ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 512.541

М.В. ЕРЕМИНА, П.А. КРЫЛОВ

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП КАК НЕТЕРОВ МОДУЛЬ НАД КОЛЬЦОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Известна важная роль тензорного произведения в математике. В частности, исключительно полезны его модульные свойства. Имеется много результатов о строении группы $A \otimes C$ (A и C — абелевы группы), гомологических ее свойствах ([1], гл. 10). Меньше внимания уделялось строению тензорного произведения как модуля. Группа $A \otimes C$ есть левый модуль над кольцом эндоморфизмов $E(A)$ группы A. Можно поставить вопрос об изучении этого модуля. Сама группа A также является левым $E(A)$-модулем, причем существует естественный изоморфизм $E(A)$-модулей $A \otimes Z \cong A$. Поэтому исследование тензорного произведения как модуля над кольцом эндоморфизмов включает известную задачу описания групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов [2].

Естественно обратиться к условиям конечности для $E(A)$-модуля $A \otimes C$. В данной статье характеризация групп A и C таких, что $E(A)$-модуль $A \otimes C$ нетеров, по существу сведена к случаям, когда A не имеет кручения, а $C \cong Z$ либо $C \cong Z(p)$.

Поскольку $A \otimes Z \cong A$, то первый случай равносилен изучению групп без кручения как нетеровых модулей над своими кольцами эндоморфизмов. Заметим, что подмодули $E(A)$-модуля A — это в точности вполне характеристические подгруппы группы A. Следовательно, нетеровость этого модуля эквивалентна нетеровости решетки вполне характеристических подгрупп группы A.

Везде p обозначает простое число, N — множество натуральных чисел, Z — группа целых чисел, $Z(p^k)$ — циклическая группа порядка p^k, $Z(p^\infty)$ — квазициклическая группа. Все рассматриваемые группы абелевы. Пусть A — группа, тогда $r(A)$ — ее ранг, $r_p(A)$ — p-ранг, где $r_p(A) = r(A/pA)$. Далее, $T(A)$ — периодическая часть, A_p — p-компонента группы A ([1], с. 56), $\overline{A} = A/T(A)$. При $A_p \neq 0$ говорим, что p относится к A. Для $n \in N$ полагаем $p^nA = \{p^nx \mid x \in A\}$ и $A[p^n] = \{x \in A \mid p^nx = 0\}$. Если $a \in A$, то $o(a)$ и $h(a)$ — соответственно порядок и высота элемента a в A. $\bigoplus\limits_n A$ — прямая сумма n экземпляров группы A.

1. $E(A)$-модули $A \otimes Z$ и $A \otimes Z(p)$

Используемые в статье сведения о нетеровых модулях и тензорных произведениях содержатся в ([1], гл. 10; [3], § 1.4, гл. 5). Напомним только следующие факты.

Пусть A — левый модуль над некоторым кольцом R (у нас обычно $R = E(A)$), C — группа. Тогда $A \otimes C$ — левый R-модуль. Точные последовательности R-модулей $0 \to B \to A \to D \to 0$ и групп $0 \to E \to C \to G \to 0$ индуцируют точные последовательности левых R-модулей $B \otimes C \to A \otimes C \to D \otimes C \to 0$ и $A \otimes E \to A \otimes C \to A \otimes G \to 0$ соответственно. Если B — сервантный подмодуль в A, а E — сервантная подгруппа в C, то можно считать, что $B \otimes C$ и $A \otimes E$ — сервантные подмодули в $A \otimes C$ ([1], теорема 60.4). Имеют также место естественные изоморфизмы R-модулей $A \otimes Z \cong A$ и $A \otimes Z(p^k) \cong A/p^kA$. Мы будем отождествлять соответствующие изоморфные объекты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 00-01-00876.

Замечание 1.1. Пусть $h : S \to R$ — гомоморфизм колец, M — левый R-модуль. Имеем притягивающий левый S-модуль $sm = h(s)m$, где $s \in S$, $m \in M$ ([4], с. 523). Всякий R-подмодуль в M будет S-подмодулем. Если h сюръективен, то R-подмодули и S-подмодули в M совпадают. Пусть C — некоторая группа. Тогда левый R-модуль $M \otimes C$ является, очевидно, притягивающим S-модулем. Притягивающие модули встретятся у нас в такой ситуации. Предположим, что дана группа $A = D \oplus K$, где D — вполне характеристическое прямое слагаемое. Пусть $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{smallmatrix}\right)$ — представление эндоморфизма $\alpha \in E(A)$ матрицей относительно разложения $A = D \oplus K$. Сопоставления $\alpha \to \alpha_{11}$, $\alpha \to \alpha_{22}$ являются сюръективными гомоморфизмами колец $E(A) \to E(D)$ и $E(A) \to E(K)$ соответственно. Следовательно, имеем притягивающие $E(A)$-модули D и K, $D \otimes C$ и $K \otimes C$. Использование притягивающих модулей значительно сократит доказательства.

