ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.946

М.Ю. ДЕНИСОВА

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ B-БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть E_3^+ — полупространство $x_3 > 0$ евклидова пространства E_3 точек $x = (x_1, x_2, x_3)$, D — симметричная относительно координатной плоскости $x_3 = 0$ область, ограниченная поверхностью Γ. Через D^+ и Γ^+ обозначим соответственно части D и Γ, расположенные в E_3^+. Область D^+ ограничена поверхностью Γ^+ и частью $\Gamma^{(0)}$ координатной плоскости $x_3 = 0$. Поверхность Γ^+ является поверхностью класса $\Lambda_{m,B}$, когда $\Gamma \in \Lambda_m$ [1].

В области D^+ рассматривается уравнение

$$\Delta_B^2 u = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_B = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{x_3}$, $B_{x_3} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{k}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$ — оператор Бесселя, k — любое положительное число.

В работе строятся фундаментальные решения и потенциалы для уравнения (1), вычисляются предельные значения потенциалов на границе Γ^+, основная краевая задача для уравнения (1) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

1. Потенциалы типа простого и двойного слоев

Известно [2], что фундаментальными решениями уравнения (1) с особенностью в начале координат являются функции $q_1(x) = r^{-k-1}$, $q_2(x) = r^{-k+1}$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Для получения фундаментальных решений с особенностью в произвольной точке ξ применим к функциям q_1 и q_2 оператор обобщенного сдвига

$$Q_1(x;\xi) = T_x^\xi q_1(x) = C_k \int_0^\pi \left((x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2 + \xi_3^2 - 2x_3\xi_3\cos\varphi\right)^{\frac{-k-1}{2}} \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi,$$

$$Q_2(x;\xi) = T_x^\xi q_2(x) = C_k \int_0^\pi \left((x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2 + \xi_3^2 - 2x_3\xi_3\cos\varphi\right)^{\frac{-k+1}{2}} \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi,$$

где $C_k = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{k}{2})}$. Используя схему, предложенную в работе [3], нетрудно показать, что фундаментальные решения Q_1 и Q_2 можно представить в виде

$$Q_1(x;\xi) = \frac{C_k (x_3\xi_3)^{\frac{-k-1}{2}}}{2} \frac{1}{r_{x\xi}} + \psi_1(x;\xi), \quad Q_2(x_1;\xi) = \frac{C_k (x_3\xi_3)^{\frac{-k-1}{2}}}{2} r_{x\xi} + \psi_2(x;\xi),$$

где ψ_1 и ψ_2 — регулярные части решений Q_1 и Q_2, $r_{x\xi}$ — расстояние между точками x и ξ.

Так как в точке $\xi^0 \in \Gamma^+$ ($\xi_3^0 > 0$) фундаментальные решения имеют такие же особенности, что и их бигармонические аналоги, то аналогично формулам, приведенным в [1], введем потенциалы, являющиеся решениями уравнения (1)

$$V(x,\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \mu(\xi) K_1 \xi_3^k d\Gamma, \quad W(x,\nu) = \frac{3}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \nu(\xi) K_2 \xi_3^k d\Gamma, \tag{2}$$

с ядрами

$$K_1 = \frac{1}{C_k} Q_1 - \frac{1}{C_k} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial n_\xi^2}, \quad K_2 = \frac{1}{3C_k} \frac{\partial^3 Q_2}{\partial n_\xi^3} - \frac{1}{3C_k} \frac{\partial Q_1}{\partial n_\xi}, \tag{3}$$

где $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ — плотности соответствующих потенциалов, n_ξ — внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке $\xi \in \Gamma^+$, x — переменная точка полупространства E_3^+.

Вычисляя соответствующие производные по внешней нормали, представим ядра (3) потенциалов (2) в виде

$$K_1 = \frac{(x_3\xi_3)^{\frac{-k-1}{2}} \cos^2(\overline{n}_\xi, \overline{r}_{x\xi})}{r_{x\xi}} + \varphi_1, \quad K_2 = \frac{(x_3\xi_3)^{\frac{-k-1}{2}} \cos^3(\overline{n}_\xi, \overline{r}_{x\xi})}{r_{x\xi}^2} + \varphi_2,$$

где $\varphi_1(x;\xi)$, $\varphi_2(x;\xi)$ — регулярные части ядер соответствующих потенциалов.

2. Предельные значения потенциалов типа простого и двойного слоев

Предельные значения потенциала V на Γ^+ равны его прямому значению. Так как в точке $\xi \in \Gamma^+$ при $\xi_3^0 > 0$ ядра потенциалов V и W имеют такие же особенности, как их бигармонические аналоги, то для предельных значений потенциала W и нормальных производных V и W имеют место формулы, аналогичные соотношениям из [1].

