ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 517.983

С.Н. МЕЛИХОВ, З. МОММ

О ЛИНЕЙНОМ НЕПРЕРЫВНОМ ПРАВОМ ОБРАТНОМ ДЛЯ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ НА ПРОСТРАНСТВАХ РОСТКОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТАХ В $\mathbb{C}$

Введение

Для выпуклого компакта G в $\mathbb{C}$ через $A(G)$ обозначим пространство всех ростков аналитических на G функций и снабдим его естественной топологией индуктивного предела. Если K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, то каждый аналитический функционал $\mu \in A(\mathbb{C})' \setminus \{0\}$, определяемый K, порождает линейный непрерывный оператор свертки

$$T_\mu : A(G+K) \to A(G), \quad T_\mu(g)(z) := \mu(g(\cdot + z)), \quad g \in A(G+K)$$

($G+K$ обозначает арифметическую сумму множеств G и K). Если $K = \{0\}$, то T_μ является дифференциальным оператором на $A(G)$ (конечного или бесконечного порядка) с постоянными коэффициентами. В этом случае T_μ сюръективен [1], [2]. Если $K \neq \{0\}$ и внутренность G непуста, характеризация сюръективных операторов T_μ хорошо известна [3]–[6]. В настоящей статье мы исследуем, когда заданный сюръективный оператор свертки $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ имеет линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО) R, т.е. когда существует решение $R(f) \in A(G+K)$ уравнения свертки $T_\mu(R(f)) = f$, линейно и непрерывно зависящее от $f \in A(G)$.

В данном направлении в настоящее время известны следующие результаты. Если $K = \{0\}$, G совпадает с точкой, то из результатов Майзе и Тейлора [7] вытекает, что только дифференциальный оператор T_μ конечного порядка имеет ЛНПО. Для отличного от точки замкнутого круга G и $K = \{0\}$ Ю.Ф. Коробейником [8] показано, что любой оператор T_μ имеет ЛНПО. Положим $\hat{\mu}(z) := \mu(\exp(\cdot z))$, $z \in \mathbb{C}$; через A_μ обозначим множество всех предельных точек последовательности $(a/|a|)_{\{a|\hat{\mu}(a)=0\}}$ (если эта последовательность конечна, то считаем $A_\mu = \varnothing$). Лангенбрух [9] в случае $G = [-1,1] \subseteq \mathbb{R}$, $K = \{0\}$ установил, что T_μ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда $A_\mu \subseteq \{-i, i\}$.

1. Предварительные сведения

Всюду далее G и K — выпуклые компакты в $\mathbb{C}$ и $\mu \in A(K)' \setminus \{0\}$. Линейный непрерывный оператор свертки $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ определяется равенством

$$T_\mu(g)(z) := \mu(g(\cdot + z)), \quad g \in A(G+K).$$

Положим $\hat{\mu}(z) := \mu(\exp(\cdot z))$, $z \in \mathbb{C}$. $\hat{\mu}$ является целой функцией экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которой содержится в K ([10], гл.1, § 20; [11], теорема 4.5.3). Положим $V(\hat{\mu}) := \{z \in \mathbb{C} \mid \hat{\mu}(z) = 0\}$.

Замечание 1. Далее всюду предполагаем, что множество нулей $V(\hat{\mu})$ функции $\hat{\mu}$ бесконечно. В случае, когда $V(\hat{\mu})$ конечно или пусто, оператор $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ имеет ЛНПО.

При выполнении данной работы первый из авторов пользовался финансовой поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-242, 96-01-01041) и Немецкой службы академических обменов (DAAD).

Для выпуклого множества Q в $\mathbb{C}$ $H_Q(z) := \sup_{w\in Q} \mathrm{Re}(zw)$ — опорная функция Q. Пусть $H := H_G$, $L := H_K$. Положим $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$; $\partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$. Через S_G обозначим множество всех $a \in \partial\mathbb{D}$ таких, что не существует открытой окрестности a, в которой функция H гармонична. A_μ обозначает множество всех предельных точек последовательности $(a/|a|)_{a\in V(\hat{\mu})}$.

Для выпуклого компакта Q в $\mathbb{C}$ положим

$$A^\circ_{H_Q} := \{f \in A(\mathbb{C}) \mid \|f\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-H_Q(z) - |z|/n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

С естественной топологией проективного предела банаховых пространств $A^\circ_{H_Q}$ является ядерным пространством Фреше. Если $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность выпуклых компактов таких, что $Q_{n+1} \subseteq \operatorname{int} Q_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, и $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, то нормы $\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-H_{Q_n}(z))$, $n \in \mathbb{N}$, образуют фундаментальную последовательность норм в $A^\circ_{H_Q}$.