Следствие 1.1. Пусть $A = D \oplus K$, где D — вполне характеристическая подгруппа. $E(A)$-модуль $A \otimes C$ нетеров тогда и только тогда, когда нетеровы $E(D)$-модуль $D \otimes C$ и $E(K)$-модуль $K \otimes C$.

Доказательство. Разложения $A = D \oplus K$ и $A \otimes C = (D \otimes C) \oplus (K \otimes C)$ считаем, как в замечании 1.1, разложениями притягивающих $E(A)$-модулей. Нетеровость $E(A)$-модуля $A \otimes C$ равносильна нетеровости $E(A)$-модулей $D \otimes C$ и $(A \otimes C)/(D \otimes C)$. Но $(A \otimes C)/(D \otimes C)$ и $K \otimes C$ изоморфны как $E(A)$-модули. Поэтому нетеровость $E(A)$-модуля $A \otimes C$ эквивалентна нетеровости $E(A)$-модулей $D \otimes C$ и $K \otimes C$. Нетеровость первого из них эквивалентна его нетеровости как $E(D)$-модуля, второго — как $E(K)$-модуля (замечание 1.1).

Группа A, являющаяся нетеровым $E(A)$-модулем, называется эндонетеровой. Нетеровость $E(A)$-модуля $A \otimes Z$ равносильна эндонетеровости группы A. В [5] и [6] описаны эндонетеровы группы без кручения конечного ранга.

Предложение 1.1 ([7], теорема 1.2). *Группа A эндонетерова тогда и только тогда, когда $A = B \oplus C$, где B — ограниченная группа, а C — эндонетерова группа без кручения.*

Следствие 1.2. $E(A)$-модуль A_p нетеров тогда и только тогда, когда A_p — ограниченная группа. В таком случае $A = A_p \oplus H$ для некоторой группы H.

Доказательство. Предположим, что A_p — нетеров $E(A)$-модуль. Имеем гомоморфизм ограничения $E(A) \to E(A_p)$. Поэтому всякий $E(A_p)$-подмодуль в A_p будет $E(A)$-модулем (замечание 1.1), откуда A_p — нетеров $E(A_p)$-модуль. По предложению 1.1 A_p — ограниченная группа. Таким образом, $A = A_p \oplus H$ для некоторой подгруппы H. Обратно, пусть $A = A_p \oplus H$, где A_p — ограниченная группа. Ввиду предложения 1.1 A_p — нетеров $E(A_p)$-модуль и, следовательно, нетеров $E(A)$-модуль.

Обратимся теперь к $E(A)$-модулю $A \otimes Z(p)$. Для обозначения этого модуля будем писать как $A \otimes Z(p)$, так и A/pA. Нетеровость $E(A)$-модуля A/pA равносильна нетеровости решетки вполне характеристических подгрупп группы A, содержащих подгруппу pA. В связи с этим докажем прежде одну теорему, представляющую самостоятельный интерес.

Пусть A — группа, p — простое число. Выберем некоторую p-базисную подгруппу B группы A ([1], §§ 32, 33). Запишем $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$, где B_0 — свободная группа, либо $B_0 = 0$, B_i ($i \geq 1$) — прямая сумма некоторого числа копий группы $Z(p^i)$, либо $B_i = 0$. На основании ([1], теорема 32.4) для каждого $n \geq 1$ имеем прямые разложения

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus A_n, \quad A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1}, \tag{1}$$

где $A_n = (B_0 \oplus \bigoplus_{i \geq n+1} B_i) + p^n A$. Сумма $\bigoplus_{i \geq 1} B_i$ является базисной подгруппой p-компоненты A_p группы A и

$$A_p = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus C_n, \quad C_n = B_{n+1} \oplus C_{n+1}, \tag{2}$$

где $C_n = A_p \cap A_n = \sum\limits_{i \geq n+1} B_i + p^n A_p$. Верны также равенства $A = B + p^n A$ и $A_p = B' + p^n A_p$, где $B' = \bigoplus\limits_{i \geq 1} B_i$.

Обозначим p-компоненту A_p группы A буквой C.

Теорема 1.1. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) *G — вполне характеристическая подгруппа группы A, причем*
$$pA \subseteq G \subseteq C + pA;$$
2) *G совпадает с одной из следующих подгрупп: pA, $C+pA$, $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k$ для некоторого $k \geq 1$;*
3) *G равна либо pA, либо $C + pA$, либо $C[p^k] + pA$ для некоторого $k \geq 1$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). На основании ([1], лемма 9.3) для каждого $n \in N$ получаем $G = (G \cap B_1) \oplus \cdots \oplus (G \cap B_n) \oplus (G \cap A_n)$, где каждое слагаемое справа вполне характеристично в соответствующем слагаемом разложения (1). Поскольку $pB_i \subseteq G \cap B_i$, то, принимая во внимание строение групп B_i, находим $G \cap B_i = pB_i$, либо $G \cap B_i = B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Допустим, что $G \neq pA$, и покажем, что найдется номер k такой, что $G \cap B_k = B_k$. Пусть элемент $a \in G - pA$. Ввиду 1) можно считать, что $a \in C$. Учитывая равенство $C = B' + pC$, запишем $a = b + pc$, где $b \in B'$, $c \in C$, причем $b \in G$ и $b \notin pA$. Следовательно, для некоторого $k \geq 1$ компонента b_k элемента b в B_k не делится на p, т. е. $b_k \notin pB_k$. Поскольку $b_k \in G$ (учесть вполне характеристичность G), то получаем $G \cap B_k \neq pB_k$. Значит, $G \cap B_k = B_k$. Ясно также, что $G \cap B_i = B_i$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$.

