\sigma = (M, p)$ *римановой поверхностью над* N, *ограниченной кривой* β. Для любой точки T из N обозначим через $n_\sigma(T)$ число листов σ над T (с учетом кратности ветвления). В дальнейшем будем считать фиксированной некоторую точку $\infty_N \in N$ (если N совпадает со сферой Римана, то в качестве ∞_N можно взять, например, обычную бесконечно удаленную точку).

Пусть $\sigma = (M, p)$ — риманова поверхность над N, ограниченная локально простой кривой β. Тогда суммарная кратность точек ветвления $V(\sigma)$ конечна и справедлив аналог формулы Римана–Гурвица для разветвленных накрытий с краем (напр., [1])

$$V(\sigma) = n_\sigma(\infty_N)\chi_N - \chi_M + W(\beta),$$

где χ_N, χ_M — эйлеровы характеристики N и M соответственно, а константа $W(\beta)$ зависит только от кривой β и выбора точки ∞_N. Константа $W(\beta)$ может быть эффективно вычислена через геометрические характеристики кривой β; в частности, если N — сфера Римана, ∞_N — бесконечно удаленная точка, β — гладкая кривая на комплексной плоскости, то W равно числу оборотов касательной к β при ее обходе в положительном направлении. Назовем W *индексом вращения* кривой β.

Пусть кривая β разбивает N на конечное число областей $D_0, \dots, D_l$; будем считать, что $\infty_N \in D_0$. Выберем точки c_j таким образом, чтобы в каждой из этих областей содержалась по крайней мере одна из точек c_j, причем $c_0 = \infty_N$. Представляет интерес следующая задача: *определить, сколько существует различных римановых поверхностей над* N *заданного рода, ограниченных кривой* β, *имеющих* n *листов над точкой* c_0, *точки ветвления которых проектируются в множество* $C = \{c_0, \dots, c_m\}$.

Эта задача является обобщением классической задачи Левнера–Хопфа о существовании римановой поверхности над сферой Римана, ограниченной заданной кривой, с заданным числом листов n над ∞ (в первоначальной постановке $n = 0$). Задаче Левнера–Хопфа, различным ее обобщениям и модификациям посвящены многие работы, среди которых следует упомянуть исследования М. Маркса, Дж. Френсиса, К. Эзелля (подробнее об истории вопроса см. в [2]).

В работах [2], [3] предложен алгебраический подход к решению задачи Левнера–Хопфа, основанный на факторизации гомотопического класса граничной кривой β. В данной статье дается обоснование метода так называемых базисных наборов, позволяющий в случае $n = 0$ конструктивно описать все возможные факторизации указанного вида и тем самым найти все римановы поверхности над N, ограниченные β, точки ветвления которых проектируются в множество C.

2. Предварительные сведения. Напомним необходимые результаты из [1]. Определим $\mathfrak{M}$ как множество замкнутых кривых β в N, удовлетворяющих условиям

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00914.

1) β локально проста, т. е. для любого пути $z : [0,1] \to N$, представляющего β, периодическое продолжение $\widetilde{z} : \mathbb{R} \to N$ отображения z локально инъективно;
2) носитель $|\beta|$ кривой β разбивает N на конечное число частей;
3) если точки $t_1, t_2, t_3 \in [0,1]$ таковы, что $z(t_1) = z(t_2) = z(t_3) = z_0 \in N$, и отображения $g_i : \mathbb{R} \to N$ определены по формуле $g_i(t) = \widetilde{z}((2t-1)r + t_i)$, $i = 1,2,3$, а $z_i : [0,1] \to N$ — по формуле $z_i(t) = g_i(t)$, $0 \le t \le 1/2$, $z_i(t) = g_{i+1}(t)$, $1/2 \le t \le 1$, $i = 1,2$, то кривые α_1 и α_2 с представлениями z_1 и z_2 локально просты при малых $r > 0$ и существует кривая, подходящая к ним обеим "слева" в точке z_0;
4) β не проходит через ∞_N.

Отметим, что условия 1)–3) выполнены, если кривая β имеет конечное число самопересечений, причем каждое такое пересечение трансверсально.

Если $\beta \in \mathfrak{M}$, то $N \setminus |\beta|$ состоит из конечного числа компонент связности $D_0, \dots, D_l$. Выберем систему точек c_j, $j = 0, 1, \dots, m$, таких, что в каждой компоненте связности содержится по крайней мере одна из этих точек, при этом $c_0 = \infty_N$.

Пусть $C = \bigcup_{j=0}^{m} \{c_j\}$, $A = N \setminus C$, точка Q — начало β, $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ — простые петли в A с началом в точке Q, попарно непересекающиеся (за исключением точки Q), такие, что для любой кривой ω_k, соединяющей точку c_0 с точкой c_j, индекс пересечения $\varkappa(\gamma_j, \omega_k) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Кронекера), $\varkappa(\gamma_0, \omega_k) = -1$, $k = 1, \dots, m$. В случае $g > 0$ пусть a_1, $b_1, \dots, a_g$, b_g — стандартный набор простых петель в A с началом в точке Q, определяющий базис гомологий N. Тогда гомотопические классы $[\gamma_1], \dots, [\gamma_m]$, и, если $g > 0$, то $[a_1], [b_1], \dots, [a_g], [b_g]$, образуют базис свободной группы $\pi_1(A, Q)$, где $\pi_1(A, Q)$ — фундаментальная группа A в точке Q. Можно подобрать эти кривые так, чтобы $\prod\limits_{j=0}^{m} [\gamma_j] = \prod\limits_{i=1}^{g} [[a_i], [b_i]]$ при $g > 0$ и $\prod_{j=0}^{m} [\gamma_j] = e$ при $g = 0$ (здесь и далее $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор элементов x и y).

Для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ через f_* будем обозначать индуцируемый f гомоморфизм фундаментальных групп.

Обозначим через $\Sigma^C(\beta)$ множество римановых поверхностей σ, ограниченных заданной кривой $\beta \in \mathfrak{M}$, множество точек ветвления которых проектируется в множество $C = \{c_0, c_1, \dots, c_m\}$. Сначала сформулируем результат о факторизации гомотопического класса $[\beta]$ кривой β в $\pi_1(A, Q)$ в случае, когда риманова поверхность известна.

Теорема 1 ([1]). *Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$, $\sigma = (M, p) \in \Sigma^C(\beta)$, $\rho = \rho_M$ и над точкой c_k лежит h_k точек кратностей $n_1^{(k)} - 1, \dots, n_{h_k}^{(k)} - 1$, $k = 0, \dots, m$. Тогда $[\beta]$ представимо в виде*

$$[\beta] = \prod_{k=0}^{m} \prod_{j=1}^{h_k} ([\alpha_{kj}][\gamma_k]^{n_j^{(k)}} [\alpha_{kj}]^{-1})[\delta], \tag{1}$$

где

$$[\delta] = \begin{cases} e, & \text{если } \rho = 0; \\ \prod\limits_{j=1}^{\rho} [[\delta_{1j}], [\delta_{2j}]], & \text{если } \rho > 0, \end{cases} \tag{2}$$

а элементы $[\alpha_{kj}], [\delta_{kj}] \in \pi_1(A, Q)$.

При этом

$$\sum_{j=1}^{h_k} n_j^{(k)} = n_\sigma(c_k), \quad k = 0, \dots, m, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=1}^{h_k} (n_j^{(k)} - 1) = (2 - 2\rho_N)n - (1 - 2\rho) + W(\beta), \tag{4}$$

где $W(\beta)$ — индекс вращения β, $n = n_\sigma(\infty_N)$. Представление (1), (2) *может быть выбрано таким образом, чтобы подгруппа H в $\pi_1(A,Q)$, порожденная элементами $[\alpha_{kj}][\gamma_k]^{n_j^{(k)}}[\alpha_{kj}]^{-1}$, $j = 1,\dots,h_k$, $k = 0,\dots,m$, и, если $\rho > 0$, $[\delta_{ij}]$, $i = 1,2$, $j = 1,\dots,\rho$, совпадала с $\check{p}_*(\pi_1(\check{M},\widetilde{Q}))$, где*

$$\check{M} = M \setminus p^{-1}(C), \quad \check{p} = p|_{\check{M}} : \check{M} \to A, \tag{5}$$

$\widetilde{Q}$ — начало кривой α, обходящей край ∂M в положительном направлении и проектирующейся в β, $\check{p}_* : \pi_1(\check{M},\widetilde{Q}) \to \pi_1(A,Q)$ — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцируемый $\check{p}$. Если $\rho > 0$, то в $\check{M}$ существуют такие кривые $\widetilde{\delta}_{ij}$, $i = 1,2$, $j = 1,\dots,\rho$, индуцирующие базис гомологий M, что $\check{p}_*([\widetilde{\delta}_{ij}]) = [\delta_{ij}]$, $i = 1,2$, $j = 1,\dots,\rho$.

Представление (1), (2) для β, обладающее всеми свойствами, описанными в теореме 1, назовем *σ-представлением.* Подгруппу H в $\pi_1(A,Q)$, порожденную элементами $[\alpha_{kj}][\gamma]^{n_j^{(k)}}[\alpha_{kj}]^{-1}$, $j = 1,\dots,h_k$, $k = 0,\dots,m$, и, если $\rho > 0$, $[\delta_{ij}]$, $i = 1,2$, $j = 1,\dots,\rho$, назовем подгруппой представления (1), (2). Справедливо обращение теоремы 1.