Для локально выпуклого пространства (ЛВП) E через E'_β обозначим сильное сопряженное к E пространство.

Лемма 1 ([12], [13])**.** *Пусть Q — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Преобразование Лапласа $F(g)(z) := g(\exp(\cdot z))$, $z \in \mathbb{C}$, $g \in A(Q)'$, является линейным топологическим изоморфизмом $A(Q)'_\beta$ на $A^\circ_{H_Q}$. Если $A(G)'$ и $A(G+K)'$ отождествить с A°_H и A°_{H+L} соответственно, то сопряженным к $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ оператором является оператор умножения $M_{\hat{\mu}} : A^\circ_H \to A^\circ_{H+L}$, $f \mapsto \hat{\mu} \cdot f$.*

Замечание 2. Пусть оператор свертки $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ сюръективен. Так как A°_H и A°_{H+L} — рефлексивные пространства Фреше, то $\hat{\mu} \cdot A^\circ_H$ замкнуто в A°_{H+L}. Оператор $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда подпространство $\hat{\mu} \cdot A^\circ_H$ дополнимо в A°_{H+L}.

Для $B \subseteq \mathbb{C}$ положим $\Gamma(B) := \{tb \mid t \geq 0,\ b \in B\}$.

Определение 1. Если $B \subseteq \partial\mathbb{D}$ замкнуто, то μ и $\hat{\mu}$ назовем медленно убывающими на $\Gamma(B)$, если $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists R > 0 : \forall z \in \Gamma(B)$, $|z| \geq R$, $\exists w \in \mathbb{C}$, $|w - z| \leq |z|/k : |\hat{\mu}(w)| \geq \exp(L(w) - |w|/k)$.

Лемма 2. i) *Если $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ сюрьективен, то $\hat{\mu}$ медленно убывает на $\Gamma(S_G)$.*
ii) *Если $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ сюрьективен, то $\hat{\mu} \cdot A^\circ_H = (\hat{\mu} \cdot A(\mathbb{C})) \cap A^\circ_{H+L}$.*

Доказательство. i) Это утверждение по существу содержится в [4]; оно доказано также в ([6], предложение 2.3 и теорема 3.9).

ii). Пусть $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность выпуклых компактов таких, что $Q_{n+1} \subseteq \operatorname{int} Q_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $H_n := H_{Q_n}$ и введем ЛВП

$$A_{H_n+L} := \{f \in A(\mathbb{C}) \mid \exists m : \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-H_n(z) - L(z) + |z|/m) < \infty\},$$

наделенное соответствующей индуктивной топологией. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in G$. По ([12], теорема 4.4) $\forall n \in \mathbb{N}$ множество $\hat{\mu} \cdot \mathbb{C}[z]$ ($\mathbb{C}[z]$ — пространство всех многочленов) плотно в $(\hat{\mu} \cdot A(\mathbb{C})) \cap A_{H_n+L}$. Так как $\mathbb{C}[z] \subseteq A^\circ_H$, то $\hat{\mu} \cdot A^\circ_H$ плотно в $(\hat{\mu} \cdot A(\mathbb{C})) \cap A_{H_n+L}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\hat{\mu} \cdot A^\circ_H$ плотно в $(\hat{\mu} \cdot A(\mathbb{C})) \cap A_{H+L} = (\hat{\mu} \cdot A(\mathbb{C})) \cap \operatorname{proj}_{\leftarrow n} A_{H_n+L}$. Поскольку T_μ сюръективен, то $\hat{\mu} \cdot A^\circ_H$ замкнуто в A°_{H+L} (см. замечание 2), а значит, $\hat{\mu} \cdot A^\circ_H = (\hat{\mu} \cdot A(\mathbb{C})) \cap A^\circ_{H+L}$. $\square$

Лемма 3 ([14], лемма 5)*. Пусть оператор $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ сюрьективен и $A_\mu \subseteq S_G$; Q — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Тогда существует открытая окрестность $U \subseteq \mathbb{C}$ множества $V(\hat{\mu})$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists C < \infty$:*

а) $|\hat{\mu}(z)| \geq \exp(L(z) - |z|/n - C)$, $z \in \partial U$;

б) $\sup_{z\in S}(H_Q(z) + |z|/(n+1)) \leq \inf_{z\in S}(H_q(z) + |z|/n) + C$ *для любой компоненты S множества U*;

в) $\sup_{z,w\in S} |z - w| \leq \frac{1}{n} \inf_{z\in S} |z| + C$ *для любой компоненты S множества U.*

Замечание 3. Без ограничения общности можно считать, что окрестность U в лемме 3 состоит из последовательности компонент $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ таких, что $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists z_j \in S_j \cap V(\hat{\mu})$ и $\inf\limits_{z\in S_j}|z| \le \inf\limits_{z\in S_{j+1}}|z|$. Если n_j — число нулей $\hat{\mu}$ в S_j (с учетом их кратности), то в силу условия в) леммы 3 $\sum\limits_{p=1}^{j} n_p = O(\inf\limits_{z\in S_j}|z|)$, $j\to\infty$ ([10], гл. 1, § 5).

