ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 514.76

В.И. ПАНЬЖЕНСКИЙ, О.В. СУХОВА

ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Получены инвариантные характеристики классов Грея–Херввеллы почти эрмитовых структур, естественным образом возникающих на касательном расслоении почти симплектического многообразия.

1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, x^i — локальные координаты на M, $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная дифференциальная 2-форма, задающая на M почти симплектическую структуру ($i, j, k, \ldots = 1 \ldots n$; $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\det \|\omega_{ij}\| \neq 0$). Линейная связность ∇ согласована с ω, если $\nabla_X \omega = 0$ для любого векторного поля X на M, или в локальных координатах

$$\partial_i \omega_{jk} - \omega_{pk}\Gamma^p_{ij} - \omega_{jp}\Gamma^p_{ik} = 0, \tag{1}$$

где Γ^k_{ij} — коэффициенты связности ∇. Циклируя (1) и складывая, получим

$$\omega_{pk}S^p_{ij} + \omega_{pj}S^p_{ki} + \omega_{pi}S^p_{jk} = \partial_i\omega_{jk} + \partial_j\omega_{ki} + \partial_k\omega_{ij},$$

где $S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ — компоненты тензора кручения S связности ∇, откуда следует, что если почти симплектическая структура не сводится к симплектической ($d\omega \neq 0$), то связность необходимо имеет кручение.

Существует бесконечное множество связностей, согласованных с почти симплектической структурой. Компоненты таких связностей можно представить в следующем виде [1]:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\omega^{kp}(\partial_i\omega_{pj} + \eta_{pji}),$$

где η_{pji} — совокупность функций, симметричных по первым двум индексам, определяющая некоторый дифференциально-геометрический объект, закон преобразования которого обеспечивает необходимый закон преобразования коэффициентов связности.

2. Пусть TM — касательное расслоение почти симплектического многообразия (M, ω), (x^i, y^i) — естественные локальные координаты на TM. Векторные поля $\delta_I = (\delta_i, \dot\partial_i)$, $\delta_i = \partial_i - N^k_i\dot\partial_k$, $N^k_i = \Gamma^k_{ip}y^p$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $\dot\partial_i = \partial/\partial y^i$, образуют адаптированный к структуре почти произведения $T_z(TM) = H_z \oplus V_z$, $z \in TM$, локальный базис векторных полей на TM.

Структурные уравнения имеют вид $[\delta_I, \delta_J] = R^K_{IJ}\delta_K$, $I, J, K, \ldots = 1, \ldots, 2n$, где R^K_{IJ} — компоненты объекта неголономности: $R^{n+k}_{ij} = -y^m R^k_{ijm}$, $R^{n+k}_{in+j} = \Gamma^k_{ij}$, $R^{n+k}_{n+ij} = -\Gamma^k_{ij}$, $R^k_{ij} = R^k_{in+j} = R^k_{n+ij} = R^k_{n+in+j} = R^{n+k}_{n+in+j} = 0$. Здесь R^k_{ijm} — компоненты тензора кривизны связности ∇.

Распределение горизонтальных площадок связности ∇ определяет на TM каноническую почти комплексную структуру $J : J^2 = -\mathrm{id}$, $JX^h = X^v$, $JX^v = -X^h$, где X^h, X^v — горизонтальный и вертикальный лифты векторного поля X базы M.

Рассмотрим на TM риманову метрику $G = \langle\ ,\ \rangle$:

$$G = \omega_{ij}dx^i \otimes \delta y^j - \omega_{ij}\delta y^i \otimes dx^j,$$

где $\delta y^i = dy^i + N^i_k dx^k$. Коэффициенты связности Леви-Чивита $\widetilde{\Gamma}^K_{IJ}$ метрики G, определяемые разложением $\widetilde{\nabla}_{\delta_I}\delta_J = \widetilde{\Gamma}^K_{IJ}\delta_K$, имеют вид

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}), \quad \widetilde{\Gamma}^{n+k}_{ij} = -\frac{1}{2}y^m\omega^{ks}(R^p_{ijm}\omega_{sp} + R^p_{sim}\omega_{jp} + R^p_{sjm}\omega_{ip}),$$
$$\widetilde{\Gamma}^{n+k}_{in+j} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2}\omega^{ks}S^p_{is}\omega_{pj}, \quad \widetilde{\Gamma}^{n+k}_{n+ij} = \frac{1}{2}\omega^{ks}S^p_{js}\omega_{pi},$$
$$\widetilde{\Gamma}^k_{in+j} = \widetilde{\Gamma}^k_{n+ij} = \widetilde{\Gamma}^k_{n+in+j} = \widetilde{\Gamma}^{n+k}_{n+in+j} = 0,$$

где $S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ — компоненты тензора кручения связности ∇.