Допустим теперь, что $G \neq C+pA$ и убедимся, что найдется номер m такой, что $G \cap B_m = pB_m$. В противном случае, $B_i \subseteq G$ для всех $i \geq 1$. Откуда $B' \subseteq G$, $C = B' + pC \subseteq G$, $C + pA \subseteq G$ и $G = C + pA$. Можно сделать вывод о существовании номера k такого, что $G \cap B_i = B_i$ для $i = 1, \ldots, k$ и $G \cap B_i = pB_i$ для всех $i > k$.

Таким образом, $G = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus (G \cap A_k)$, где $G \cap A_k$ — вполне характеристическая подгруппа в A_k, причем $pA_k \subseteq G \cap A_k$. Установим включение $G \cap A_k \subseteq C_k + pA_k$. Поскольку $G \subseteq C+pA$, то достаточно убедиться в справедливости равенств $(C+pA) \cap A_k = (C \cap A_k) + pA_k = C_k + pA_k$. Второе из них очевидно. Понятно также, что $(C \cap A_k) + pA_k \subseteq (C + pA) \cap A_k$. Осталось проверить включение $(C+pA) \cap A_k \subseteq C_k + pA_k$. Пусть $a = c + px \in A_k$, где $c \in C$, $x \in A$. Учитывая разложения (1) и (2), запишем $c = b + d$ и $px = py + pz$, где $b, y \in B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$, $d \in C_k$ и $z \in A_k$. Теперь находим $a = c + px = (b + py) + (d + pz)$, причем $a, d + pz \in A_k$, $b + py \in B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$. Следовательно, $b + py = 0$ и $a = d + pz \in C_k + pA_k$, что и требовалось.

Группа $\bigoplus\limits_{i \geq k+1} B_1 \oplus B_0$ служит p-базисной подгруппой для A_k. Итак, имеем вполне характеристическую подгруппу $G \cap A_k$ в A_k, при этом $pA_k \subseteq G \cap A_k \subseteq C_k + pA_k$. Мы находимся в условиях п. 1) теоремы относительно группы A_k и ее вполне характеристической подгруппы $G \cap A_k$. Дополнительно для всякого $i > k$ справедливо $(G \cap A_k) \cap B_i = G \cap B_i = pB_i$. В силу уже доказанного получаем $G \cap A_k = pA_k$. В итоге можно утверждать, что $G = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k$, чем доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2) завершено.

2) $\Rightarrow$ 3). Докажем большее. А именно, для каждого $k \geq 1$ установим равенство $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k = C[p^k] + pA$. Его левая часть, очевидно, лежит в правой. Ясно также, что $pA \subseteq B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k$. Осталось проверить включение $C[p^k] \subseteq B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k$. Пусть $a \in C[p^k]$. Из $C = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus C_k$ получаем $a = b_1 + \cdots + b_k + d$, где $b_i \in B_i$, $d \in C_k$. Здесь $o(d) \leq p^k$. Далее имеем $C_k = \sum\limits_{i \geq k+1} B_i + p^k C$. Откуда $d = b + p^k c$, $b \in \sum\limits_{i \geq k+1} B_i$, $c \in C$. Теперь запишем $C_k = B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_{k+m} \oplus C_{k+m}$, где $b \in B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_{k+m}$. Затем, $c = x + y + z$, где $x = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$, $y \in B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_{k+m}$, $z \in C_{k+m}$. Имеем $d = b + p^k c = b + p^k y + p^k z$, где $b + p^k y \in B_{k+1} \oplus \cdots \oplus B_{k+m}$, а $p^k z \in C_{k+m}$. Следовательно, $o(b + p^k y) \leq p^k$, откуда $h_p(b + p^k y) \geq 1$ и $h_p(b) \geq 1$. Значит, $h_p(d) \geq 1$ и $d \in pC_k \subseteq pA_k$. Отсюда $a \in B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k$, что и утверждалось.

3) $\Rightarrow$ 1). Подгруппы $C[p^k]$ и pA вполне характеристичны в A. Следовательно, и подгруппа G, равная $C[p^k] + pA$, вполне характеристична в A. При этом $pA \subseteq G \subseteq C + pA$. $\square$

Из теоремы получается описание вполне характеристических подгрупп произвольной p-группы A, содержащих подгруппу pA. Они исчерпываются подгруппами pA, A и $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k$ для всех $k \geq 1$, причем $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus pA_k = A[p^k] + pA$.