Замечание 4. Пусть выпуклый компакт G не совпадает с точкой; φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ такое, что $\varphi(0)=\infty$. Положим $\mathbb{D}_r := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<r\}$, $0<r<1$.

а) Как отмечено в ([15], замечание 1.3), для всех $0<r<1$ компакты $\overline{\mathbb{C}}\setminus\varphi(\mathbb{D}_r)$ выпуклы (это следует из того, что $\operatorname{Re}(z\varphi''(z)/\varphi'(z)) \le -1\ \forall z\in\mathbb{D}$).

б) Пусть H_r, $0<r<1$, — опорная функция $\overline{\mathbb{C}}\setminus\varphi(\mathbb{D}_r)$. Для всех $z\in\mathbb{C}$ функция $\zeta\mapsto H_{|\zeta|}(z) = \sup\limits_{|a|=1}\operatorname{Re}(\varphi(\zeta a)z)$ субгармонична в $\mathbb{D}$. Поэтому функция $x\mapsto H_{e^x}(z)$ выпукла на $(-\infty,0)$. Так как $\lim\limits_{r\to1-0} H_r(z) = H(z)$, то для всех $z\in\mathbb{C}$ существует

$$D(z) := \lim_{r\to1-0}\frac{H_r(z)-H(z)}{-\log r} = \inf_{0<r<1}\frac{H_r(z)-H(z)}{-\log r}. \tag{1}$$

При этом функция $D:\mathbb{C}\to[0,+\infty)$ полунепрерывна сверху.

Определение 2. Для последовательности банаховых пространств $\mathbb{E} := (E_j, |\cdot|_j)_{j\in\mathbb{N}}$, для матрицы $A := (a_{jn})_{j,n\in\mathbb{N}}$ такой, что $0<a_{jn}\le a_{j,n+1}\ \forall j,n\in\mathbb{N}$, положим

$$\lambda(A,\mathbb{E}) := \Big\{X=(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\prod_{j\in\mathbb{N}}E_j \big| \pi_n(X) := \sum_{j\in\mathbb{N}}|x_j|_j a_{jn} < \infty \quad \forall n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

С естественной топологией $\lambda(A,\mathbb{E})$ — пространство Фреше. Если $E_j=\mathbb{C}\ \forall j\in\mathbb{N}$, то вместо $\lambda(A,\mathbb{E})$ пишем $\lambda(A)$.

Если $\alpha_j\ge0$, $\alpha_j\le\alpha_{j+1}\ \forall j\in\mathbb{N}$, и $\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_j=\infty$, то для матрицы $A := (\exp(-\alpha_j/n))_{j,n\in\mathbb{N}}$ положим $\Lambda_0(\alpha) := \lambda(A)$.

2. Критерии существования линейного непрерывного правого обратного для оператора свертки

Далее используем следующие вспомогательные построения. Пусть U — открытая окрестность $V(\hat{\mu})$, состоящая из компонент S_j, $j\in\mathbb{N}$, имеющих непустые пересечения с $V(\hat{\mu})$ и удовлетворяющих условиям а)–в) леммы 3.

Через B_j обозначим банахово пространство всех ограниченных аналитических в S_j функций с нормой $\sup\limits_{z\in S_j}|f(z)|\exp(-L(z))$, а через I_j — его замкнутое подпространство $\hat{\mu}|_{S_j}\cdot B_j$, $j\in\mathbb{N}$. Положим $E_j := B_j/I_j$ и снабдим E_j факторнормой

$$|x|_j := \inf_{\xi\in x}\sup_{z\in S_j}|\xi(z)|\exp(-L(z)), \quad x\in E_j, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Введем отображение $\rho(f) := (f|_{S_j}+I_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $f\in A^{\circ}_{H+L}$. Выберем $z_j\in S_j\cap V(\hat{\mu})$, $j\in\mathbb{N}$. Из условия б) леммы 3 и того, что $\log j = o(|z_j|)$, $j\to\infty$ (см. замечание 3), следует, что ρ — линейное непрерывное отображение A°_{H+L} в $\lambda(A,\mathbb{E})$, где $A := (\exp(-H(z_j)-|z_j|/n))_{j,n\in\mathbb{N}}$ (см. определение 2).