Теорема 2 ([2]). *Пусть $\rho \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathfrak{M}$ и для некоторых целых чисел $n_j^{(k)} \geq 0$, из которых по крайней мере одно не равно нулю, имеют место соотношения* (1), (2) *и* (4), *где $n = \sum\limits_{j=1}^{h_0} n_j^{(0)}$, $W(\beta)$ — индекс вращения кривой β. Если $h : (M',Q') \to (A,Q)$ — накрытие (A,Q), соответствующее подгруппе H представления* (1), (2), *то поднятие β на M' из точки Q' разбивает M' на две части, одна из которых есть $(\check{M},\check{p})$, определенная в* (5) *для некоторой римановой поверхности $\sigma = (M,p) \in \Sigma^C(\beta)$. При этом* (1), (2) *— это σ-представление для $[\beta]$ и имеет место* (3).

Замечание 1. Очевидно, что вместо “упорядоченных” представлений (1), (2) можно использовать “неупорядоченные” представления

$$[\beta] = \prod_j ([\alpha_j][\gamma_{k(j)}]^{n_j}[\alpha_j]^{-1})[\delta], \qquad \sum_{k(j)=0} n_j = n.$$

Это следует из известного равенства $x^y \cdot u^z = u^z \cdot x^w$, $w = (u^{-1})^z$, где $x^y = yxy^{-1}$, справедливого для любых элементов x, y, z, u произвольной группы.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2, приведенного в [1], нетрудно вывести, что если H — подгруппа представления (1), (2), то она изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\check{M},\check{p})$, причем изоморфизм индуцирован отображением $h|_{\check{M}}$; кроме того, если H, H_1 — подгруппы, соответствующие разным представлениям вида (1), (2), и $H_1 \subset H$, то $H_1 = H$.

Из теорем 1, 2 следует, что для описания всех римановых поверхностей класса $\Sigma^C(\beta)$ следует перечислить все возможные подгруппы представлений (1), (2) гомотопического класса $[\beta]$ в $\pi_1(A,Q)$, удовлетворяющих условию (4), где $n = \sum\limits_{j=1}^{h_0} n_j^{(0)}$. Если ограничиться только римановыми поверхностями $\sigma \in \Sigma^C(\beta)$ с $n_\sigma(\infty_N) = 0$, то решение этой задачи может быть получено комбинаторным способом с использованием вводимого ниже понятия базисного набора и топологического способа нахождения всевозможных представлений элементов $[\delta]$ из коммутатора $[\pi_1,\pi_1]$ группы $\pi_1(A,Q)$ в виде произведения ρ коммутаторов, найденного в [3] и [4].

3. Основной результат. Определим понятие базисного набора. Хорошо известно, что группа $\pi_1(A,Q)$ свободна и в качестве образующих ее можно взять элементы $[\gamma_1],\dots,[\gamma_m]$, и если $\rho = \rho_M > 0$, также $[a_1],[b_1],\dots,[a_\rho],[b_\rho]$. Поэтому она изоморфна группе X, состоящей из классов эквивалентности $\overline{\mathfrak{A}}$ слов $\mathfrak{A}$, составленных из символов алфавита $\{x_1^{\pm1},\dots,x_{m+2\rho}^{\pm1}\}$, причем изоморфизм $\varphi : X \to \pi_1(A, Q)$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$\varphi(\overline{x_i^{\pm 1}}) = \begin{cases} [\gamma_i]^{\pm 1}, & i = 1, \ldots, m; \\ [a_{i-m}]^{\pm 1}, & i = m+1, \ldots, m+\rho; \\ [b_{i-m-\rho}]^{\pm 1}, & i = m+\rho+1, \ldots, m+2\rho. \end{cases}$$

В дальнейшем для простоты обозначений часто будем опускать черту над $x_i^{\pm 1}$. Пусть $\psi = \varphi^{-1}$.

Пусть элемент $x \in X$, $x \neq e$. Объединяя в приведенной записи элемента x (см. подробнее об этом в п. 4) все символы x_i, стоящие рядом и имеющие одинаковые индексы, получаем запись

$$x = \prod_{i=1}^{s} x_{n(i)}^{k_i}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad k_i \neq 0, \quad n_i \neq n_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, s-1, \tag{6}$$

которую будем называть *несократимой записью* элемента x.

Пусть $[X, X]$ — коммутант группы X. Для любых $x \in [X, X]$ и неотрицательного целого k обозначим через $\Delta(x, k)$ множество наборов $d = \{x_{ij}, i = 1, 2, j = 1, \ldots, k\}$ элементов из X таких, что x представим в виде произведения k коммутаторов

$$x = \prod_{j=1}^{k} [x_{1j}, x_{2j}].$$

Если $x \neq e$, то по определению полагаем $\Delta(x, 0) = \emptyset$; если же $x = e$, то $\Delta(x, 0) = \{e\}$. Теперь определим *степень элемента* x как число $\deg x = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid \Delta(x, k) \neq \emptyset\}$.

Обозначим через $[\pi_1, \pi_1]$ коммутант группы $\pi_1(A, Q)$. Так как группа $\pi_1(A, Q)$ изоморфна X, то можно определить и степень любого элемента $[\Delta] \in [\pi_1, \pi_1]$.

Предположим, что $l_j = \sum\limits_{n(i)=j} k_i \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$ (нетрудно видеть, что если $\beta \in \mathfrak{M}$, $x = \psi([\beta])$ и существует $\sigma \in \Sigma^C(\beta)$, для которой $n_\sigma(\infty_N) = 0$, то это условие выполнено, т. к. l_j совпадает с числом листов σ над точкой c_j с учетом кратности ветвления). Пусть $u = \sum\limits_{j=1}^{m} l_j - W(\beta) + 1$, $\rho \in \mathbb{Z}_+$, $0 < u - 2\rho < M$. *Базисным набором* $\mathbf{K}$ *степени* ρ *для элемента* x вида (6) назовем совокупность чисел $p_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \ldots, s$, таких, что

1) $p_i = 0$, если $k_i \leq 0$ или $n(i) > m$ в (6);

2) $\sum\limits_{p_i \neq 0} 1 = u - 2\rho$;

3) элемент $d_{\mathbf{K}} = \prod\limits_{i=1}^{s} x_{n(i)}^{k_i - p_i} \in [X, X]$ и $\deg(d_{\mathbf{K}}) = \rho$.

Если $\mathbf{K}$ — базисный набор степени ρ, то элемент x можно записать в виде

$$x = \prod_{i=1}^{s} (y_i x_{n(i)}^{p_i} y_i^{-1}) d_{\mathbf{K}}, \quad y_i = \prod_{j=1}^{i} x_{n(j)}^{k_j - p_j}, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{7}$$

Множество базисных наборов степени ρ для элемента x обозначим через $K(x, \rho)$. Отметим, что на практике фиксация базисного набора означает выбор способа вычеркивания некоторых элементов, входящих в (6) в положительной степени, или замены положительных степеней меньшими или отрицательными, происходящего таким образом, что после его осуществления остается элемент из коммутанта степени ρ.

Пусть $\beta \in \mathfrak{M}$ и приведенная запись элемента $x = \psi([\beta])$ имеет вид (6). Пусть $l_j = \sum\limits_{n(i)=j} k_i \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, причем $\sum\limits_{j=1}^{m} l_j > 0$. Пусть $\mathbf{K} = (p_1, \ldots, p_s)$ — некоторый базисный набор для x. Поскольку $[\delta] = \varphi(d_{\mathbf{K}}) \in [\pi_1, \pi_1]$, то при $\deg[\delta] = \rho > 0$ множество $\Delta([\delta], \rho)$ наборов

$$d = \{[\delta_{ij}],\ i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, \rho\} \tag{8}$$

элементов из $\pi_1(A,Q)$ таких, что $[\delta]$ представим в виде произведения ρ коммутаторов $[\delta] = \prod\limits_{j=1}^{\rho} [[\delta_{1j}],[\delta_{2j}]]$, непусто. Фиксируем в этом случае некоторый набор d вида (8). Обозначим через $H(\mathbf{K},d)$ подгруппу в $[\pi_1,\pi_1]$, порожденную элементами $\varphi(y_i x_{n(i)}^{p_i} y_i^{-1})$, где y_i определены в (7), $i=1,\dots,s$, и, если $\deg[\delta]=\rho>0$, также и элементами из d.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $h_0=0$. *Тогда существует базисный набор* $\mathbf{K}$ *степени* ρ *и* $d\in\Delta([\delta],\rho)$ *такие, что ненулевые элементы* p_i *в* $\mathbf{K}$, *для которых* $n(i)=k$, *получаются из набора* $(n_1^{(k)},\dots,n_{h_k}^{(k)})$, $k=1,\dots,m$, *некоторой перестановкой, и подгруппа* $H(\mathbf{K},d)$ *совпадает с подгруппой* H *представления* (1), (2).

Доказательство этого факта вытекает из следующего предложения.

Предложение. *В условиях теоремы* 3 *слово* $\mathfrak{A}$ — *приведенную запись элемента* $x=\psi([\beta])$ *в* X *можно представить в виде*

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1 x_{r(1)}\mathfrak{A}_2 x_{r(2)}\dots\mathfrak{A}_k x_{r(k)}\mathfrak{A}_{k+1}, \tag{9}$$

$1\le r(j)\le m$, *где слова* $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_{k+1}$ *таковы, что элементы* $[\nu_j]=\varphi(\overline{\mathfrak{A}}_j)$, $j=1,\dots,k+1$, *удовлетворяют условиям*

I) *существует набор натуральных чисел* $(q_1,\dots,q_k)$, *получающийся из набора* $(n_1^{(k)},\dots,n_{h_k}^{(k)}$, $k=1,\dots,m)$ *такой перестановкой, что элемент* $[\widetilde{\delta}]=\prod\limits_{i=1}^{k}([\nu_i][\gamma_{r(i)}]^{1-q_i})[\nu_{k+1}]$ *содержится в* $[\pi_1,\pi_1]$ *и* $\deg[\widetilde{\delta}]\le\rho$;

II) *существует набор* $\widetilde{d}=\{[\widetilde{\delta}_{ij}],\ i=1,2,\ j=1,\dots,\rho\}\in\Delta([\widetilde{\delta}],\rho)$ *такой, что* $[\widetilde{\delta}_{ij}]\in H$, $i=1,2$, $j=1,\dots,\rho$;

III) *элементы* $[\omega_t]\in H$, $t=1,\dots,k$, *где* $[\omega_t]=[\mu_t][\gamma_{r(t)}]^{q_t}[\mu_t]^{-1}$, $[\mu_t]=\prod\limits_{i=1}^{t-1}([\nu_i][\gamma_{r(i)}]^{1-q_i})[\nu_t]$, $t=1,\dots,k$.