Теорема 1.2. *Пусть A — группа. Эквивалентны следующие утверждения*:

1) *$E(A)$-модуль $A \otimes Z(p)$ нетеров*;
2) *$A = C \oplus D \oplus K$, где C — ограниченная, а D — делимая p-группы, $K_p = 0$ и $E(K)$-модуль $K \otimes Z(p)$ нетеров*;
3) *$A = C \oplus D \oplus K$, где C и D такие, как в 2), $K_p = 0$ и $E(A)$-модуль $\overline{A} \otimes Z(p)$ нетеров.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Будем использовать обозначения теоремы 1.1. Запишем $A_p = C \oplus D$, где C — редуцированная, а D —делимая группы. Предположим, что C не является ограниченной группой. Тогда для бесконечного множества индексов i будет $B_i \neq 0$. Обозначим $G_n = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n \oplus pA_n$ $(n \geq 1)$. Здесь $pA \subseteq G_n$ и G_n — вполне характеристическая подгруппа по теореме 1.1. Цепь $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ не стабилизируется, что невозможно. Значит, C — ограниченная группа. Таким образом, $A = C \oplus D \oplus K$, где $K_p = 0$. Подгруппа $C \oplus D$ вполне характеристична в A. Из 1) и следствия 1.1 получаем нетеровость модуля $K \otimes Z(p)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Точная последовательность притягивающих $E(A)$-модулей (замечание 1.1) $0 \to T(K) \to K \to \overline{K} \to 0$ индуцирует точную последовательность $E(A)$-модулей $0 \to T(K) \otimes Z(p) \to K \otimes Z(p) \to \overline{K} \otimes Z(p) \to 0$. В ней $T(K) \otimes Z(p) = 0$, т. к. $T(K)$ — периодическая группа без p-компоненты. Следовательно, $E(A)$-модули $K \otimes Z(p)$ и $\overline{K} \otimes Z(p)$ изоморфны. Далее, $\overline{A} = A/T(A) = (C \oplus D \oplus K)/(C \oplus D \oplus T(K)) \cong K/T(K) = \overline{K}$. Таким образом, $\overline{A} \otimes Z(p) \cong K \otimes Z(p)$ как $E(A)$-модули и $\overline{A} \otimes Z(p)$ — нетеров $E(A)$-модуль.

3) $\Rightarrow$ 1). По предложению 1.1 $C \otimes Z(p)$ — нетеров $E(C)$-модуль, а $(C \oplus D) \otimes Z(p) = C \otimes Z(p)$. Уже установлено, что $K \otimes Z(p) \cong \overline{A} \otimes Z(p)$. Отсюда $K \otimes Z(p)$ — нетеров $E(A)$-модуль и, значит, нетеров $E(K)$-модуль (замечание 1.1). По следствию 1.1 A — нетеров $E(A)$-модуль. $\square$

Следствие 1.3. $E(A)$-модуль $A_p \otimes Z(p)$ нетеров тогда и только тогда, когда $A = C \oplus D \oplus K$, где C — ограниченная, а D — делимая p-группы и $K_p = 0$.

Доказательство. Необходимость. Имеем гомоморфизм ограничения $E(A) \to E(A_p)$. Поэтому всякий $E(A_p)$-модуль в $A_p \otimes Z(p)$ будет $E(A)$-модулем. Отсюда $A_p \otimes Z(p)$ — нетеров $E(A_p)$-модуль. По теореме 1.2 $A_p = C \oplus D$, где C и D такие, как в условии. Следовательно, $A = C \oplus D \oplus K$, $K_p = 0$.

Достаточность. По теореме 1.2 $E(A_p)$-модуль $A_p \otimes Z(p)$ нетеров. Следовательно, $A_p \otimes Z(p)$ нетеров и как $E(A)$-модуль (замечание 1.1).

2. $E(A)$-модуль $A \otimes C$

Лемма 2.1. *Пусть A — R-модуль. Тогда*

1) *нетеровость R-модуля $A \otimes Z(p^k)$ $(k > 1)$ эквивалентна нетеровости R-модуля $A \otimes Z(p)$*;
2) *R-модуль $A \otimes Z(p^\infty)$ нетеров тогда и только тогда, когда $p\overline{A} = \overline{A}$.*

Доказательство. Утверждение 1) можно установить, рассмотрев точную последовательность R-модулей $A \otimes Z(p) \to A \otimes Z(p^k) \to A \otimes Z(p^{k-1}) \to 0$ и применив индукцию по k.