Очевидно, $G(JX, JY) = G(X, Y)$, и мы имеем почти эрмитову структуру (TM, G, J).

3. Получим инвариантные характеристики классов Грея–Хервеллы [2] почти эрмитовых структур (TM, G, J).

Почти эрмитова структура является келеровой тогда и только тогда, когда 2-форма $\Omega(X, Y) = G(X, JY)$ ковариантно постоянна относительно связности $\widetilde{\nabla}$:

$$\delta_I\Omega_{JS} - \widetilde{\Gamma}^K_{IJ}\Omega_{KS} - \widetilde{\Gamma}^K_{IS}\Omega_{JK} = 0.$$

Расписывая эти равенства для различных серий индексов, приходим к следующим условиям:

$$\frac{1}{2}(S^k_{ij}\omega_{ks} + S^k_{is}\omega_{jk}) = 0, \quad \frac{1}{2}y^m(R^p_{ism}\omega_{jp} + R^p_{jim}\omega_{sp} + R^p_{jsm}\omega_{ip}) = 0, \quad S^k_{ij} = 0.$$

Циклируя и складывая каждое из первых двух полученных равенств, заключаем $d\omega$=0, R^k_{ijs}=0. Следовательно, имеет место

Теорема 1. *Почти эрмитова структура (TM, G, J) является келеровой тогда и только тогда, когда форма ω является симплектической, связность ∇ не имеет кручения и является плоской.*

Теорема 2. *Для почти эрмитовых структур (TM, G, J) следующие классы сводятся к келеровым: приближенно келеровы, локально конформно келеровы, эрмитовы, эрмитовы семи-келеровы.*

Действительно, класс приближенно келеровых структур характеризуется условием $\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Y, X) = 0$, анализ которого приводит к следующим результатам:

$$R^k_{ijs} = 0, \quad S^k_{ij} = 0. \tag{2}$$

Равенство тензора кручения нулю влечет замкнутость формы ω, и класс приближенно келеровых структур сводится к келеровым.

Исследуя инвариантные характеристики класса локально конформно келеровых структур $\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z, Y) = \frac{-1}{2(n-1)}\{\langle X, Y\rangle\delta\Omega(Z) - \langle X, Z\rangle\delta\Omega(Y) - \langle X, JY\rangle\delta\Omega(JZ) + \langle X, JZ\rangle\delta\Omega(JY)\}$, эрмитовых структур $\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z, Y) - \widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Z, JY) = 0$ и эрмитовых семи-келеровых структур $\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z, Y) - \widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Z, JY) = 0$, $\delta\Omega = 0$, где $(\delta\Omega)_I = \widetilde{\nabla}_K(\Omega_{SI}G^{KS})$ есть кодифференциал формы Ω, также получаем условия (2).

Признаком почти келеровых структур является замкнутость фундаментальной формы Ω: $d\Omega = 0$. Расписывая условие $(d\Omega)_{IJK} = 0$ для различных серий индексов, получаем $R^k_{ijs} = 0$, $d\omega = 0$. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Почти эрмитова структура (TM, G, J) является почти келеровой тогда и только тогда, когда базисное многообразие (M, ω) является симплектическим с нулевым тензором кривизны.*

Анализ условия квази-келеровости $\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z,Y)+\widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Z,JY)=0$ позволяет нам заключить, что *для почти эрмитовых структур* (TM,G,J) *класс квази-келеровых структур сводится к классу почти келеровых.*

Приведем инвариантные характеристики остальных девяти классов почти эрмитовых структур (TM,G,J).

Класс $W_1\oplus W_3$ $(\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Y,X)-\widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Y,JX)=0,\ \delta\Omega=0)$:

$$S^k_{ki}=0,\quad \omega^{ps}S^k_{ps}=0,\quad S^k_{is}\omega_{kj}+S^k_{js}\omega_{ki}=0,$$
$$R_{ispj}+R_{jspi}=0,\quad \omega^{ks}R_{ksij}=0.$$