Покажем, как из сформулированного предложения вытекает утверждение теоремы 3. Из (9) следует

$$[\beta]=[\nu_1][\gamma_{r(1)}][\nu_2][\gamma_{r(2)}]\cdots[\nu_k][\gamma_{r(k)}][\nu_{k+1}]=\prod_{t=1}^{k}([\mu_t][\gamma_{r(t)}]^{q_t}[\mu_t]^{-1})\cdot[\delta]=\prod_{t=1}^{k}[\omega_t]^{q_t}\cdot[\widetilde{\delta}],$$

что дает представление $[\beta]$ вида (1), (2), соответствующее подгруппе H_1, порожденной элементами, принадлежащими H. В силу замечания 2 к теореме 2 имеем $H_1=H$. Доказательству предложения посвящены пп. 4, 5 статьи.

4. Сокращения в свободных группах. Введем некоторые необходимые в дальнейшем понятия. Как известно, любая свободная группа ранга n изоморфна группе G_n, состоящей из классов эквивалентности $\overline{\mathcal{A}}$ слов $\mathcal{A}$, составленных из алфавита $\{x_1,\dots,x_n,\ x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}\}$ (см., напр., [5]). Пустое слово будем обозначать через $\emptyset$, длину слова $\mathcal{A}$ — через $|\mathcal{A}|$. По определению $|\emptyset|=0$.

Один и тот же символ x_i^{ε} ($\varepsilon=\pm1$, $i=1,\dots,n$) может входить в разные слова, а также по нескольку раз присутствовать в записи одного и того же слова $\mathcal{A}$. Пусть, например, $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1 x_i^{\varepsilon}\mathcal{A}_2$. Чтобы отличить это вхождение x_i^{ε} от других, будем указывать место вхождения $m=|\mathcal{A}_1|+1$ и слово, куда входит символ x_i^{ε}. Таким образом, *вхождение* d *символа* x_i^{ε} есть тройка $d=(x_i^{\varepsilon},m,\mathcal{A})$, где x_i^{ε} — *символ вхождения,* m — *место вхождения,* $\mathcal{A}$ — *слово вхождения.* Будем обозначать $x_i^{\varepsilon}=(d)$, $m=|d|$, $\mathcal{A}=w(d)$.

Отмеченным словом назовем совокупность $\mathfrak{A}=\{d_1,\dots,d_m\}$, где $d_j=(x_{i(j)}^{\varepsilon(j)},m_j,\mathcal{A})$, $j=1,\dots,k$, — различные вхождения. Если $|d_1|<|d_2|<\dots<|d_k|$, то $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1 x_{i(1)}^{\varepsilon(1)}\mathcal{A}_2 x_{i(2)}^{\varepsilon(2)}\mathcal{A}_3\dots x_{i(k)}^{\varepsilon(k)}\mathcal{A}_{k+1}$, где $\sum\limits_{j=1}^{l}(|\mathcal{A}_j|+1)=|d_l|$, $l=1,\ldots,m$. Обратно, такой записи однозначно соответствует отмеченное слово $\mathfrak{A}$. Поэтому будем отождествлять $\mathfrak{A}$ с записью слова $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_1 * x_{i(1)}^{\varepsilon(1)} * \mathcal{A}_2 * x_{i(2)}^{\varepsilon(2)} * \mathcal{A}_3 * \cdots * x_{i(k)}^{\varepsilon(k)} * \mathcal{A}_{k+1},$$

где звездочки отмечают вхождения $x_{i(j)}^{\varepsilon(j)}$ в $\mathcal{A}$, $j=1,\ldots,n$. В частности, если $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1x_i^{\varepsilon}\mathcal{A}_2$, $d=(x_i^{\varepsilon},|\mathcal{A}_1|+1,\mathcal{A})$, то $\{d\}=\mathcal{A}_1 * x_i^{\varepsilon} * \mathcal{A}_2$.

Пусть слово $\mathcal{A}=\prod\limits_{i=1}^{p}x_{r(i)}^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i=\pm1$, $p\geq 2$. Если $r(j)=r(j+1)$, $\varepsilon_j=-\varepsilon_{j+1}$ для некоторого $1\leq j\leq p-1$, и слово $\mathcal{T}=\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$, где $\mathcal{T}_1=\prod\limits_{i=1}^{j-1}x_{r(i)}^{\varepsilon_i}$, $j\geq 2$, $\mathcal{T}_1=\emptyset$, $j=1$; $\mathcal{T}_2=\prod\limits_{i=j+2}^{p}x_{r(i)}^{\varepsilon_i}$, $j\leq p-2$, $\mathcal{T}_2=\emptyset$, $j=p-1$, то совокупность $S=(\mathcal{A},j,\mathcal{T})$ назовем *элементарным сокращением* слова $\mathcal{A}$ до слова $\mathcal{T}$ путем удаления вхождений $d_j=(x_{r(j)}^{\varepsilon_j},j,\mathcal{A})$ и $d_{j+1}=(x_{r(j+1)}^{\varepsilon_{j+1}},j+1,\mathcal{A})$. Пусть $d_i=(x_{r(i)}^{\varepsilon_i},i,\mathcal{A})$, $i=1,\ldots,n$. Определим *S-образ вхождения* d_i как вхождение $S(d_i)=(x_{r(i)}^{\varepsilon_i},i,\mathcal{T})$, если $i=1,\ldots,j-1$, и $S(d_i)=(x_{r(i-2)}^{\varepsilon_{i-2}},i-2,\mathcal{T})$, если $i=j+2,\ldots,p$. Если $\widetilde{d}_i=S(d_i)$, то d_i будем называть *S-прообразом вхождения* $\widetilde{d}_i$ и писать $d_i=S^{-1}(\widetilde{d}_i)$.

Пусть $S_i=(\mathcal{A}_i,j(i),\mathcal{A}_{i+1})$, $i=1,\ldots,n$, — некоторая совокупность элементарных сокращений. Тогда $S=(\mathcal{A}_1,j(1),\mathcal{A}_2,j(2),\mathcal{A}_3,\ldots,j(n),\mathcal{A}_{n+1})$ назовем *сокращением слова $\mathcal{A}_1$ до $\mathcal{A}_{n+1}$*. Если $\mathcal{A}_{n+1}\neq\emptyset$, то для любого такого вхождения $\widetilde{d}$, что $w(\widetilde{d})=\mathcal{A}_{n+1}$, определим его S-прообраз $S^{-1}(\widetilde{d})=S_1^{-1}\circ S_2^{-1}\circ\cdots\circ S_n^{-1}(\widetilde{d})$. Для всех d, являющихся S-прообразами, определен S-образ $\widetilde{d}=S_n\circ S_{n-1}\circ\cdots\circ S_1(d)$. Если d не является S-прообразом ни для какого вхождения $\widetilde{d}$ в $\mathcal{A}_{n+1}$, то d назовем *S-сократимым.* Если S — сокращение слова $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}$, T — сокращение слова $\mathcal{B}$ до $\mathcal{C}$, то очевидным образом можно определить суперпозицию $T\circ S$, являющуюся сокращением слова $\mathcal{A}$ до $\mathcal{C}$.

Если вхождение d является S-сократимым, то существует такое k, $1\leq k\leq n-1$, что для сокращения $S^{(k)}=S_k\circ S_{k-1}\circ\cdots\circ S_1$ слова $\mathcal{A}_1$ до слова $\mathcal{A}_{k+1}$ вхождение $d^{(k)}=S^{(k)}(d)$ является S_{k+1}-сократимым, т.е. $\mathcal{A}_{k+2}$ получается из $\mathcal{A}_{k+1}$ элементарным сокращением S_{k+1} путем удаления вхождения $d^{(k)}$ и некоторого вхождения $d_1^{(k)}$. Пусть вхождение $d_1=(S^{(k)})^{-1}(d_1^{(k)})$. Назовем это вхождение *S-антиподом вхождения d.*

Если S_i — сокращение слова $\mathcal{A}$ до $\mathcal{B}_i$, и $\mathcal{B}_i$, $i=1,2$, *приведены*, т.е. не допускают элементарных сокращений, то $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2$ (напр., [7]). *Два слова $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ эквивалентны* (пишем $\mathcal{A}_1\sim\mathcal{A}_2$), если существует такое приведенное слово $\mathcal{B}$, что либо $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\mathcal{B}$, либо существует сокращение слова $\mathcal{A}_i$ до слова $\mathcal{B}$, $i=1,2$. Таким образом, у любого класса эквивалентности $\overline{\mathcal{A}}$ слов $\mathcal{A}$ существует единственный представитель, являющийся приведенным и называющийся *приведенной записью* для $\overline{\mathcal{A}}$.