Теорема 1. *Пусть μ и ν — непрерывные функции и $\Gamma^+ \in \Lambda_{1,B}$. Тогда справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{x \to \xi_0} W(x, \nu) = \pm N_k \nu(\xi_0) + \overline{W(\xi_0, \nu)}, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to \xi_0} \frac{\partial V(x, \mu)}{\partial n_{\xi_0}} = \mp N_k \mu(\xi_0) + \overline{\frac{\partial V(\xi_0, \mu)}{\partial n_{\xi_0}}}, \tag{5}$$

где $N_k = 3\Gamma(\frac{k+1}{2})/8\Gamma(\frac{k+5}{2})$, $\overline{W(\xi_0, \nu)}$ — прямое значение потенциала $W(x,\nu)$, $\overline{\frac{\partial V(\xi_0,\mu)}{\partial n_{\xi_0}}}$ — прямое значение нормальной производной потенциала $V(x,\mu)$.

Теорема 2. *Если $\Gamma^+ \in \Lambda_{2,B}$ и $\nu(\xi)$ — один раз непрерывно дифференцируемая функция, то предельные значения нормальной производной потенциала W выражаются формулами*

$$\lim_{x \to \xi_0} \frac{\partial W(x, \nu)}{\partial n_{\xi_0}} = \mp \frac{1}{2} \widetilde{\chi}(\xi_0) \nu(\xi_0) + \overline{\frac{\partial W(\xi_0, \nu)}{\partial n_{\xi_0}}}, \tag{6}$$

где $\widetilde{\chi}(\xi_0) = \frac{3((k+1)\chi_2(\xi_0) + \chi_1(\xi_0))}{2(k+1)(k+2)}$, $\chi_1(\xi_0)$ и $\chi_2(\xi_0)$ — максимальная и минимальная кривизны Γ^+ в точке ξ_0, $\overline{\frac{\partial W(\xi_0,\nu)}{\partial n_{\xi_0}}}$ — прямое значение нормальной производной потенциала $W(x,\nu)$.

В теоремах 1 и 2 верхний знак берется для предела изнутри, нижний — для предела извне относительно поверхности Γ^+.

3. Основная краевая задача

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти решение уравнения

$$\Delta_B^2 u = 0 \tag{7}$$

в области D^+, один раз непрерывно дифференцируемое в $\overline{D^+}$ и удовлетворяющее на границе Γ^+ краевым условиям

$$u|_{\Gamma^+} = f_0(\xi), \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_\xi}\right|_{\Gamma^+} = f_1(\xi), \tag{9}$$

где n_ξ — внешняя нормаль к границе Γ^+ в точке ξ.

Теорема 3. *Задача* (7)–(9) *в классе* $C^4(D^+) \cap C^1(\overline{D^+})$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательство проводится с помощью первой формулы Грина для оператора Δ_B^2.

Решение задачи (7)–(9) ищем в виде

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^+} \mu(\xi) K_1 \xi_3^k d\Gamma + \frac{3}{2\pi}\int_{\Gamma^+} \nu(\xi) K_2 \xi_3^k d\Gamma. \tag{10}$$

Здесь плотности μ и ν — пока неопределенные функции. Их найдем из требования, чтобы функция (10) удовлетворяла краевым условиям (8), (9). Подставляя ее в эти граничные условия и учитывая формулы (4)–(6), получаем

$$N_k\nu(\xi_0) = f_0(\xi_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^+} \mu(\xi) K_1 \xi_3^k d\Gamma - \frac{3}{2\pi}\int_{\Gamma^+} \nu(\xi) K_2 \xi_3^k d\Gamma,$$
$$N_k\mu(\xi_0) = -f_1(\xi_0) - \frac{1}{2}\widetilde{\chi}(\xi_0)\nu(\xi_0) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^+} \mu(\xi) K_1 \xi_3^k d\Gamma + \frac{3}{2\pi}\int_{\Gamma^+} \nu(\xi) K_2 \xi_3^k d\Gamma.$$

Система уравнений относительно плотностей μ и ν является системой интегральных уравнений с ядрами со слабой особенностью. Для этой системы справедлива альтернатива Фредгольма, которая сводит вопрос существования решения к вопросу единственности, т. е. нужно доказать, что соответствующая однородная система не имеет ненулевых решений.

Литература

1. Панич О.И. *О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка* // Матем. сб. – 1960. – Т. 50. – № 3. – С. 335–368.
2. Киприянов И.А., Кононенко В.И. *Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 1. – С. 114–129.
3. Weinstein A. *Discontinuous integrals and generalized potential theory* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 63. – P. 342–354.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила 08.06.2000