Ниже понадобится

Лемма 4 ([16], лемма 2.8). *Пусть $\psi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — дифференцируемая неубывающая и неограниченная функция такая, что функция $\log\psi$ выпукла. Тогда для любой неубывающей функции $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для которой $f(x)=o(\psi(x))$, $x\to+\infty$, существует* *неубывающая и выпуклая функция $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для которой $f \le g$ и $g(x) = o(\psi(x))$, $x \to +\infty$.*

По поводу более ранних результатов, аналогичных следующей лемме, отошлем к работе ([17], теорема 1.7).

Лемма 5. *Пусть оператор свертки $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ сюръективен; существует открытая окрестность U множества $V(\hat\mu)$, удовлетворяющая условиям* а)–в) *леммы* 3 *и состоящая из компонент S_j таких, что $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists z_j \in S_j \cap V(\hat\mu)$. Предположим, что существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции u_j, $j \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами: $\forall m\ \exists k\ \exists C < \infty : \forall j \in \mathbb{N}$ $u_j\big|_{S_j} \ge 0$ и $u_j(z) \le H(z) + |z|/m - H(z_j) - |z_j|/k + C\ \forall z \in \mathbb{C}$. Тогда $\hat\mu \cdot A_H^\circ$ дополнимо в A_{H+L}°.*

Доказательство. Положим $a_{jn} := \exp(-H(z_j) - |z_j|/n)$, $A := (a_{jn})_{j,n\in\mathbb{N}}$. Определим пространства E_j, $j \in \mathbb{N}$, и отображение ρ, как выше.

Покажем, что $\rho : A_{H+L}^\circ \to \lambda(A,\mathbb{E})$ сюръективно. Соответствующее доказательство является модификацией доказательств ([7], п. 2.5; [18], п. 2.9; [14], п. 6) Положим $q(z) := \max\{\sup\limits_{|t|\le|z|}(\log|\hat\mu(t)| - L(t)),\ \sup\limits_{\substack{|t|\le|z| \\ t\in\partial U}}(-\log|\hat\mu(t)| + L(t)), 0\}$; $q_k(z) := kq(kz)$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Для всех $k \in \mathbb{N}$ $q_k(z) = \bar{\bar{o}}(|z|)$, $z \to \infty$. Кроме того, $|\hat\mu(z)| \le \exp(L(z) + q(z))$, $z \in \mathbb{C}$, и $|\hat\mu(z)| \ge \exp(L(z) - q(z))$, $z \in \partial U$. Как в ([19], с. 120; [18], п. 2.9), получим: существуют константа $C_1 \ge 1$, $l \in \mathbb{N}$, функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{C})$ такие, что для $\tilde S_j := \{z \in S_j \mid |\hat\mu(z)| < \exp(L(z) - q_l(z))\}$, $j \in \mathbb{N}$, имеет место следующее: $0 \le \chi \le 1$, $\operatorname{supp}\chi \subseteq U$, $\chi|_{\tilde U} \equiv 1$, где $\tilde U := \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \tilde S_j$ и $|\overline{\partial}\chi| \le C_1 \exp q_l$.

Пусть $X := (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \lambda(A,\mathbb{E})$. Вследствие условия б) леммы 3 и $q_l(z) = \bar{\bar{o}}(|z|)$, $z \to \infty$, существует строго возрастающая последовательность $(j_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ такая, что для $j_n \le j < j_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, найдется $\xi_j \in x_j$, для которой

$$\sup_{z\in S_j} |\xi_j(z)| \exp(-H(z) - L(z) - |z|/n + 2q_l(z)) \le 1.$$

Для $1 \le j < j_1$ выберем произвольные функции $\xi_j \in x_j$. Положим $\xi(z) := \xi_j(z)$, $z \in S_j$, $j \in \mathbb{N}$, и $\xi(z) := 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus U$. Тогда

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |\xi(z)| \exp(-H(z) - L(z) - |z|/n + 2q_l(z)) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть v — субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, для которой $B_v(\xi) := \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |\xi(z)| \exp(-v(z) - L(z) + 2q_l(z)) < \infty$. Если $\eta := -\overline{\partial}(\chi\xi)/\hat\mu$, то $\eta \in C^\infty(\mathbb{C})$ и

$$\left(\int_{\mathbb{C}} |\eta(z)|^2 \exp(-2v(z) - 2\log(1+|z|^2))\, d\lambda(z)\right)^{1/2} \le \sqrt{\pi}\, C_1 B_\nu(\xi)$$