Докажем 2). Из $T(A) \otimes Z(p^\infty) = 0$ заключаем $A \otimes Z(p^\infty) = \overline{A} \otimes Z(p^\infty)$. Если $p\overline{A} = \overline{A}$, то $\overline{A} \otimes Z(p^\infty) = 0$. Пусть $p\overline{A} \neq \overline{A}$ и B — p-базисная подгруппа группы $\overline{A}$. Здесь $B = \oplus Z$ (сумма $r_p(\overline{A})$ копий группы Z), причем $r_p(\overline{A}) \neq 0$ ввиду $p\overline{A} \neq \overline{A}$. Имеем $\overline{A} \otimes Z(p^\infty) \cong B \otimes Z(p^\infty) \cong \oplus Z(p^\infty)$ ([1], теорема 61.1). Итак, R-модуль $A \otimes (p^\infty)$, как группа, является делимой p-группой. Обозначим его через V. Модуль V не будет нетеровым, поскольку все члены цепи $V[p] \subset V[p^2] \subset \cdots$ являются подмодулями. $\square$

Пусть C — группа без кручения конечного ранга n. Внешним типом $OT(C)$ группы C называется точная верхняя грань типов всех фактор-групп без кручения ранга 1 группы C ([8], с. 11). Зафиксируем некоторую свободную подгруппу F группы C ранга n. Тогда C/F — периодическая группа. Возьмем ее разложение $C/F = \bigoplus_p T_p$ в сумму p-групп. Каждая T_p есть прямая сумма n групп, циклических или квазициклических. Запишем $T_p = Z(p^{k_{p_1}}) \oplus \cdots \oplus Z(p^{k_{p_n}})$, где $0 \leq k_{p_1} \leq \cdots \leq k_{p_n} \leq \infty$ и $Z(p^{k_{p_i}})$ — циклическая, либо квазициклическая p-группа. Известно, что $OT(C) = [(k_{p_n})]$, где $[(k_{p_n})]$ — тип, содержащий характеристику (k_{p_n}) ([8], теорема 1.10).

Предложение 2.1. *Пусть A и C — группы без кручения и A — модуль над некоторым кольцом R. R-модуль $A \otimes C$ нетеров тогда и только тогда, когда A — нетеров R-модуль, $r(C) < \infty$, и если $OT(C) = [(k_p)]$, то для почти всех p с $k_p \neq 0$ и для всех p с $k_p = \infty$ выполняется $pA = A$. При этом группа $A \otimes C$ квазиизоморфна группе $\bigoplus_{r(C)} A$.*

Доказательство. Используем обозначения и факты, приведенные перед предложением. Считаем, что $A \otimes C$ — нетеров R-модуль. Тогда модули $A \otimes F$ и $A \otimes C/F$ также нетеровы. Пусть $F = \bigoplus_n Z$, где $n = r(C)$. Тогда $A \otimes F \cong \bigoplus_n (A \otimes Z) \cong \bigoplus_n A$, откуда $n < \infty$ и A — нетеров модуль. Запишем $A \otimes C/F = \bigoplus_p (A \otimes T_p)$. Если $k_p = \infty$ для какого-то p, то p-компонента T_p содержит группу $Z(p^\infty)$, а $A \otimes T_p$ содержит нетеров модуль $A \otimes Z(p^\infty)$. По лемме 2.1 $pA = A$. Если $k_p \neq 0, \infty$, то $A \otimes T_p$ содержит прямое слагаемое вида $A \otimes Z(p^{k_p})$. В силу нетеровости модуля $A \otimes C/F$ для почти всех таких p должно быть $A \otimes Z(p^{k_p}) = 0$. Отсюда $pA = A$ для почти всех p с $k_p \neq 0, \infty$. Пусть $p_1, \dots, p_s$ — все такие числа, что $p_i A \neq A$ и $k_{p_i} \neq 0, \infty$ $(i = 1, \dots, s)$. Тогда $A \otimes C/F = \bigoplus_{i=1}^{s} (A \otimes T_{p_i})$. Здесь $A \otimes T_{p_i}$ — прямая сумма конечного числа групп вида $A \otimes Z(p^k)$ $(k < \infty)$, изоморфных $A/p^k A$. Заключаем, что $A \otimes C/F$ — ограниченная группа. Поэтому существует $m \in N$ со свойством $m(A \otimes C) \subseteq A \otimes F$. Следовательно, группа $A \otimes C$ квазиизоморфна группе $A \otimes F$, где $A \otimes F \cong \bigoplus_{r(C)} A$.

Пусть выполняются условия предложения. Достаточно убедиться в нетеровости модулей $A \otimes F$ и $A \otimes C/F$. Нетеровость первого следует из изоморфизма $A \otimes F \cong \bigoplus_{r(C)} A$. Из рассуждений, проведенных выше, видно, что модуль $A \otimes C/F$ равен прямой сумме конечного числа модулей вида $A \otimes Z(p^k)$ $(k < \infty)$. Но $A \otimes Z(p^k) \cong A/p^k A$, где последний модуль нетеров, поскольку A нетеров. Значит, $A \otimes C/F$ — нетеров модуль. □

В целях упрощения формулировки основного результата параграфа вопрос о нетеровости $E(A)$-модуля $A \otimes C$ сведем к ситуации, когда A и C не имеют делимых периодических подгрупп.