Лемма. *Если $\mathcal{C}$ — приведенное слово, S и T — некоторые сокращения слов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$ до $\mathcal{C}$ соответственно, то существуют слово $\mathcal{F}$ и сокращения U и V слова $\mathcal{F}$ до слов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$ соответственно такие, что для любого вхождения d в $\mathcal{C}$ имеем $(S\circ U)^{-1}(d)=(T\circ V)^{-1}(d)$.*

Доказательство. Если $\mathcal{C}=\prod\limits_{i=1}^{s}x_{k(i)}^{\varepsilon_i}$, то

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\prod_{i=1}^{s}(x_{k(i)}^{\varepsilon_i}\mathcal{E}_i),\quad \mathcal{D}=\mathcal{D}_0\prod_{i=1}^{s}(x_{k(i)}^{\varepsilon_i}\mathcal{D}_i),$$

где

$$S\left(x_{k(i)}^{\varepsilon_i},\ \sum_{l=0}^{i}(|\mathcal{E}_l|+1),\mathcal{E}\right)=T\left(x_{k(i)}^{\varepsilon_i},\ \sum_{l=0}^{i}(|\mathcal{D}_l|+1),\mathcal{D}\right)=(x_{k(i)}^{\varepsilon_i},i,\mathcal{C}),$$

$i=1,\ldots,s$. Тогда слова $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{D}_i$, $i=0,\ldots,s$, эквивалентны пустому и слово $\mathcal{F}=\mathcal{E}_0\mathcal{D}_0\prod\limits_{i=1}^{s}(x_{k(i)}^{\varepsilon_i}\mathcal{E}_i\mathcal{D}_i)$ является искомым. □

Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 * \mathcal{B} * \mathcal{A}_2$, то любое сокращение S слова $\mathcal{A}$ индуцирует сокращение слова $\mathcal{B}$ и определено слово $S(\mathcal{B}) = \emptyset$, если любой элемент множества $Y = \{d \mid w(d) = A,\ |\mathcal{A}_1| + 1 \le |d| \le |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{B}|\}$, является S-сократимым, и $S(\mathcal{B}) = \prod\limits_{d\in Y}(S(d))$ — в противном случае.

5. Доказательство предложения. Рассмотрим случай $\rho > 0$ как более сложный. Построим последовательность таких слов $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(n)}$, что

a) каждое $\mathfrak{A}^{(i)}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}_1^{(i)} x_{r(1)} \mathfrak{A}_2^{(i)} x_{r(2)} \ldots \mathfrak{A}_k^{(i)} x_{r(k)} \mathfrak{A}_{k+1}^{(i)} \tag{10}$$

(индексы $r(1), \ldots, r(k)$ зависят, вообще говоря, от i), причем слова $\mathfrak{A}_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, k$, приведены и для $[\nu_j] = \varphi(\overline{\mathfrak{A}_j^{(i)}})$, $j = 1, \ldots, k+1$, выполняются условия I)–III);

b) если $\mathfrak{A}^{(i)}$ не приведено, то $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ получается из $\mathfrak{A}^{(i)}$ некоторым сокращением, в противном случае $\mathfrak{A}^{(i+1)} = \mathfrak{A}^{(i)}$;

c) $\overline{\mathfrak{A}^{(i)}} = \psi([\beta])$, $i \ge 1$.

Если такая последовательность построена, то, начиная с некоторого номера, $\mathfrak{A}^{(i)} = \mathfrak{A}$ не зависит от i и является несократимой записью $\psi([\beta])$, удовлетворяющей всем необходимым требованиям.

В качестве $\mathfrak{A}^{(1)}$ возьмем слово

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}_1^{(1)} x_{r(1)} \mathfrak{A}_2^{(1)} x_{r(2)} \ldots \mathfrak{A}_k^{(1)} x_{r(k)} \mathfrak{A}_{k+1}^{(1)},$$

где $\mathfrak{A}_1^{(1)}, \mathfrak{A}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}_k^{(1)}, \mathfrak{A}_{k+1}^{(1)}$ — приведенные записи элементов

$$\psi([\alpha_{11}][\gamma_1]^{n_1^{(1)}-1}),\ \psi([\alpha_{11}]^{-1}[\alpha_{12}][\gamma_1]^{n_2^{(1)}-1}), \ldots, \psi([\alpha_{m,h_m-1}]^{-1}[\alpha_{m,h_m}][\gamma_m]^{n_{h_m-1}^{(m)}-1}),\ \psi([\alpha_{m,h_m}]^{-1}[\delta])$$

(см. (1)). Кроме того, имеет место (2). Нетрудно видеть, что тогда $\mathfrak{A}^{(1)}$ удовлетворяет условиям I)–III) с $[\nu_j] = \mathfrak{A}_j^{(1)}$, $q_1 = n_1^{(1)}, \ldots, q_k = n_{h_m}^{(m)}$, $r(1) = 1, \ldots, r(k) = m$.

Предположим теперь, что построена последовательность слов $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(i)}$, удовлетворяющих условиям a)–c). Покажем, как определить $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ в случае, когда $\mathfrak{A}^{(i)}$ не приведено. Поскольку все слова $\mathfrak{A}_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, k$, приведены, то для некоторого j в (10) либо $\mathfrak{A}_j^{(i)} = \mathfrak{A}'_j x_{r(j)}^{-1}$, либо $\mathfrak{A}_{j+1}^{(i)} = x_{r(j)}^{-1} \mathfrak{A}''_{j+1}$. Пусть, для определенности, имеет место вторая возможность. В дальнейшем условимся для простоты обозначений верхний индекс у всех объектов, связанных со словом $\mathfrak{A}^{(i)}$, опускать. Объекты же, соответствующие определяемому слову $\mathfrak{A}^{(j+1)}$, будем снабжать верхним индексом.

Рассмотрим слово

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}_1 x_{r(1)}^{1-q_1} \mathfrak{A}_2 x_{r(2)}^{1-q_2} \ldots \mathfrak{A}_j x_{r(j)}^{1-q_j} x_{r(j)} \mathfrak{A}''_{j+1} x_{r(j+1)}^{1-q_{j+1}} \mathfrak{A}_{j+2} \ldots \mathfrak{A}_k x_{r(k)}^{1-q_k} \mathfrak{A}_{k+1}.$$

Так как слово $\mathfrak{A}^{(i)}$ удовлетворяет I), II), то

$$\varphi(\overline{\mathfrak{L}}) = [\widetilde{\delta}] = \prod_{j=1}^{\rho} [[\widetilde{\delta}_{1j}], [\widetilde{\delta}_{2j}]], \tag{11}$$

и, значит, $\overline{\mathfrak{L}} = \prod\limits_{j=1}^{\rho} [[\overline{\mathfrak{D}}_{1j}], [\overline{\mathfrak{D}}_{2j}]]$, где $\mathfrak{D}_{ij}$ — приведенная запись элемента $\psi([\widetilde{\delta}_{ij}])$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, \rho$. Пусть $\mathfrak{C}$ — приведенная запись элемента $\overline{\mathfrak{L}}$. Тогда $\mathfrak{C}$ получается из $\mathfrak{L}$ некоторым сокращением S. Возможны два случая.

Случай 1. Вхождение $d = (x_{r(j)}^{-1}, n_0, \mathfrak{L})$, где $n_0 = \sum\limits_{t=1}^{j}(|\mathfrak{A}_t| + |q_t - 1|) + 1$, является S-сократимым. Тогда у d есть S-антипод $d_1 = (x_{r(j)}, n_1, \mathfrak{L})$. Значит, некоторое $\mathfrak{A}_l$ имеет вид $\mathfrak{A}_l = \mathfrak{A}'_l x_{r(j)} \mathfrak{A}''_l$, причем

$n_1 = 1 + |\mathfrak{A}_l| + \sum\limits_{i=1}^{l-1}(|\mathfrak{A}_i| + |q_i - 1|)$. Без ограничения общности можно считать, что $l < j$. В качестве $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ возьмем тогда слово

$$\mathfrak{A}^{(i+1)} = \mathfrak{A}_1 x_{r(1)} \mathfrak{A}_2 x_{r(2)} \cdots \mathfrak{A}_{l-1} x_{r(l-1)} \mathfrak{A}'_l x_{r(j)} \mathfrak{A}''_l x_{r(l)} \times \\ \times \mathfrak{A}_{l+1} \cdots \mathfrak{A}_{j-1} x_{r(j-1)} \widetilde{\mathfrak{A}}_j x_{r(j+1)} \mathfrak{A}_{j+2} \cdots \mathfrak{A}_k x_{r(k)} \mathfrak{A}_{k+1}, \quad (12)$$

где $\widetilde{\mathfrak{A}}_j$ — приведенная запись слова $\mathfrak{A}_j \mathfrak{A}''_{j+1}$. Итак,

$$\mathfrak{A}^{(i+1)}_s = \mathfrak{A}_s, \quad s < l, \quad s > j+1, \\ \mathfrak{A}^{(i+1)}_l = \mathfrak{A}'_l, \quad \mathfrak{A}^{(i+1)}_{l+1} = \mathfrak{A}''_l, \quad \mathfrak{A}^{(i+1)}_{j+1} = \widetilde{\mathfrak{A}}_j, \quad (13) \\ \mathfrak{A}^{(i+1)}_s = \mathfrak{A}_{s-1}, \quad l+1 < s < j+1,$$

$$r^{(i+1)}(s) = r(s), \quad s < l, \quad s > j, \quad r^{(i+1)}(l) = r(j), \quad (14) \\ r^{(i+1)}(s) = r(s-1), \quad l < s < j+1.$$

Согласно (13) определим $q^{(i+1)}_s = q_s$, $s < l$, $s > j$, $q^{(i+1)}_l = q_j$, $q^{(i+1)}_s = q_{s-1}$, $l < s < j+1$. Покажем, что $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ удовлетворяет условиям I)–III). Имеем

$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = [\xi][\nu'_l][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu''_l][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\nu''_{j+1}][\xi''], \quad (15)$$

где

$$[\xi] = \prod_{s=1}^{l-1}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}), \quad [\xi'] = \prod_{s=l+1}^{j-1}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}), \quad [\xi''] = \prod_{s=j+1}^{k}([\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]),$$

$[\nu'_l] = \varphi(\overline{\mathfrak{A}'_l})$, $[\nu''_l] = \varphi(\overline{\mathfrak{A}''_l})$, $[\nu''_{j+1}] = \varphi(\overline{\mathfrak{A}''_{j+1}}) = [\gamma_{r(j)}][\nu_{j+1}]$.