($d\lambda$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}$). По ([11], теорема 4.4.2) $\exists h \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}) : \overline{\partial} h = \eta$ и

$$\left(\int_{\mathbb{C}} |h(z)|^2 \exp(-2v(z) - 4\log(1+|z|^2))\, d\lambda(z)\right)^{1/2} \le \sqrt{\pi}\, C_1 B_v(\xi).$$

Так как для функции $g_v := \chi \cdot \xi + h \cdot \hat\mu$ $\quad \overline{\partial} g_v = 0$, то $g_v \in A(\mathbb{C})$. При этом

$$\left(\int_{\mathbb{C}} |g_v(z)|^2 \exp(-2v(z) - 4\log(1+|z|^2) - 2L(z) - 2q(z))\, d\lambda(z)\right)^{1/2} \le 2\sqrt{\pi}\, C_1 B_v(\xi).$$

Поэтому найдется константа C_2, не зависящая от ξ, для которой

$$|g_v(z)| \le C_2 B_v(\xi) \exp(L(z) + q_2(z) + \sup_{|w-z|\le 1} v(w) + 2\log(1+|z|^2)) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Положим

$$f(x) := \max\{\sup_{|z|\le e^x}(\log|\xi(z)| - H(z) - L(z) + 2q_l(z)), 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда $f(x) = \bar{\bar{o}}(e^x)$, $x \to +\infty$. По лемме 4, примененной к функции $\psi(x) := e^x$, существует выпуклая неубывающая функция $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такая, что $f \le g$ и $g(x) = \bar{\bar{o}}(e^x)$, $x \to +\infty$. Доопределим g на $\mathbb{R}$: $g(x) := g(0)$, $x < 0$. По ([11], теорема 1.6.7) функция $\nu(z) := g(\log|z|)$ субгармонична в $\mathbb{C}$. При этом $\nu(z) = \bar{\bar{o}}(|z|)$, $z \to \infty$. Для функции $v := \nu + H$ $B_v(\xi) < \infty$ и вследствие (2) $g_v \in A^\circ_{H+L}$. Так как $\chi|_{\tilde{U}} \equiv 1$, то $\rho(g_v) = X$. Таким образом, отображение $\rho : A^\circ_{H+L} \to \lambda(A,\mathbb{E})$ сюръективно.

Пусть $(e_{jp})_{1\le p\le n_j}$ $(n_j := \dim E_j)$ — базис Ауэрбаха в E_j, $j \in \mathbb{N}$ (см. [20], с. 291). Положим $X_{jp} := (\delta_{js}e_{jp})_{s\in\mathbb{N}}$, $1 \le p \le n_j$, $j \in \mathbb{N}$ (δ_{js} — символ Кронекера). Вследствие замечания 3 и $\lim\limits_{j\to\infty} \log j/|z_j| = 0$ $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} n_j a_{jn}/a_{j,n+1} < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. По ([21], с. 66) $(X_{jp})_{1\le p\le n_j,\, j\in\mathbb{N}}$ — абсолютный базис в $\lambda(A,\mathbb{E})$.

Положим теперь $X := X_{jp}$ для фиксированных $j \in \mathbb{N}$ и $1 \le p \le n_j$. Так как $|e_{jp}|_j = 1$, то найдется функция $\xi_{jp} \in e_{jp}$, для которой $\sup\limits_{z\in S_j}|\xi_{jp}(z)|\exp(-L(z)) \le 2$. Пусть $\xi(z) := \xi_{jp}(z)$, $z \in S_j$; $\xi(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}\setminus S_j$. В силу $u_j|_{S_j} \ge 0$ для $v := u_j$ получим $B_v(\xi) \le 2\sup\limits_{z\in S_j}\exp(2q_l(z))$. Значит, $\exists g_{jp} \in A^\circ_{H+L} : \rho(g_{jp}) = X_{jp}$ и (см. (2)) $\forall z \in \mathbb{C}$

$$|g_{jp}(z)| \le 2C_2\exp(L(z) + q_2(z) + 2\sup_{t\in S_j} q_l(t) + \sup_{|t-z|\le 1} u_j(t) + 2\log(1+|z|^2)).$$

Учитывая оценки сверху для u_j и то, что $\sup\limits_{t\in S_j} q_l(t) = \bar{\bar{o}}(|z_j|)$, $j \to \infty$, будем иметь $\forall n$ $\exists k > n$ $\exists c_n < \infty : \forall z \in \mathbb{C}$

$$|g_{jp}(z)| \le c_n\exp(H(z) + L(z) + |z|/n - H(z_j) - |z_j|/k) \quad \forall 1 \le p \le n_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В силу ([21], сс. 65, 66) $\forall n$ $\exists m$ $\exists \tilde{B}_n < \infty$:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}|\lambda_{jp}|a_{jn} \le \tilde{B}_n\pi_m\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}\lambda_{jp}X_{jp}\Big)$$