Класс $W_1\oplus W_4$ $(\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z,X)=\frac{-1}{2(n-1)}\{\|X\|^2\delta\Omega(Z)-\langle X,Z\rangle\delta\Omega(X)-\langle JX,Z\rangle\delta\Omega(JX)\})$:

$$S^p_{il}\omega_{pj}+S^p_{jl}\omega_{pi}=0,\quad \omega_{il}S^k_{jk}+\omega_{jl}S^k_{ik}-\frac{1}{2}\omega^{ks}S^p_{ks}(\omega_{jl}\omega_{pi}+\omega_{il}\omega_{pj})=0,$$
$$3(d\omega)_{ilj}=\frac{1}{n-1}\{2(\omega_{ij}S^k_{lk}-\omega_{il}S^k_{jk})-\omega^{ks}S^p_{ks}(\omega_{ij}\omega_{pl}-\omega_{il}\omega_{pj})\},$$
$$R_{limj}+R_{ljmi}=0,\quad \omega^{ks}R^p_{ksm}(\omega_{jl}\omega_{pi}+\omega_{il}\omega_{pj})=0,\quad R^p_{ijm}\omega_{lp}=\frac{-1}{n-1}\omega^{ks}R^p_{ksm}(\omega_{ij}\omega_{pl}-\omega_{il}\omega_{pj}).$$

Класс $W_2\oplus W_3$ $(\circlearrowleft_{X,Y,Z}\ \{\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z,Y)-\widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Z,JY)\}=0,\ \delta\Omega=0$, где $\circlearrowleft_{X,Y,Z}$ означает циклирование по X, Y, Z):

$$d\omega=0,\quad \omega^{ks}R_{ksij}=0,\quad R^p_{ijm}\omega_{kp}+R^p_{jkm}\omega_{ip}+R^p_{kim}\omega_{jp}=0.$$

Класс локально конформно почти келеровых структур $W_2\oplus W_4$ $(\circlearrowleft_{X,Y,Z}\ \{\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z,Y)-\frac{1}{n-1}\Omega(X,Y)\delta\Omega(JZ)=0\})$:

$$d\omega=0,\quad R^p_{ijm}\omega_{lp}=\frac{-1}{2(n-1)}\omega^{ks}R^p_{ksm}\omega_{ij}\omega_{pl},$$
$$\omega^{ks}R^p_{ksm}(\omega_{ij}\omega_{lp}+\omega_{jl}\omega_{ip}+\omega_{il}\omega_{pj})=0.$$

Класс семи-келеровых структур $W_1\oplus W_2\oplus W_3$ $(\delta\Omega=0)$:

$$\omega^{ks}R_{ksij}=0,\quad 2S^k_{ki}+\omega^{ks}S^p_{ks}\omega_{pi}=0.$$

Класс $W_1\oplus W_2\oplus W_4$ $(\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z,Y)+\widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Z,JY)=\frac{-1}{n-1}\{\langle X,Y\rangle\delta\Omega(Z)-\langle X,Z\rangle\delta\Omega(Y)-\langle X,JY\rangle\delta\Omega(JZ)+\langle X,JZ\rangle\delta\Omega(JY)\})$:

$$3(d\omega)_{ilj}=\frac{1}{n-1}\{2(\omega_{ij}S^k_{lk}-\omega_{il}S^k_{jk})-\omega^{ks}S^p_{ks}(\omega_{ij}\omega_{pl}-\omega_{il}\omega_{pj})\},$$
$$R^p_{ijm}\omega_{lp}+R^p_{lim}\omega_{jp}+R^p_{ljm}\omega_{ip}=\frac{-1}{n-1}\omega^{ks}R^p_{ksm}(\omega_{ij}\omega_{pl}-\omega_{il}\omega_{pj}).$$

Класс $W_1\oplus W_3\oplus W_4$ $(\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Y,X)-\widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Y,JX)=0)$:

$$R_{ispj}+R_{jspi}=0,\quad S^k_{is}\omega_{kj}+S^k_{js}\omega_{ki}=0.$$

Класс $W_2\oplus W_3\oplus W_4$ $(\circlearrowleft_{X,Y,Z}\ \{\widetilde{\nabla}_X(\Omega)(Z,Y)-\widetilde{\nabla}_{JX}(\Omega)(Z,JY)\}=0)$

$$d\omega=0,\quad R^p_{ijm}\omega_{lp}+R^p_{jlm}\omega_{ip}+R^p_{lim}\omega_{jp}=0.$$

Литература

1. Левин Ю.И. *Об аффинных связностях, присоединенных к кососимметрическому тензору* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 128. – № 4. – С. 668–671.
2. Gray A., Hervella Luis M. *The sixteen classes of almost hermitian manifolds and their linear invariants* // Ann. mat. pura ed appl. – 1980. – V. 123. – P. 35–58.

Пензенский государственный педагогический университет

Поступила 28.12.2006