Так как d и d_1 — S-антиподы, то слово $\mathfrak{A}''_l x^{1-q_l}_{r(l)} \cdot \prod\limits_{s=l+1}^{j}(\mathfrak{A}_s x^{1-q_s}_{r(s)})$ эквивалентно пустому. Значит, $[\nu''_l][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l} \prod\limits_{s=l+1}^{j}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}) = e$. Следовательно, $[\nu''_l][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j} = e$ и

$$[\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu''_l][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j] = e = [\gamma_{r(j)}][\nu''_l][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\gamma_{r(j)}]^{-1}. \quad (16)$$

Используя (16), из (15) получаем

$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = [\xi][\nu'_l][\gamma_{r(j)}][\nu''_l][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu_{j+1}][\xi''] = [\widetilde{\delta}] = \prod_{j=1}^{\rho}[[\widetilde{\delta}_{1j}], [\widetilde{\delta}_{2j}]],$$

и в качестве $[\widetilde{\delta}^{(i+1)}_{ij}]$ можно взять $[\widetilde{\delta}_{ij}]$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, \rho$. Так как $[\widetilde{\delta}_{ij}] \in H$, $i = 1, 2$, $j = 1, \dots, \rho$, то $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ удовлетворяет условиям I) и II).

Для того чтобы установить справедливость III) для $\mathfrak{A}^{(i+1)}$, выразим $[\mu^{(i+1)}_l]$, $l = 1, \dots, k$, через элементы $[\mu_l]$, $[\nu_l]$, $l = 1, \dots, k$. Имеем

$$[\mu^{(i+1)}_t] = [\mu_t], \quad t = 1, \dots, l-1, \quad [\mu^{(i+1)}_l] = [\xi][\nu'_l],$$

$$[\mu^{(i+1)}_t] = [\xi][\nu'_l][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu''_l], \quad \prod_{s=l}^{t-2}([\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]), \quad t = l+1, \dots, j,$$

$$[\mu^{(i+1)}_t] = [\xi][\nu'_l][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}[\nu''_l][\gamma_{r(l)}]^{1-q_l}[\xi'][\nu_j][\nu''_{j+1}] \times \\ \times \prod_{s=j+1}^{t-1}([\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]), \quad t = j+1, \dots, k.$$

С использованием (16) нетрудно показать, что $[\mu_t^{(i+1)}] = [\mu_t]$, $t = 1,\dots,l-1$, $t = j+1,\dots,k$, $[\mu_l^{(i+1)}] = [\mu_j]$, а при $t = l+1,\dots,j$

$$[\mu_t^{(i+1)}] = [\xi][\nu_l'][\gamma_{r(j)}]^{-q_j}[\nu_l']^{-1}[\xi]^{-1}\cdot[\xi][\nu_l'][\gamma_{r(j)}][\nu_l'']\prod_{s=l}^{t-2}([\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}[\nu_{s+1}]) =$$
$$= [\mu_l^{(i+1)}][\gamma_{r(j)}]^{-q_j}[\mu_l^{(i+1)}]^{-1}\prod_{s=1}^{t-2}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s})[\nu_{t-1}] =$$
$$= [\mu_j][\gamma_{r(j)}]^{-q_j}[\mu_j]^{-1}[\mu_{t-1}] = [\omega_j]^{-1}[\mu_{t-1}].$$

Поэтому $[\omega_t^{(i+1)}] = [\omega_t]$, $t = 1,\dots,l-1$, $t = j+1,\dots,k$, $[\omega_l^{(i+1)}] = [\omega_j]$, $[\omega_t^{(i+1)}] = [\omega_j]^{-1}[\omega_{t-1}][\omega_j]$, $t = l+1,\dots,j$. Так как $[\omega_t] \in H$, $t = 1,\dots,k$, то и $[\omega_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1,\dots,k$, и рассмотрение случая 1 закончено.

Случай 2. Пусть вхождение d является S-несократимым. Тогда слово $\mathfrak{L}$ непусто и содержит вхождение $S(d)$. С другой стороны, $\overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{D}}$, где $\mathfrak{D} = \prod_{s=1}^{\rho}(\mathfrak{D}_{1s}\mathfrak{D}_{2s}\mathfrak{D}_{1s}^{-1}\mathfrak{D}_{2s}^{-1})$, поэтому $\mathfrak{C}$ является приведенной записью элемента $\overline{\mathfrak{D}}$, т. е. $\mathfrak{C}$ получается из $\mathfrak{D}$ некоторым сокращением T. Определим для любого вхождения $\overline{d}$ в слово $\mathfrak{D}$ понятие *сопряженного вхождения* $(\overline{d})^*$. Ясно, что существует такое u, $1 \le u \le \rho$, что для $\widetilde{n} = |\overline{d}|$ выполняется одно из следующих четырех условий:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & |\mathfrak{D}_u| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}|, \\ \text{b)} & |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}|, \\ \text{c)} & |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + 2|\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}|, \\ \text{d)} & |\mathfrak{D}_u| + 2|\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| < \widetilde{n} \le |\mathfrak{D}_u| + 2(|\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}|), \end{array} \tag{17}$$

где $\mathfrak{D}_u = \prod_{j=1}^{u-1}(\mathfrak{D}_{1j}\mathfrak{D}_{2j}\mathfrak{D}_{1j}^{-1}\mathfrak{D}_{2j}^{-1})$. Если имеет место a), то $\mathfrak{D}_{1u} = \mathfrak{D}_{1u}'x_k^{\varepsilon}\mathfrak{D}_{1u}''$, $\varepsilon = \pm 1$, причем $\widetilde{n} = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}'| + 1$, и существует вхождение $(\overline{d})^* = (x_i^{-\varepsilon}, \widetilde{n}^*, \mathfrak{D})$, где $\widetilde{n}^* = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| + |\mathfrak{D}_{1u}''| + 1$. Если выполняется c), то $\mathfrak{D}_{1u}^{-1} = \mathfrak{D}_{1u}'x_i^{\varepsilon}\mathfrak{D}_{1u}''$, причем $\widetilde{n} = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}| + |\mathfrak{D}_{2u}| + |\mathfrak{D}_{1u}'| + 1$, и тогда $(\overline{d})^* = (x_i^{-\varepsilon}, \widetilde{n}^*, \mathfrak{D})$, где $\widetilde{n}^* = |\mathfrak{D}_u| + |\mathfrak{D}_{1u}''| + 1$. Аналогично определяется сопряженное вхождение в случаях b), d). Очевидно, что $(\overline{d})^{**} = \overline{d}$.

Пусть $d_1 = T^{-1}(S(d))$. Определим $d_2 = (\overline{d}_1)^*$. Если d_2 является T-сократимым, то существует его T-антипод d_3. Пусть $d_4 = (\overline{d}_3)^*$. Продолжая этот процесс, в результате получаем последовательность таких вхождений $d_1, d_2, \dots$ в слово $\mathfrak{D}$, что для любого $t \ge 1$ выполняются условия $\alpha)$ $d_{2t} = (d_{2t-1})^*$; $\beta)$ если d_{2t} является T-сократимым, то d_{2t+1} — его T-антипод.

Покажем, что все d_i различны. Поскольку $(d_{2t}) = x_{r(j)}$, $(d_{2t+1}) = x_{r(j)}^{-1}$, то из условия $d_s = d_t$, $s \le t$, следует $s \equiv t \pmod 2$. Тогда с использованием условий $\alpha)$ и $\beta)$ нетрудно показать, что $d_l = d_{t-s+l}$ для любого $l = 1,\dots,s$. В частности, $d_1 = d_{1+2q}$, где $2q = t-s$. Если $q > 0$, то в силу $\beta)$ d_1 имеет T-антипод d_{2q}, однако d_1 является T-несократимым, т. к. $T(d_1) = S(d)$. Итак, все d_i попарно различны. Так как $|\mathfrak{D}| < \infty$, то число попарно различных вхождений в слово $\mathfrak{D}$ конечно, т. е. для некоторого $v \ge 1$ вхождение d_{2v} является T-несократимым. Пусть $d' = S^{-1}(T(d_{2v}))$. Тогда

$$\{d'\} = \prod_{s=1}^{l-1}(\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s})\mathfrak{A}_l' * x_{r(j)} * \mathfrak{A}_l''\prod_{s=1}^{l-1}(x_{r(s)}^{1-q_s}\mathfrak{A}_{s+1}).$$

Без ограничения общности можно считать, что $l \le j$. Пусть слово $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ имеет вид (12). Покажем, что тогда $\mathfrak{A}^{(i+1)}$ удовлетворяет условиям I)–III).

Для доказательства этого заметим, что если запись (10) удовлетворяет условиям I)–III), то запись $\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}_1^{(i)}x_{r(1)}\widetilde{\mathfrak{A}}_2^{(i)}x_{r(2)}\dots\widetilde{\mathfrak{A}}_k^{(i)}x_{r(k)}\widetilde{\mathfrak{A}}_{k+1}^{(i)}$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}_s^{(i)}$ эквивалентны словам $\mathfrak{A}_s^{(i)}$, также удовлетворяет условиям I)–III); q_s, $[\widetilde{\delta}_{ij}]$ и $[\omega_s]$ при этом не меняются.

