ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.983

Е.Л. УЛЬЯНОВА

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть H — бесконечномерное комплексное гильбертово пространство и $A : D(A) \subset H \to H$ — самосопряженный полуограниченный дискретный оператор (т. е. оператор $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, является компактным оператором), собственные значения которого $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \cdots$, соответствующие собственным векторам $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$, простые.

С использованием метода подобных операторов [1]–[3] исследуются спектральные свойства возмущенных операторов вида

$$A - B, \quad Bx = \sum_{m=1}^{N} (Ax, a_m) b_m, \quad x \in D(A), \tag{1}$$

где a_m, b_m, $m = 1, \dots, N < \infty$, — наборы векторов из гильбертова пространства H. Такое возмущение B называется относительно конечномерным. Получены оценки собственных значений и собственных векторов операторов вида (1).

В основе метода подобных операторов лежит понятие допустимой тройки $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ (см. [2]). Здесь $\mathfrak{A}$ — пространство допустимых возмущений, которому принадлежит рассматриваемый оператор B, и $J : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $\Gamma : \mathfrak{A} \to \operatorname{End} H$ — два линейных трансформатора (т. е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов).

Пусть n — некоторое натуральное число, $P_n x = (x, e_n) e_n$ — проектор Рисса, соответствующий собственному значению λ_n. В качестве пространства возмущений возьмем линейное многообразие операторов из банахова пространства $L_A(H)$ линейных операторов, подчиненных оператору A и представимых в виде

$$X = X_0 A, \quad X \in \sigma_2(H), \tag{2}$$

где $\sigma_2(H)$ — идеал операторов Гильберта-Шмидта, и таких, что

$$\|P_i X P_j\| \le \operatorname{const} \alpha_i \beta_j \ \forall i, j, \tag{3}$$

ненулевые последовательности $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_j\}$ неотрицательных чисел принадлежат пространству l_2 и выбраны так, чтобы оператор B удовлетворял условию (3). В частности, условие (3) выполнено, если

$$\alpha_i = \left(\sum_{m=1}^{N} |(e_i, a_m)|^2 \right)^{1/2}, \qquad \beta_j = \left(\sum_{m=1}^{N} |(e_i, b_m)|^2 \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Линейное пространство $\mathfrak{A}$ нормируем, положив

$$\|X\|_* = \inf\{c > 0 : \|P_i X_0 P_j\| \le c \alpha_i \beta_j \ \forall i, j\}. \tag{5}$$

Определим линейные трансформаторы $\Gamma_n : \mathfrak{A} \to \operatorname{End} H$ и $J_n : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$

$$J_n X = P_n X P_n + P^n X P^n, \quad X \in \mathfrak{A}, \quad P^n = I - P_n, \quad J = J_n, \tag{6}$$

$$\Gamma X = P_n X S_n - S_n X P_n, \quad X \in \mathfrak{A}, \quad \Gamma = \Gamma_n, \tag{7}$$

где $S_n \in \operatorname{End} H$ определяется на векторах e_k, $k \geq 1$, соотношениями

$$S_n e_n = 0, \quad S_n e_k = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} e_k, \quad k \neq n. \tag{8}$$

Лемма 1. *Тройка* $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ *является допустимой для оператора* A, *если выполнены условия*

$$\gamma_1(n) = \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \alpha_n^2 \beta_j^2 \frac{|\lambda_j|^2}{|\lambda_n - \lambda_j|^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \alpha_j^2 \beta_n^2 \frac{|\lambda_j|^2}{|\lambda_n - \lambda_j|^2} \Big)^{1/2} < \infty, \tag{9}$$

$$\gamma_2(n) = \max\Big\{ \alpha_n \beta_n \sup_{j \neq n} \frac{|\lambda_j|}{|\lambda_n - \lambda_j|}, \ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \alpha_j \beta_j \frac{|\lambda_j|^2}{|\lambda_n - \lambda_j|^2} \Big\} < \infty. \tag{10}$$

Доказательство. Проверим аксиомы допустимой тройки для $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$. Полнота пространства $\mathfrak{A}$ следует из полноты пространства $\sigma_2(H)$, непрерывности нормы и неравенства

$$\|X_0\|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \|P_i X_0 P_j\|^2 \leq \|X\|_*^2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_i^2 \beta_j^2. \tag{11}$$

Отсюда, поскольку

$$\|Xx\|^2 = \|XAx\|^2 \leq \|X_0\|_2^2 \|Ax\| \leq \|X_0\|_2^2 (\|Ax\| + \|x\|) \quad \forall x \in D(A),$$

следует непрерывное вложение $\mathfrak{A}$ в $L_A(H)$.