для любого $X = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}\lambda_{jp}X_{jp} \in \lambda(A,\mathbb{E})$ (см. определение 2). Учитывая (3), получим $\forall n$ $\exists k$ $\exists m = m(k)$ $\exists c_n < \infty$:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}|\lambda_{jp}|\,\|g_{jp}\|_n \le c_n\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}|\lambda_{jp}|a_{jk} \le c_n\tilde{B}_k\pi_m\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}\lambda_{jp}X_{jp}\Big).$$

Таким образом, для любого $X = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}\lambda_{jp}X_{jp} \in \lambda(A,\mathbb{E})$ семейство $(\lambda_{jp}g_{jp})_{1\le p\le n_j,\, j\in\mathbb{N}}$ абсолютно суммируемо в A°_{H+L}, а линейный оператор $\varkappa : \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}\lambda_{jp}X_{jp} \to \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{p=1}^{n_j}\lambda_{jp}g_{jp}$ непрерывно отображает $\lambda(A,\mathbb{E})$ в A°_{H+L}. При этом $\varkappa$ является ЛНПО для ρ. В силу утверждения ii) леммы 2 $\hat{\mu}\cdot A^\circ_H = \operatorname{Ker}\rho$. Следовательно, $\hat{\mu}\cdot A^\circ_H$ дополнимо в A°_{H+L}. $\square$

Замечание 5. В ходе доказательства леммы 5 попутно установлен следующий результат. Пусть оператор $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ сюръективен; существует открытая окрестность U множества $V(\hat{\mu})$, удовлетворяющая условиям а)–в) леммы 3. Тогда отображение $\rho : A^\circ_{H+L} \to \lambda(A,\mathbb{E})$ — топологический гомоморфизм "на".

Лемма 6. *Пусть выпуклый компакт G в $\mathbb{C}$ отличен от точки; φ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ такое, что $\varphi(0) = \infty$ и $\inf\limits_{a\in A_\mu} D(a) > 0$, где функция D определена формулой* (1). *Тогда для любого $b \in \Gamma(A_\mu)$ существует субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция u_b такая, что $\forall m$ $\exists k : \forall b \in \Gamma(A_\mu)$ $u_b(b) \ge 0$ и*

$$u_b(z) \le H(z) + |z|/m - H(b) - |b|/k \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство является модификацией доказательства ([14], предложение 6). Положим для $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}_+ := \{t \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} t > 0\}$

$$u(z,w) := \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \operatorname{Re}(\varphi(e^{-w}e^{i\theta})z) = H_{\exp(-\operatorname{Re} w)}(z).$$

Функция u плюрисубгармонична в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_+$. Возьмем такое $c > 0$, что

$$c \le D(a) \quad \forall a \in A_\mu. \tag{4}$$

По ([22], теорема 2.2) функция

$$v(z) := \inf_{w\in\mathbb{C}_+} (u(z,w) - c \operatorname{Re} w) = \inf_{0<r<1} (H_r(z) + c\log r), \quad z \in \mathbb{C},$$

субгармонична в $\mathbb{C}$. В силу (4) $v(a) \ge H(a)$ $\forall a \in A_\mu$. Для $b \in \Gamma(A_\mu)$, $b \ne 0$, положим $u_b(z) := |b|v(z/|b|) - H(b)$. Тогда $u_b(b) \ge 0$ $\forall b \in \Gamma(A_\mu)$, $b \ne 0$.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Определим такое $r \in (0,1)$, что $\forall z \in \mathbb{C}$ $H_r(z) \le H(z) + |z|/m$. Затем определим $k \in \mathbb{N}$, для которого $1/k \le -c\log r$. Получим $\forall b \in \Gamma(A_\mu)$, $b \ne 0$,

$$u_b(z) \le H_r(z/|b|)|b| + |b|c\log r - H(b) \le H(z) + |z|/m - H(b) - |b|/k \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Наконец, положим $u_0(z) := H(z)$, $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Лемма 7. *Пусть выпуклый компакт G в $\mathbb{C}$ отличен от точки, $K = \{0\}$; φ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ такое, что $\varphi(0) = \infty$; функция D определена формулой* (1). *Если оператор свертки $T_\mu : A(G) \to A(G)$ имеет ЛНПО, то* $\inf_{a\in A_\mu} D(a) > 0$.