Теперь выберем слово $\mathfrak{F}$ и сокращения U и V этого слова до слов $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$ соответственно согласно лемме. Тогда $S \circ U = T \circ V$ и $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{A}}_1 x_{r(1)}^{1-q_1} \widetilde{\mathfrak{A}}_2 x_{r(2)}^{1-q_2} \dots \widetilde{\mathfrak{A}}_k x_{r(k)}^{1-q_k} \widetilde{\mathfrak{A}}_{k+1},$$

причем $U(\widetilde{\mathfrak{A}}_i) = \mathfrak{A}_i$, $1 \le i \le k+1$, а запись $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}}_1 x_{r(1)} \widetilde{\mathfrak{A}}_2 x_{r(2)} \dots \widetilde{\mathfrak{A}}_k x_{r(k)} \widetilde{\mathfrak{A}}_{k+1}$ удовлетворяет условиям I)–III), т. к. слова $\widetilde{\mathfrak{A}}_i$ эквивалентны словам $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, \dots, k+1$. Пусть $\widetilde{d}_t = V^{-1}(d_t)$, $t = 1, \dots, 2v$. Тогда $U(\widetilde{d}_{2v}) = U \circ V^{-1}(d_{2v}) = U \circ V^{-1} \circ T^{-1} \circ T(d_{2v}) = S^{-1} \circ T(d_{2v}) = d'$. Значит, справедливо равенство $\widetilde{\mathfrak{A}}_l = \widetilde{\mathfrak{A}}'_l x_{r(j)} \widetilde{\mathfrak{A}}''_l$, где $U(\widetilde{\mathfrak{A}}'_l) = \mathfrak{A}'_l$, $U(\widetilde{\mathfrak{A}}''_l) = \mathfrak{A}''_l$.

Вернемся к рассмотрению слова $\mathfrak{A}^{(i+1)}$. Покажем, что $[\omega_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \dots, k$. Введем элементы

$$[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] = [\tau_t^{(i+1)}][\omega_t^{(i+1)}][\tau_t^{(i+1)}]^{-1}, \quad [\widetilde{\omega}_t] = [\tau_t][\omega_t][\tau_t]^{-1}, \tag{18}$$

где

$$[\tau_t^{(i+1)}] = \prod_{s=1}^{t-1} [\omega_s^{(i+1)}], \quad [\tau_t] = \prod_{s=1}^{t-1} [\omega_s], \quad t = 1, \dots, k.$$

Ясно, что $\widetilde{\omega}_t \in H$, $t = 1, \dots, k$. Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться, что $[\widetilde{\omega}_t] = [\eta_t][\gamma_{r(t)}]^{q(t)}[\eta_t]^{-1}$, где $[\eta_t] = \prod\limits_{i=1}^{t-1}([\nu_i][\gamma_{r(i)}])[\nu_t]$. Кроме того,

$$\begin{aligned} &[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] = [\widetilde{\omega}_t], \qquad t = 1, \dots, l-1, \quad t = j+1, \dots, k, \\ &[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] = [\widetilde{\omega}_{t-1}], \quad t = l+1, \dots, j, \end{aligned} \tag{19}$$

а

$$[\omega_t^{(i+1)}] = [\widetilde{\tau}_t][\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}][\widetilde{\tau}_t]^{-1}, \quad \text{где} \quad [\widetilde{\tau}_t] = \prod_{s=1}^{t-1} [\widetilde{\omega}_s]^{-1}, \quad t = 1, \dots, k. \tag{20}$$

Из (19) следует $[\omega_t^{(i+1)}] \in H$, $t \ne l$. Тогда $[\widetilde{\tau}_t] \in H$, $[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \dots, k$, следовательно, $[\tau_l^{(i+1)}] \in H$. Если покажем, что $[\omega_l^{(i+1)}] \in H$, то в силу (18) $[\widetilde{\omega}_l^{(i+1)}] \in H$. Значит, с учетом (19), отсюда следует, что $[\widetilde{\omega}_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \dots, k$, и из (20) будет следовать, что $[\omega_t^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, \dots, k$, т. е. будет установлено III) для $\mathfrak{A}^{(i+1)}$. Итак, докажем, что $[\omega_l^{(i+1)}] \in H$.

Пусть $\{\widetilde{d}_t\} = \widetilde{\mathfrak{D}}'_t * x_{r(j)}^{\varepsilon(t)} * \widetilde{\mathfrak{D}}''_t$, $\{d_t\} = \mathfrak{D}'_t * x_{r(j)}^{\varepsilon(t)} * \mathfrak{D}''_t$, где $\varepsilon(t) = (-1)^t$, $t = 1, \dots, 2v$. Покажем, что $F_t = \varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_t})[\gamma_{r(j)}]^{q_j}\left(\varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_t})\right)^{-1} \in H$, $t = 1, \dots, 2v$. Тогда при $t = 2v$ отсюда будем иметь $[\omega_l^{(i+1)}] = [\mu_l^{(i+1)}][\gamma_{r(j)}]^{q_j}[\mu_l^{(i+1)}]^{-1} = F_{2v} \in H$, т. к.

$$\varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2v}}) = \varphi(\overline{U(\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2v})}) = \varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{2v}}) = \varphi\left(\prod_{s=1}^{l-1}(\overline{\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s}})\overline{\mathfrak{A}'_l}\right) = [\mu_l^{(i+1)}].$$

Доказательство проведем по индукции. При $t = 1$ имеем $U(\widetilde{d}_1) = U \circ V^{-1}(d_1) = T \circ S^{-1}(d_1) = d$. Поэтому $U(\widetilde{\mathfrak{D}}'_1) = \prod\limits_{s=1}^{j}(\mathfrak{A}_s x_{r(s)}^{1-q_s})$ и $\varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_1}) = \prod\limits_{s=1}^{j}([\nu_s][\gamma_{r(s)}]^{1-q_s}) = [\mu_j][\gamma_{r(j)}]^{1-q_j}$. Тогда $F_1 = [\mu_j][\gamma_{r(j)}]^{q_j}[\mu_j]^{-1} = [\omega_j] \in H$. Предположим теперь, что $F_s \in H$, $s = 1, \dots, 2t-1$, где $t \le v$. Покажем, что $F_{2t} \in H$, и, в случае $t < v$, $F_{2t+1} \in H$. По условию α) $d_{2t} = V(\widetilde{d}_{2t})$ сопряжено с $d_{2t-1} = V(\widetilde{d}_{2t-1})$. Для $n = n_{2t-1} = |d_{2t-1}|$ имеет место одна из четырех возможностей (17). Пусть для определенности имеет место случай c) (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $\mathfrak{D}'_{2t-1} = \mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_{1u} \mathfrak{D}_{2u} \mathfrak{D}'_{1u}$, $\mathfrak{D}'_{2t} = \mathfrak{D}_u (\mathfrak{D}''_{1u})^{-1}$, $\mathfrak{D}_{1u}^{-1} = \mathfrak{D}'_{1u} x_{r(j)}^{-1} \mathfrak{D}''_{1u}$, $(\mathfrak{D}''_{1u})^{-1} = \mathfrak{D}_{1u} \mathfrak{D}'_{1u} x_{r(j)}^{-1}$ и

$$\varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t}}) = \varphi(\overline{V(\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t})}) = \varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{2t}}) = \varphi(\overline{\mathfrak{D}_u})\varphi(\overline{\mathfrak{D}''_1 u})^{-1} = \varphi(\overline{\mathfrak{D}_u})\varphi(\overline{\mathfrak{D}_{1u}})\varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{1u} x_{r(j)}^{-1}});$$

аналогично
$$\varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t-1}}) = \varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{2t-1}}) = \varphi(\overline{\mathfrak{D}_u})\varphi(\overline{\mathfrak{D}_{1u}})\varphi(\overline{\mathfrak{D}_{2u}})\varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{1u}x^{-1}_{r(j)}})[\gamma_{r(j)}].$$
Значит,
$$\varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t}}) = [\widetilde{\delta}_u]\varphi(\overline{\widetilde{\mathfrak{D}}'_{2t-1}})[\gamma_{r(j)}], \tag{21}$$
где
$$[\widetilde{\delta}_u] = \varphi(\overline{\mathfrak{D}_u})\varphi(\overline{\mathfrak{D}_{1u}})\varphi((\overline{\mathfrak{D}_{2u}})^{-1})\varphi((\overline{\mathfrak{D}_{1u}})^{-1})\varphi((\overline{\mathfrak{D}_u})^{-1}) = [\widetilde{\delta}'_u][\widetilde{\delta}_{1u}][\widetilde{\delta}_{2u}][\widetilde{\delta}_{1u}]^{-1}[\widetilde{\delta}'_u]^{-1},$$
$$[\widetilde{\delta}'_u] = \prod_{s=1}^{n-1}[[\widetilde{\delta}_{1s}][\widetilde{\delta}_{2s}]]$$
(см. (11)). Ясно, что $[\widetilde{\delta}'_u] \in H$, откуда следует $[\widetilde{\delta}_u] \in H$. Теперь из (21) получаем
$$F_{2t} = [\widetilde{\delta}_u]\varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{2t-1}})[\gamma_{r(j)}]^{q_j}\varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{2t-1}})^{-1}[\widetilde{\delta}_u]^{-1} = [\widetilde{\delta}_u]F_{2t-1}[\widetilde{\delta}_u]^{-1} \in H,$$
т. к. $F_{2t-1} \in H$ по предположению индукции.

Пусть $t < v$. Так как $\widetilde{d}_{2t}$ и $\widetilde{d}_{2t+1}$ являются T-антиподами, то $\widetilde{d}_{2t} = V^{-1}(d_{2t})$ и $\widetilde{d}_{2t+1} = V^{-1}(d_{2t+1})$ являются $V \circ T$-антиподами. Тогда с использованием рассуждений, аналогичных тем, что использовались при доказательстве равенства $[\omega_l^{(i+1)}] = [\omega_j]$ при рассмотрении случая I), нетрудно показать, что $F_{2t+1} = F_{2t} \in H$. Итак, показали, что $F_t \in H$, $t = 1, \ldots, 2s$, следовательно, $[\omega_l^{(i+1)}] \in H$, и тогда $[\omega_s^{(i+1)}] \in H$, $s = 1, \ldots, k$, т. е. III) доказано.