Покажем теперь, что $\Gamma X \in \operatorname{End}(H)$ и оценим норму трансформатора Γ. Для этого отметим, что имеет место равенство $\|\Gamma X x\|^2 = \|P_n X S_n x\|^2 + \|S_n X P_n x\|^2$. Оценим каждое слагаемое в правой части этого равенства. Из равенства Парсеваля, учитывая соотношение (9) и свойства операторов из $\mathfrak{A}$, имеем

$$\|P_n X_0 S_n x\|^2 = \Big(\sum_{j \geq 1,\, j \neq n} |(x, e_j)| (|\lambda_j| / |\lambda_n - \lambda_j|) \|P_n X_0 P_j\| \Big)^2.$$

Отсюда в силу неравенства Коши и определения нормы в $\mathfrak{A}$ получаем

$$\|P_n X_0 S_n\|^2 \leq \sum_{j \geq 1,\, j \neq n} \alpha_n^2 \beta_j^2 (|\lambda_j| / |\lambda_n - \lambda_j|)^2 \|X\|_*^2.$$

Для второго слагаемого, поскольку $P_n x = (x, e_n) e_n$, в силу соотношений (2), (3), (8) и равенства $P^n = I - P_n$ получаем

$$\|S_n X P_n x\|^2 \leq \sum_{j \geq 1,\, j \neq n} \alpha_j^2 \beta_n^2 (|\lambda_j| / |\lambda_n - \lambda_j|)^2 \|X\|_*^2,$$

следовательно, ΓX — ограниченный оператор и справедлива оценка

$$\|\Gamma X\| \leq \Gamma_1(n) \|X\|_*. \tag{12}$$

Докажем теперь, что операторы $X \Gamma Y$ и $\Gamma Y X$ принадлежат пространству $\mathfrak{A}$ и справедливо неравенство

$$\max\{\|X \Gamma Y\|_*, \|\Gamma Y X\|_*\} \leq \gamma_2(n) \|X\|_* \|Y\|_*. \tag{13}$$

Для этого покажем, что для каждого из этих операторов имеет место неравенство (3) с константой $\Gamma_2(n)$. Поскольку $X \Gamma Y = X_0 A \Gamma Y_0 A$, то, используя формулу для Γ, получаем соотношения

$P_jX_0A\Gamma Y_0P_i = P_jX_0AP_nY_0S_nP_i$, $i \neq n$; $P_jX_0A\Gamma Y_0P_i = P_jX_0AS_nY_0P_n$, $i = n$. Оценим норму каждого оператора в правой части последнего равенства. Из соотношений (3), (8) получаем

$$\|P_jX_0AP_nY_0S_nP_i\| \leq \sup_{i\neq n}(|\lambda_n|/|\lambda_n - \lambda_i|)\beta_n\alpha_n\|X\|_*\|Y\|_*\alpha_j\beta_i.$$

Аналогично, используя равенство Парсеваля, соотношения (3), (8), имеем

$$\|P_jX_0AS_nY_0P_n\| \leq \sum_{k\geq 1,\, k\neq n} \alpha_k\beta_k(|\lambda_k|/|\lambda_n - \lambda_k|)^2\|X\|_*\|Y\|_*\alpha_j\beta_n.$$

Таким образом, получена оценка для нормы оператора $X\Gamma Y$. Аналогично получается оценка для нормы оператора ΓYX.

Включение $\mathrm{Ran}(\Gamma X) \subset D(A)$, $X \in \mathfrak{A}$, следует из вида оператора ΓX. В силу соотношения (8) непосредственно подстановкой проверяется, что

$$A\Gamma X - \Gamma XA = P_nXS_n(\lambda_nI - A) + (\lambda_nI - A)S_nXP_n = P_nXP + PXP_n = X - JX. \quad \square$$

Итак, $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка. Рассмотрим возмущенный оператор $A - B$ и выпишем условия его подобия оператору вида $A - JX$, где $X \in \mathfrak{A}$. Оператор преобразования подобия будем искать в виде $U = I + \Gamma X$. Учитывая, что J является проектором, получаем уравнение для $X \in \mathfrak{A}$

$$X = B\Gamma X - \Gamma XJB - \Gamma XJ(B\Gamma X), \quad X \in \mathfrak{A}. \tag{14}$$

Пространство возмущений является прямой суммой подпространств вида $\mathfrak{A}_{ij} = \{Q_iXQ_j : X \in \mathfrak{A}\}$, $i, j = 1, 2$, $Q_1 = P_n$, $Q_2 = P^n$. Уравнение (14) перепишем для операторных блоков $X_{ij} = Q_iXQ_j$, $i, j = 1, 2$, оператора $X \in \mathfrak{A}$

$$X_{11} = B_{12}\Gamma X_{21} + B_{11}, \tag{15}$$
$$X_{21} = B_{22}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{11} - (\Gamma X_{21})B_{12}(\Gamma X_{21}) + B_{21}, \tag{16}$$
$$X_{22} = B_{21}\Gamma X_{12} + B_{22}, \tag{17}$$
$$X_{12} = B_{11}\Gamma X_{12} - (\Gamma X_{12})B_{12} - (\Gamma X_{12})B_{21}(\Gamma X_{12}) + B_{21}. \tag{18}$$

Рассмотрим нелинейные операторы $F_{ij} : \mathfrak{A}_{ij} \to \mathfrak{A}_{ij}$ ($i = 2$, $j = 1$ или $i = 1$, $j = 2$), задаваемые правыми частями уравнений (16) и (18) соответственно.