Предложение 2.2. *Представим группы A и C в виде $A = D \oplus K$, $C = E \oplus M$, где D и E — периодические делимые подгруппы, а K и M не содержат таких подгрупп. $E(A)$-модуль $A \otimes C$ нетеров тогда и только тогда, когда для любого p с $D_p \neq 0$ имеет место $p\overline{C} = \overline{C}$, для любого p с $E_p \neq 0$ имеет место $p\overline{A} = \overline{A}$, и $E(K)$-модуль $K \otimes M$ нетеров.*

Доказательство. Необходимость. Если $D_p \neq 0$, то $E(A)$-модуль $D_p \otimes C$ нетеров, т. к. $D_p \otimes C \subseteq A \otimes C$. Поэтому и $D_p \otimes \overline{C}$ — нетеров модуль как гомоморфный образ модуля $D_p \otimes C$. Так же, как в лемме 2.1, можно найти $p\overline{C} = \overline{C}$. Пусть $E_p \neq 0$. Аналогично получаем, что модуль $\overline{A} \otimes E_p$ нетеров. По лемме 2.1 $p\overline{A} = \overline{A}$. Заметим еще, что $\overline{A} \cong \overline{K}$, $\overline{C} \cong \overline{M}$. По доказанному $A \otimes E = K \otimes E \cong \overline{K} \otimes E \cong \overline{A} \otimes E = 0$ и точно так же, $D \otimes M = 0$. Поэтому $A \otimes C = A \otimes M = K \otimes M$. Следствие 1.1 влечет нетеровость $E(K)$-модуля $K \otimes M$.

Достаточность. Как и выше, имеем $A \otimes C = K \otimes M$. Затем применяем следствие 1.1. □

В следующей теореме букву R фиксируем для обозначения кольца $E(A)$. Слова типа “модуль”, “подмодуль” и т. п. относятся к R-модулям, R-подмодулям.

Теорема 2.1. *Пусть A и C — группы, не содержащие делимых периодических подгрупп. R-модуль $A \otimes C$ нетеров в том и только том случае, когда $A = G \otimes K$, $C = H \otimes M$, где G — ограниченная, а H — конечная вполне характеристические подгруппы и для каждого p, относящегося к K (соответственно M), справедливо $pC = C$ (соответственно $pA = A$). При этом, если*

а) *$\overline{A} = 0$ и $\overline{C} \neq 0$, то для любого p, относящегося к G, $r_p(\overline{C}) < \infty$;*
б) *$\overline{A} \neq 0$ и $\overline{C} = 0$, то для любого p, относящегося к H, $\overline{A} \otimes Z(p)$ — нетеров R-модуль;*
в) *$\overline{A} \neq 0$ и $\overline{C} \neq 0$, то $\overline{A}$ — нетеров R-модуль, $r(\overline{C}) < \infty$, и если $OT(\overline{C}) = [(k_p)]$, то для почти всех p с $k_p \neq 0$ и для всех p с $k_p = \infty$ выполняется $p\overline{A} = \overline{A}$.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем число p такое, что $A_p \neq 0$ и $pC \neq C$. Поскольку подмодуль A_p сервантен в A, то $A_p \otimes C$ является подмодулем в $A \otimes C$, причем $A_p \otimes C \neq 0$ ([1], теорема 61.1). Сумма $\sum(A_p \otimes C)$, где p пробегает числа с $A_p \neq 0$ и $pC \neq C$, является прямой. Поэтому в силу нетеровости модуля $A \otimes C$ таких чисел должно быть конечное множество. Пусть это будут числа $p_1, \dots, p_k$ и p — одно из них. Пусть $B = \bigoplus_{i \in I} \langle b_i \rangle$ — p-базисная подгруппа группы C. Имеем $A_p \otimes C \cong A_p \otimes B \cong \bigoplus_{i \in I} (A_p \otimes \langle b_i \rangle)$ ([1], теорема 61.1). Модуль $A_p \otimes C$ нетеров, поэтому слагаемых $A_p \otimes \langle b_i \rangle$ имеется лишь конечное число. Значит, I — конечное множество и $r_p(C) < \infty$ (заметим, что $r_p(C) = |I|$). Имеем $\langle b_i \rangle \cong Z(p^{k_i})$ для некоторого $k_i < \infty$, или $\langle b_i \rangle \cong Z$. Следовательно, либо модуль $A_p \otimes Z(p^{k_i})$, либо модуль $A_p \otimes Z$ является нетеровым. По лемме 2.1 и следствию 1.3 или следствию 1.2 A_p — ограниченная группа. Отсюда $A = A_p \otimes A'$, где A' — дополнительное слагаемое. Из проведенного рассуждения ясно, что группа A равна $A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_k} \oplus K$ или $A = G \oplus K$, где G — ограниченная группа, K — дополнительное прямое слагаемое. По построению G — вполне характеристическое слагаемое, и если $K_p \neq 0$, то $pC = C$.