Осталось показать, что $[\widetilde{\delta}^{(i+1)}]$ представимо в виде
$$[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = \prod_{s=1}^{\rho}[[\widetilde{\delta}_{1s}^{(i+1)}], [\widetilde{\delta}_{2s}^{(i+1)}]],$$
где $[\widetilde{\delta}_{ts}^{(i+1)}] \in H$, $t = 1, 2$, $s = 1, \ldots, \rho$.

Упорядочим $\widetilde{d}_s$, $s = 1, \ldots, 2v$, по величине мест вхождения, т. е. будем считать, что для некоторой перестановки индексов P имеют место неравенства $|\widetilde{d}_{P(s)}| < |\widetilde{d}_{P(t)}|$, $1 \le s < t \le 2v$. Пусть $P(k') = 1$, $P(k'') = 2v$. Так как по предположению $|\widetilde{d}_1| > |\widetilde{d}_{2v}|$, то $k' > k''$. Имеем $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 x_{r(j)} \mathfrak{L}_2 x^{-1}_{r(j)} \mathfrak{L}_3$, где
$$\mathfrak{L}_1 = \prod_{s=1}^{l-1}(\mathfrak{A}_s x^{1-q_s}_{r(s)})\mathfrak{A}'_l, \quad \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{A}''_l \prod_{s=l+1}^{j}(\mathfrak{A}_s x^{1-q_s}_{r(s)}), \quad \mathfrak{L}_3 = \mathfrak{A}''_{j+1}\prod_{s=j+1}^{k}(x^{1-q_s}_{r(s)}\mathfrak{A}_{s+1}).$$
Используя (15), получаем, что $[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = \varphi(\overline{\mathfrak{L}'})$, где $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1 x^{1-q_j}_{r(j)}\mathfrak{L}_2 x^{q_j-1}_{r(j)}\mathfrak{L}_3$.

Пусть
$$\{d_{P(1)}, d_{P(1)}, \ldots, d_{P(2v)}\} = \mathfrak{B}_1 * x^{\varepsilon_1}_{r(j)} * \mathfrak{B}_2 * x^{\varepsilon_2}_{r(j)} * \cdots * \mathfrak{B}_{2v} * x^{\varepsilon_{2v}}_{r(j)} * \mathfrak{B}_{2v+1}, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$
Покажем, что $\mathfrak{L}'$ эквивалентно $\mathfrak{L}^* = \prod_{s=1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x^{\varepsilon_s(q_j-1)}_{r(j)})\mathfrak{B}_{2v+1}$. Так как
$$\{d', d\} = \mathfrak{L}_1 * x_{r(j)} * \mathfrak{L}_2 * x^{-1}_{r(j)} * \mathfrak{L}_3,$$
$$\{d_{2v}, d_1\} = \mathfrak{B}^{(1)} * x_{r(j)} * \mathfrak{B}^{(2)} * x^{-1}_{r(j)} * \mathfrak{B}^{(3)},$$
$$\{\widetilde{d}_{2v}, \widetilde{d}_1\} = \widetilde{\mathfrak{B}}^{(1)} * x_{r(j)} * \widetilde{\mathfrak{B}}^{(2)} * x^{-1}_{r(j)} * \widetilde{\mathfrak{B}}^{(3)},$$
где
$$\mathfrak{B}^{(1)} = \prod_{s=1}^{k''-1}(\mathfrak{B}_s x^{\varepsilon_s}_{r(j)})\mathfrak{B}_{k''}, \quad \mathfrak{B}^{(2)} = \prod_{s=k''+1}^{k'-1}(\mathfrak{B}_s x^{\varepsilon_s}_{r(j)})\mathfrak{B}_{k'}, \quad \mathfrak{B}^{(3)} = \prod_{s=k'+1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x^{\varepsilon_s}_{r(j)})\mathfrak{B}_{2v+1},$$

то $\mathfrak{L}_j = U(\widetilde{\mathfrak{B}}^{(j)}) \sim V(\widetilde{\mathfrak{B}}^{(j)}) = \mathfrak{B}^{(j)}$, $j = 1,2,3$. Следовательно, $\mathfrak{L}' \sim \mathfrak{B}^{(1)} * x_{r(j)}^{1-q_j} * \mathfrak{B}^{(2)} * x_{r(j)}^{q_j-1} * \mathfrak{B}^{(3)}$. Покажем, что

$$\mathfrak{B}^{(1)} \sim \widehat{\mathfrak{B}}^{(1)} = \prod_{s=1}^{k''-1}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s(1-q_j)})\mathfrak{B}_{k''},$$

$$\mathfrak{B}^{(2)} \sim \widehat{\mathfrak{B}}^{(2)} = \prod_{s=k''+1}^{k'-1}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s(1-q_j)})\mathfrak{B}_{k'},$$

$$\mathfrak{B}^{(3)} \sim \widehat{\mathfrak{B}}^{(3)} = \prod_{s=k'+1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s(1-q_j)})\mathfrak{B}_{2v+1}.$$

Рассмотрим для примера первое слово $\mathfrak{B}^{(1)}$. Пусть $d'_{P(j)}$ — такое вхождение в $\mathfrak{B}^{(1)}$, что $|d'_{P(j)}| = |d_{P(j)}|$, $j = 1,\dots,k''$. Тогда $\{d'_{P(1)},\dots,d'_{P(k'')}\} = \mathfrak{B}_1 * x_{r(j)}^{\varepsilon_1} * \mathfrak{B}_2 * \dots * x_{r(j)}^{\varepsilon_{k''-1}} * \mathfrak{B}_{k''}$. Так как $d_{P(k'')}$ является T-несократимым, то для любого i, $1 \le i \le k''-1$, существует $l = l(i)$, $1 \le l(i) \le k-1$, такое, что $d_{P(i)}$ и $d_{P(l)}$ — T-антиподы. Тогда существует такое индуцированное сокращение $T^{(1)}$ слова $\mathfrak{B}^{(1)}$, что $d'_{P(i)}$ и $d'_{P(l)}$ — T-антиподы. Поэтому $\mathfrak{B}^{(1)}$ эквивалентно слову $\prod\limits_{s=1}^{k''-1}(\mathfrak{B}_s\mathfrak{H}_s)\mathfrak{B}_{k''}$, где слова $\mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{H}_l$ при $l = l(i)$ взаимно обратны. В частности, беря в качестве $\mathfrak{H}_s$ слово $x_{r(j)}^{\varepsilon_s(q_j-1)}$, получаем, что $\mathfrak{B}^{(1)} \sim \widehat{\mathfrak{B}}^{(1)}$.

Поэтому $\mathfrak{L}' \sim \widehat{\mathfrak{B}}^{(1)} x_{r(j)}^{1-q_j}\widehat{\mathfrak{B}}^{(2)} x_{r(j)}^{q_j-1}\widehat{\mathfrak{B}}^{(3)} = \mathfrak{L}^*$. Так как

$$\mathfrak{D} = \prod_{s=1}^{2v}(\mathfrak{B}_s x_{r(j)}^{\varepsilon_s})\mathfrak{B}_{2v+1} = \prod_{s=1}^{\rho}(\mathfrak{D}_{1t}\mathfrak{D}_{2s}\mathfrak{D}_{1s}^{-1}\mathfrak{D}_{2s}^{-1}),$$

то вхождения d_t, $t = 1,\dots,2v$, индуцируют такие вхождения $d_1^{r,s},\dots,d_t^{r,s}$ в слова $\mathfrak{D}_{rs}$, $r = 1,2$, $s = 1,\dots,\rho$, что

$$\{d_1^{r,s},\dots,d_t^{r,s}\} = \mathfrak{D}_{rs}^1 * x_{r(j)}^{\varepsilon_1} * \mathfrak{D}_{rs}^2 * x_{r(j)}^{\varepsilon_2} * \mathfrak{D}_{rs}^3 * \dots * \mathfrak{D}_{rs}^{t+1}$$

($\varepsilon_i = \pm 1$ и t зависят, вообще говоря, от r и s). Пусть

$$\mathfrak{D}_{rs}^* = \prod_{w=1}^{t}(\mathfrak{D}_{rs}^w x_{r(j)}^{\varepsilon_w(1-q_j)})\mathfrak{D}_{rs}^{t+1}.$$

Тогда нетрудно видеть, что $\mathfrak{L}^* = \prod\limits_{s=1}^{\rho}\left(\mathfrak{D}_{1s}^*\mathfrak{D}_{2s}^*(\mathfrak{D}_{1s}^*)^{-1}(\mathfrak{D}_{2s}^*)^{-1}\right)$. Значит, $[\widetilde{\delta}^{(i+1)}] = \varphi(\overline{\mathfrak{L}}') = \varphi(\overline{\mathfrak{L}}^*) = \prod\limits_{s=1}^{\rho}[[\widetilde{\delta}_{1s}^{(i+1)}],[\widetilde{\delta}_{2s}^{(i+1)}]]$, где $[\widetilde{\delta}_{rs}^{(i+1)}] = \varphi(\overline{\mathfrak{D}_{rs}^*})$, $r = 1,2$, $s = 1,\dots,\rho$.