Доказательство. Согласно ([10], сс. 182, 183, 150) существует открытая окрестность U множества $V(\hat\mu)$, удовлетворяющая условиям а)–в) леммы 3 и состоящая из компонент S_j таких, что $\forall j \in \mathbb{N}$ $\exists z_j \in S_j \cap V(\hat\mu)$. В силу замечаний 2 и 5 существует ЛНПО $\varkappa$ для отображения $\rho : A_H^\circ \to \lambda(A,\mathbb{E})$. Положим

$$\hat z_m := z_j, \quad \sum_{k=0}^{j-1} n_k < m \le \sum_{k=0}^{j} n_k, \quad j \in \mathbb{N} \quad (n_0 := 0);$$

$$\hat A := (\exp(-H(\hat z_m) - |\hat z_m|/n))_{m,n\in\mathbb{N}}.$$

Пусть X_{jp}, $1 \le p \le n_j$, $j \in \mathbb{N}$, — такие же, как при доказательстве леммы 5. Согласно ([21], лемма 1.4) отображение

$$T : \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^{n_j} \lambda_{jp} X_{jp} \mapsto (\lambda_{jp})_{1\le p\le n_j,\, j\in\mathbb{N}}$$

является линейным топологическим изоморфизмом $\lambda(A,\mathbb{E})$ на $\lambda(\hat A)$. При этом $\exists k_0$ $\forall n \exists D_0 < \infty$:

$$\pi_n(T(X)) \le D_0 \pi_{n+k_0}(X) \quad \forall X \in \lambda(A,\mathbb{E}). \tag{5}$$

Положим $Q_n := \overline{\mathbb{C}} \setminus \varphi(\mathbb{D}_{\exp(-1/n)})$, $n \in \mathbb{N}$. В силу замечания 4 Q_n — выпуклые компакты, причем $Q_{n+1} \subseteq \operatorname{int} Q_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, и $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Введем нормы $p_n(f) := \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-H_{Q_n}(z))$. Вследствие ([15], 1.10) существует такой линейный топологический изоморфизм q ЛВП A_H° на $\Lambda_0((m))$ (см. определение 2), что $\exists k_1$ $\forall n$ $\exists D_1 < \infty$:

$$p_n(q^{-1}(c)) \le D_1 \pi_{n+k_1}(c) \quad \forall c \in \Lambda_0((m)). \tag{6}$$

Определим диагональный оператор $\chi : \lambda(\hat A) \to \Lambda_0((|\hat z_m|))$, $(c_m)_{m\in\mathbb{N}} \mapsto (c_m \exp(-H(\hat z_m)))_{m\in\mathbb{N}}$. Положим $M := q \circ \varkappa \circ T^{-1} \circ \chi^{-1}$. Тогда M — линейный топологический изоморфизм $\Lambda_0((|\hat z_m|))$ на $\Lambda_0((m))$. Согласно [23] $\exists b$ $\forall n$ $\exists D_2 < \infty$:

$$\pi_n(M(c)) \le D_2 \pi_{bn}(c) \quad \forall c \in \Lambda_0((|\hat z_m|)). \tag{7}$$

Так как $\varkappa = q^{-1} \circ M \circ \chi \circ T$, то в силу (5)–(7) $\exists d \, \forall n \, \exists B < \infty$:

$$p_n(\varkappa(X)) \leq B\pi_{dn}(X) \quad \forall X \in \lambda(A, \mathbb{E}).$$

В частности,

$$\sup_{z \in S_j} |\varkappa(X_{j1})(z)| \exp(-H_{Q_n}(z)) \leq B \exp(-H(z_j) - \frac{1}{dn}|z_j|) \quad \forall n, j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $|e_{j1}|_j = \inf_{\xi \in e_{j1}} \sup_{z \in S_j} |\xi(z)| = 1$, то $\exists w_j \in S_j : |\varkappa(X_{j1})(w_j)| \geq 1/2$. Значит, $H_{Q_n}(w_j) - H(z_j) \geq -\log(2B) + \frac{1}{dn}|z_j|$ и $\forall z_j \neq 0$

$$n(H_{Q_n}(w_j/|z_j|) - H(z_j/|z_j|)) \geq -\frac{n\log(2B)}{|z_j|} + \frac{1}{d} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что в силу леммы 3 A_μ совпадает с множеством всех предельных точек последовательности $(z_j/|z_j|)_{j \in \mathbb{N}}$. При этом, если для $a \in A_\mu$ $z_{j_s}/|z_{j_s}| \to a$, $s \to \infty$, то и $w_{j_s}/|z_{j_s}| \to a$, $s \to \infty$. Поэтому $n(H_{\exp(-1/n)}(a) - H(a)) \geq 1/d \; \forall a \in A_\mu$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Значит,

$$D(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{H_{\exp(-1/n)} - H(a)}{1/n} \geq \frac{1}{d} \quad \forall a \in A_\mu. \quad \square$$

Далее потребуются некоторые факты из геометрической теории функций комплексного переменного.