Покажем, что чисел p с $pA \neq A$ и $C_p \neq 0$ также имеется лишь конечное множество. Если p — такое число, то $A \otimes C_p$ — ненулевой подмодуль в $A \otimes C$. Сумма $\sum(A \otimes C_p)$, где p пробегает числа с $pA \neq A$ и $C_p \neq 0$, является прямой. Нетеровость модуля $A \otimes C$ влечет конечность множества таких чисел. Возьмем одно из таких чисел p и пусть $B = \bigoplus_{i \in I} \langle b_i \rangle$ — базисная подгруппа группы C_p. Она сервантна в C_p. Можно считать, что $A \otimes B$ — подмодуль в $A \otimes C_p$ ([1], теорема 60.4). Поскольку $A \otimes B \cong \bigoplus_{i \in I} (A \otimes \langle b_i \rangle)$, то на основании нетеровости модуля $A \otimes B$ находим, что I — конечное множество, а C_p — конечная группа. Отсюда $C = C_p \oplus C'$ для некоторого дополнительного слагаемого C'. Пусть H — сумма всех таких C_p. Тогда $C = H \oplus M$, где H — конечная, M — некоторая группы. По построению подгруппа H вполне характеристична, а $M_p \neq 0$ влечет $pA = A$.

Проверим а). Пусть p относится к G. Тогда $A_p = G_p \neq 0$. Как установлено выше, модуль $A_p \otimes C$ нетеров и $r_p(C) < \infty$. Тем более, $r_p(\overline{C}) < \infty$.

Рассмотрим б). Допустим $H_p \neq 0$ и пусть $Z(p^k)$ — одно из циклических прямых слагаемых группы H. Тогда $A \otimes Z(p^k)$ — нетеров модуль. Лемма 2.1 гарантирует нетеровость модуля $A \otimes Z(p)$, поэтому $\overline{A} \otimes Z(p)$ — нетеров модуль.

Обратимся к в). Модуль $\overline{A}$ служит гомоморфным образом модуля A, а группа $\overline{C}$ — группы C. Отсюда $\overline{A} \otimes \overline{C}$ — гомоморфный образ модуля $A \otimes C$. Следовательно, $\overline{A} \otimes \overline{C}$ — нетеров модуль. Оставшиеся утверждения содержатся в предложении 2.1.

Достаточность. Имеем $A = G \oplus K$, $C = H \oplus M$, причем выполнены все предположения относительно G, H, K, M и условия а), б), в). Покажем, что модуль $A \otimes C$ нетеров. Для этого убедимся, что оба слагаемых в сумме $A \otimes C = (A \otimes H) \oplus (A \otimes M)$ нетеровы.

Группа H конечна, поэтому с учетом леммы 2.1 нужно проверить, что для всякого p, относящегося к H, $A \otimes Z(p)$ — нетеров модуль. Для этого к равенству $A \otimes Z(p) = (G \otimes Z(p)) \oplus (K \otimes Z(p))$ применим следствие 1.1. Это допустимо, поскольку слагаемое G вполне характеристично в A. $E(G)$-модуль $G \otimes Z(p)$ нетеров по теореме 1.2. Затем, как установлено в доказательстве этой теоремы (импликация 2) $\Rightarrow$ 3)), $K \otimes Z(p) \cong \overline{A} \otimes Z(p)$. Если $\overline{A} \neq 0$, то из б) или в) следует, что модуль $\overline{A} \otimes Z(p)$ нетеров (в п. в) следует учесть, что $\overline{A} \otimes Z(p) \cong \overline{A}/p\overline{A}$). Следовательно, $K \otimes Z(p)$ — нетеров R-модуль и $E(K)$-модуль (замечание 1.1). По следствию 1.1 $A \otimes Z(p)$ и, следовательно, $A \otimes H$ — нетеровы модули.

Перейдем к модулю $A \otimes M$. Запишем $A \otimes M = (G \otimes M) \oplus (K \otimes M)$ и опять воспользуемся следствием 1.1. По условию из $M_p \neq 0$ следует $pA = A$. Значит, $G \otimes T(M) = 0$ и $G \otimes M \cong G \otimes \overline{M} \cong G \otimes \overline{C}$. Считаем $\overline{C} \neq 0$. В таком случае $G \otimes \overline{C} \cong \bigoplus\limits_p (G_p \otimes \overline{C})$, где p пробегает конечное множество чисел, относящихся к G. Пусть p — одно из таких чисел, $B = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \langle b_i \rangle$ — p-базисная подгруппа группы $\overline{C}$. Ввиду а) или в) $n = r_p(\overline{C}) < \infty$ и $\langle b_i \rangle \cong Z$. Тогда $G_p \otimes \overline{C} \cong G_p \otimes B \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (G_p \otimes \langle b_i \rangle) \cong \bigoplus\limits_n G_p$. $E(G)$-модуль G_p нетеров по следствию 1.2. Отсюда $E(G)$-модуль $G_p \otimes \overline{C}$, а с ним $G \otimes \overline{C}$ и $G \otimes M$ нетеровы.