Осталось показать, что $[\widetilde{\delta}_{rs}^{(i+1)}] \in H$, $r = 1,2$, $s = 1,\dots,\rho$. Рассмотрим случай $r = 1$ (случай $r = 2$ рассматривается аналогично). Так как $d_q^{1,s}$ соответствует некоторому вхождению d_σ, $\sigma = \sigma(q)$, то

$$\prod_{w=1}^{s-1}(\mathfrak{D}_{1w}\mathfrak{D}_{2w}\mathfrak{D}_{1w}^{-1}\mathfrak{D}_{2w}^{-1})\prod_{w=1}^{q-1}(\mathfrak{D}_{1s}^w x_{r(j)}^{\varepsilon_w})\mathfrak{D}_{1s}^q = \mathfrak{D}'_\sigma. \tag{22}$$

Имеем

$$[\widetilde{\delta}_{1s}^{(i+1)}][\widetilde{\delta}_{rs}]^{-1} = \prod_{q=1}^{t}[\gamma'_q][\gamma_{r(j)}]^{-\varepsilon_q q_j}[\gamma'_q]^{-1},$$

где $[\gamma'_q] = \prod\limits_{w=1}^{q-1}([\delta_{1s}^w][\gamma_{r(j)}]^{\varepsilon_w})[\delta_{1s}^q]$, $[\delta_{1s}^w] = \varphi(\overline{\mathfrak{D}}_{1s}^w)$. Поэтому

$$\prod_{w=1}^{s-1}\left([[\widetilde{\delta}_{1w}],[\widetilde{\delta}_{2w}]]\right)[\widetilde{\delta}_{1s}^{(i+1)}][\widetilde{\delta}_{1s}]^{-1} = \prod_{q=1}^{t}\left([\delta'_q][\gamma_{r(j)}]^{-\varepsilon_q q_j}[\delta'_q]^{-1}\right)\prod_{w=1}^{s-1}[[\widetilde{\delta}_{1w}],[\widetilde{\delta}_{2w}]], \tag{23}$$

где $[\delta'_q] = \prod\limits_{w=1}^{s-1} [[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]][\gamma'_q]$. В силу (22) $[\delta'_q] = \varphi(\overline{\mathfrak{D}'_{\sigma(q)}})$. Учитывая равенство

$$[\delta'_q][\gamma_{r(j)}]^{-\varepsilon_q q_j}[\delta'_q]^{-1} = \left(\varphi(\overline{\mathfrak{D}}'_{\sigma(q)})[\gamma_{r(j)}]^{q_j}\varphi(\overline{\mathfrak{D}}'_{\sigma(q)})^{-1}\right)^{-\varepsilon_q} = (F_{\sigma(q)})^{-\varepsilon_q},$$

из (23) получаем, что

$$[\widetilde{\delta}_{1s}^{(i+1)}] = \left(\prod_{w=1}^{s-1} [[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]]\right)^{-1} \prod_{q=1}^{t} (F_{\sigma(q)})^{-\varepsilon_q} \prod_{w=1}^{s-1} [[\widetilde{\delta}_{1w}], [\widetilde{\delta}_{2w}]] \in H,$$

т. к. $[\widetilde{\delta}_{rs}] \in H$, $r = 1, 2$, $s = 1, \ldots, \rho$, $F_s \in H$, $s = 1, \ldots, 2v$. $\square$

6. Представление элементов коммутанта в виде произведения минимально возможного числа коммутаторов. Из теоремы 3 следует, что для получения всех римановых поверхностей $\sigma \in \Sigma^C(\beta)$ заданного рода ρ с $n_\sigma(\infty_N) = 0$ следует перебрать все базисные наборы $\mathbf{K}$ степени ρ и в случае, когда $\rho > 0$, для каждого элемента $[\delta_{\mathbf{K}}] = \varphi(\overline{d}_{\mathbf{K}})$ перебрать все возможные подгруппы H_1 в $\pi_1(A, Q)$, обладающие свойством: существует такое представление элемента $[\delta_{\mathbf{K}}]$ в виде произведения $[\delta_{\mathbf{K}}] = \prod\limits_{j=1}^{\rho} [[\delta_{1j}], [\delta_{2j}]]$, что элементы $[\delta_{1j}]$, $[\delta_{2j}]$, $j = 1, \ldots, \rho$, порождают H_1. В случае $\rho = 1$ вопрос полностью решается чисто алгебраическим способом.

Теорема 4 (об обрамленном коммутаторе). *В свободной группе X элемент x является коммутатором тогда и только тогда, когда слово $\mathfrak{A}$ — приведенную запись элемента x через образующие $x_1, \ldots, x_m, \ldots$ можно представить в виде*[1]

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{H}\{\mathfrak{C}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)\mathfrak{C}^{-1}\}\{\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_1^{-1}\mathfrak{A}_2^{-1})\mathfrak{D}^{-1}\}\mathfrak{H}^{-1}, \tag{24}$$

где некоторые из слов $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ могут быть пустыми. Более того, если $x = [y, z]$, то представление (24) *можно подобрать таким образом, что подгруппа в X, порожденная элементами y_1 и z_1, соответствующими словам $\mathfrak{H}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{H}^{-1}$ и $\mathfrak{H}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{H}^{-1}$, совпадает с подгруппой, порожденной элементами y и z. При этом $x = [y_1, z_1]$.*

Теорема 4 — это по существу переформулировка одной теоремы из [5]. В случае $\rho > 1$ можно воспользоваться результатом Каллера [3] (см. также [4]), который сформулируем в удобной для нас форме.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \{r_{1k}, r_{2k}\} = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 2n\}$ — некоторое разбиение множества первых $(2n)$ натуральных чисел на пары. Обозначим это разбиение через $\mathcal{M}$. Будем говорить, что разбиение слова $\mathfrak{A}$ на подслова $\mathfrak{A} = \prod\limits_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ есть *разбиение типа* $\mathcal{M}$, если $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_r^{-1}$ для любого k, $1 \leq k \leq n$. Пусть $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{r_{1k}, r_{2k}\}$ — некоторый тип разбиения. Рассмотрим на плоскости замкнутый многоугольник Π со сторонами $a_1, \ldots, a_{2n}$ и отображение склеивания h, отождествляющее стороны $a_{r_{1k}}$ и $a_{r_{2k}} = \mathfrak{A}_{r_{1k}}^{-1}$, $k = 1, \ldots, n$. В результате склеивания получаем компактную риманову поверхность Π' рода ρ. Назовем Π' *римановой поверхностью, соответствующей типу* $\mathcal{M}$, а число ρ — *родом типа* $\mathcal{M}$. Пусть $\partial\Pi$ — граница Π, кривая γ_i обходит сторону a_i многоугольника Π в положительном направлении, P — точка стыка сторон a_1 и a_{2n}.

Так как для любой точки $x_0 \in \Pi' \setminus h(\partial\Pi)$ образ границы $h(\partial\Pi)$ является сильным деформационным ретрактом для $\Pi' \setminus \{x_0\}$, то любой элемент ω из фундаментальной группы $\pi_1(\Pi' \setminus \{x_0\}, P)$ проколотой поверхности $\Pi' \setminus \{x_0\}$ в точке P обладает представителем вида $\prod\limits_{i=1}^{l} (h(\gamma_{p(i)}))^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Пусть приведенное слово $\mathfrak{A}$ допускает разбиение $\mathfrak{A} = \prod\limits_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ типа $\mathcal{M}$. Сопоставим элементу $\omega \in \pi_1(\Pi' \setminus \{x_0\}, P)$ элемент $g(\omega)$ свободной группы X, представителем которого является слово

[1] Скобки поясняют название теоремы.

$\prod_{i=1}^{l}(h(\gamma_{p(i)}))^{\varepsilon_i}$. Это определение корректно (напр., [7]). Подгруппу $g(\pi_1(\Pi' \setminus \{x_0\}, P))$ в X назовем подгруппой разбиения $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ типа $\mathcal{M}$ и обозначим через $H\Big(\prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i, \mathcal{M}\Big)$. Обозначим через α кривую $h(\gamma_1 \dots \gamma_{2n})$. Теперь сформулируем упомянутый выше результат.

Теорема 5. *Элемент x из коммутатора $[X, X]$ свободной группы X имеет степень ρ тогда и только тогда, когда слово $\mathfrak{A}$ — приведенная запись элемента x — допускает разбиение типа $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ имеет род ρ, и не допускает разбиений меньшего рода. Если, кроме того, $x = \prod_{i=1}^{\rho}[y_{1i}, y_{2i}]$, то разбиение $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i$ типа $\mathcal{M}$ можно выбрать таким образом, чтобы подгруппа $H\Big(\prod_{i=1}^{2n} \mathfrak{A}_i, \mathcal{M}\Big)$ совпадала с подгруппой в X, порожденной элементами y_{1i}, y_{2i}, $i = 1, \dots, \rho$. Более того, существуют такие образующие ω_{ji} группы $\pi_1(\Pi' \setminus \{x_0\}, P)$, что $x = \prod_{i=1}^{\rho}[g(\omega_{1i}), g(\omega_{2i})]$; при этом $x = g([h(\alpha)])$.*

В силу теоремы 5 алгебраическая задача сводится к топологической, которая может быть легко решена чисто комбинаторными методами.

Литература

1. Насыров С.Р. *Разветвленные накрытия римановых поверхностей с заданной проекцией края* // Алгебра и анализ. – 1993. – Т. 5. – № 3. – С. 212–237.
2. Nasyrov S.R. *Generalized Riemann–Hurwitz formula* // Rev. Romain Acad. Sci. – 1995. – V. 40. – № 2. – P. 177–194.
3. Culler M. *Using surfaces to solve equations in free groups* // Topology. – 1981. – V. 20. – P. 133-145.
4. Ольшанский А.Ю. *Диаграммы гомоморфизмов групп поверхностей* // Сиб. матем. журн. – 1989. – Т. 30. – № 6. – С. 152–171.
5. Мальцев А.И. *Об уравнении $zxyx^{-1}y^{-1}z^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ в свободной группе* // Алгебра и логика. – 1962. – Т. 1. – № 5. – С. 45–50.
6. Насыров С.Р. *Построение конечных римановых поверхностей по граничной кривой* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 6. – С. 1311–1314.
7. Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп.* – М.: Мир, 1980. – 447 с.

Казанский государственный университет

Поступила 03.11.2003