Лемма 2. *Пусть $n \geq 1$ — некоторое натуральное число такое, что выполнено условие*

$$\varepsilon = \gamma(n)\|B\|_* < 1/4, \quad \gamma(n) = \max\{\gamma_1(n), \gamma_2(n)\}. \tag{19}$$

Тогда оператор $A - B$, $B \in \mathfrak{A}$, подобен оператору $A - JX^*$, оператор преобразования подобия имеет вид

$$U = I + \Gamma X^*, \quad X^* = X_{11}^* + X_{12}^* + X_{21}^* + X_{22}^*, \tag{20}$$

X^* — *решение уравнения* (14), *а* X_{ij}^*, $i, j = 1, 2$, — *решение систем* (16)–(18).

Доказательство. Из проведенных рассуждений следует, что отображение $F_{ij} : \mathfrak{A}_{ij} \to \mathfrak{A}_{ij}$ ($i = 2$, $j = 1$ или $i = 1$, $j = 2$) является сжимающим в шаре

$$S_{ij} = \{Y \in \mathfrak{A}_{ij} : \|Y - B_{ij}\|_* \leq r\|B_{ij}\|_*\},$$
$$r = \varepsilon(4 + 2\varepsilon)/(1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 + (1 - 4\varepsilon)^{1/2}),$$

с константой сжатия $q = 1 - (1 - 4\varepsilon)^{1/2}$ и переводит его в себя. Поэтому по теореме Банаха ([4], с. 605) оно имеет в этом шаре единственную неподвижную точку X_{ij}^* (т. е. уравнения (17) и (19) имеют единственное решение) и справедлива оценка

$$\|X_{ij}^* - F_{ij}^k(0)\|_* \leq (q^k/(1 - q))\|B_{ij}\|_*, \quad k \geq 1, \quad F_{ij}(0) = B_{ij}. \tag{21}$$

Непрерывная обратимость оператора U следует из неравенства (12) и свойства решения уравнений (16) и (18). $\square$

Приведем теперь оценки собственных значений и собственных векторов оператора $A - B$.

Теорема. *Пусть для некоторого натурального* $n \geq 1$ *выполнено условие* (19). *Тогда имеют место оценки*

$$|\bar{\lambda}_n - \lambda_n + (Be_n, e_n)| \leq |\lambda_n|\beta_n\alpha_n\gamma_2(n)\|B_{21}\|_*\|B_{12}\|_*/(1 - 4\gamma_2(n)\|B\|_*)^{1/2}, \tag{22}$$

$$\Big\|\bar{e}_n - e_n + \sum_{j\geq 1,\, j\neq n}(Be_n, e_j)Se_j\Big\| \leq$$

$$\leq 4|\lambda_n|\beta_n\gamma_2(n)\|B_{21}\|_*\|B\|_*/(1 - 4\gamma_2(n)\|B\|_*)^{1/2}\Big(\sum_{j\geq 1,\, j\neq n}(|\lambda_j|/|\lambda_n - \lambda_j|)^2\Big)^{1/2}. \tag{23}$$

Доказательство. Из подобия оператора $A - B$ оператору $A - JX^*$ следует $\bar{e}_n = (I - \Gamma X^*)e_n$ и $\bar{\lambda}_n = ((A - X_{11}^*)e_n, e_n)$. Отсюда, учитывая вид решения X^* и трансформатора Γ, получаем

$$|\bar{\lambda}_n - \lambda_n + (Be_n, e_n)| \leq \|B_{12}\Gamma B_{21}e_n\| + \|B_{12}\Gamma(X_{21}^* - B_{21})e_n\|, \tag{24}$$

$$\|\bar{e}_n - e_n + S_nB_{21}e_n\| = \|S_n(X_{21}^* - B_{21})e_n\|. \tag{25}$$

Из неравенств (24), (13), (21) и вида константы сжатия q следует оценка (22).

Используя равенство Парсеваля и соотношения (3), (8), (21), получаем

$$\|S_n(X_{21}^* - B_{21})e_n\| \leq (\beta_n\lambda_n q/(1 - q))\Big(\sum_{j\geq 1,\, j\neq n}(|\lambda_j|/|\lambda_n - \lambda_j|)^2\Big)^{1/2}\|B_{21}\|_*.$$

Окончательная оценка следует из соотношения (25) и вида константы сжатия q. $\square$

Литература

1. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ линейных операторов.* Учеб. пособие. – Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та, 1987. – 164 с.
2. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58. – № 4. – С. 3–32.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы.* Т. 3. – М.: Мир, 1974. – 661 с.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Воронежский государственный университет

Поступила
02.02.1995