Рассмотрим модуль $K \otimes M$. По условию $K_p \neq 0$ влечет $pC = C$. Поэтому $K \otimes T(M) = 0 = T(K) \otimes \overline{M}$. Теперь получаем $K \otimes M \cong K \otimes \overline{M} \cong \overline{K} \otimes \overline{M} \cong \overline{A} \otimes \overline{C}$. Из в) и предложения 2.1 выводится нетеровость модуля $\overline{A} \otimes \overline{C}$. Итак, $K \otimes M$ нетеров как R-модуль и, значит, как $E(K)$-модуль (замечание 1.1). По следствию 1.1 $A \otimes M$ — нетеров модуль. Нашли, что $A \otimes H$, $A \otimes M$ — нетеровы модули, следовательно, и $A \otimes C$ — нетеров модуль. $\square$

Следствие 2.1. Пусть A — редуцированная p-группа, C — произвольная группа. $E(A)$-модуль $A \otimes C$ нетеров в том и только том случае, когда из $pC \neq C$ вытекает ограниченность группы A и неравенство $r_p(C) < \infty$.

Замечание 2.1. Если A — смешанная группа, то проблема нетеровости модуля $A \otimes C$ сведена согласно теореме 2.4 (см. также теорему 1.2) к вопросам о нетеровости $E(A)$-модулей вида $\overline{A}$ и $\overline{A} \otimes Z(p)$. Каждый эндоморфизм группы A индуцирует эндоморфизм на фактор-группе $A/T(A)$. Таким способом получаем гомоморфизм колец $f : E(A) \to E(\overline{A})$. Его ядро равно $\{\alpha \in E(A) \mid \alpha A \subseteq T(A)\}$. Обозначим $E_w(A) = E(A)/\ker f$. Кольцо $E_w(A)$ является кольцом эндоморфизмов группы A в категории Уокера (о категории Уокера см. [9]).

Нетеровость $E(A)$-модулей $\overline{A}$ и $\overline{A} \otimes Z(p)$ равносильна их нетеровости как $E_w(A)$-модулей. Кольцо $E_w(A)$ часто устроено значительно проще кольца $E(A)$.

Замечание 2.2. Для группы A без кручения проблема нетеровости $E(A)$-модуля $A \otimes C$ сведена к вопросам о нетеровости $E(A)$-модулей вида A и $A \otimes Z(p)$.

Замечание 2.3. В [10] исследуется вопрос об артиновости $E(A)$-модуля $A \otimes C$. Для смешанной группы A (соответственно группы A без кручения) он сведен к подобному вопросу для $E(A)$-модулей вида $\overline{A}$, $\overline{A} \otimes Z(p)$ и $\overline{A} \otimes Z(p^\infty)$ (соответственно вида A, $A \otimes Z(p)$ и $A \otimes Z(p^\infty)$).

Замечание 2.4. В [7], [11] и [12] проведено исследование группы $\mathrm{Hom}(A, B)$ как артинова, нетерова или инъективного модуля над кольцом $E(B)$ или $E(A)$.

Авторы планируют провести исследование вопросов, указанных в замечаниях 2.1–2.3, для некоторых смешанных или без кручения групп A.

Литература

1. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1. – М.: Мир, 1974. – 335 с.
2. Марков В.Т., Михалев А.В., Скорняков Л.А., Туганбаев А.А. *Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей* // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т .21. – С. 183–254.
3. Ламбек И. *Кольца и модули.* – М.: Мир, 1971. – 279 с.
4. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории.* Т. 1. – М.: Мир, 1977. – 688 с.
5. Paras A.T. *Abelian groups as Noetherian modules over their endomorphism rings* // Contem. Math. – 1994. – V. 171. – P. 325–332.

6. Крылов П.А. *Абелевы группы без кручения как модули над своими кольцами эндоморфизмов* // Абел. группы и модули. – Томск, 1996. – С. 77–104.
7. Крылов П.А., Подберезина Е.И. *Группа* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *как артинов* $E(B)$*-модуль* // Абел. группы и модули. – Томск, 1996. – С. 170–184.
8. Arnold D.M. *Finite rank torsion free Abelian groups and rings* // Lect. Notes Math. – 1982. – V. 931. – 191 p.
9. Warfield R.B., Jr. *The structure of mixed Abelian groups* // Abelian Groups Theory. Lecture Notes Math. – 1977. – V. 616. – P. 1–38.
10. Еремина М.В., Крылов П.А. *К вопросу об артиновости* $E(A)$*-модуля* $A \otimes C$ // Исследов. по матем. анализу и алгебре. – Томск, 1998. – С. 158–164.
11. Крылов П.А., Подберезина Е.И. *Группа* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *как нетеров модуль над кольцом эндоморфизмов группы* A // Исследов. по матем. анализу и алгебре. – Томск, 2000. – С. 63–76.
12. Крылов П.А., Пахомова Е.Г. *Абелевы группы как инъективные модули над кольцами эндоморфизмов* // Фундамент. и прикл. матем. – 1998. – Т. 4. – Вып. 4. – С. 1365–1384.

Томский государственный университет

Поступила
27.04.1998