Замечание 6. Пусть G — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ с непустой внутренностью. По теореме Каратеодори конформное отображение φ единичного круга $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ ($\varphi(0) = \infty$) продолжается до гомеоморфизма $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{int} G$. Для любого $z \in \partial\mathbb{D}$, для любого угла Штольца $W := \{t \in \mathbb{D} | \arg(1 - \bar{z}t) < \pi/2 - \delta\}$ $(0 < \delta < \pi/2)$ с вершиной z существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{t \to z \\ t \in W}} \frac{\varphi(t) - \varphi(z)}{t - z}$, называемый угловой производной φ в z.

Доказательство. Вследствие выпуклости G можно предположить, что $z = 1$, $\varphi(1) = 0$ и $G \subseteq \{t \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} t \geq 0\}$. Положим $f(t) := \frac{t-1}{t+1}$. Функция $F := \varphi^{-1} \circ f$ конформно отображает $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$. По теореме Каратеодори ([24], теорема 1.5) угловая производная F в 1 принадлежит $(0, +\infty]$. Так как $\frac{F(t) - F(1)}{t-1} = \frac{\varphi^{-1}(f(t)) - \varphi^{-1}(0)}{f(t)} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1}$ и $f'(1) = 1/2$, то для каждого угла $V := \{t \in \mathbb{C} \mid |\arg t - \pi| < \pi/2 - \delta'\}$ $(0 < \delta' < \pi/2)$ существует предел $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \in V}} \frac{\varphi^{-1}(t) - \varphi^{-1}(0)}{t}$ в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Пусть существует касательная к ∂G в точке $\varphi(1)$. По теореме Линделефа ([25], теорема 10.4) для каждого угла Штольца W с вершиной 1 существуют окрестность U точки 1 и угол V такие, что $\varphi(W \cap U) \subseteq V$. Отсюда следует, что для каждого угла Штольца W с вершиной 1 существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t \in W}} \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t - 1}$.

Пусть теперь $\varphi(1)$ — угловая точка ∂G. Это означает, что существуют $\alpha \in (0, 1)$ и θ_1, θ_2 такие, что $0 < \theta_2 - \theta_1 < \alpha\pi$, $\operatorname{Re}(\varphi(1)e^{i\theta_j}) = H(e^{i\theta_j})$, $j = 1, 2$; $G \subseteq \{t \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(te^{i\theta_j}) \leq H(e^{i\theta_j}),\ j = 1, 2\}$, и это α — наименьшее с такими свойствами. Согласно ([25], теорема 10.6) существует угловая производная φ в 1, равная 0. $\square$

Замечание 7. а) Пусть $\operatorname{int} G \neq 0$. Для $z \in \partial\mathbb{D}$ пусть $\varphi(z)$ — угловая точка ∂G и $\alpha \in (0, 1)$, θ_1 и θ_2 такие, как в замечании 6. Тогда $D(e^{i\theta}) = 0 \; \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

б) Если $G = [-1, 1]$ и $\varphi(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$, то $D(a) = 0 \; \forall a \notin \{-i, i\}$, $|a| = 1$, и $D(-i) = D(i) = 1$.

Докажем a). Без ограничения общности можно считать, что $z = 1$, $\varphi(1) = 0$, $\pi/2 < \theta_1 < \pi < \theta_2 < 3\pi/2$ и $\theta = \pi$. Пусть G_1 — такой выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, что $G \subseteq G_1$, ∂G_1 симметрична относительно действительной прямой, $0 \in \partial G_1$ и 0 — угловая точка ∂G_1. Пусть φ_1 — конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus G_1$ такое, что $\varphi_1(0) = \infty$ и $\varphi_1(z) = \overline{\varphi_1(\bar{z})}$ $\forall z \in \mathbb{D}$; $H_{r,1}$ — опорная функция $\varphi_1(\mathbb{D}_r)$, $0 < r < 1$. В силу симметричности $\varphi_1(\mathbb{D}_r)$ относительно действительной прямой $H_{r,1}(-1) = \varphi_1(r)$, $0 < r < 1$. По лемме Шварца $|(\varphi^{-1} \circ \varphi_1)(z)| \le |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$. Значит, $\varphi_1(\mathbb{D}_r) \subseteq \varphi(\mathbb{D}_r)$ и $H_r(-1) \le H_{r,1}(-1) = \varphi_1(r)$, $0 < r < 1$. Учитывая замечание 6, получим

$$D(-1) = \lim_{r \to 1-0} \frac{H_r(-1) - H(-1)}{1 - r} \le \lim_{r \to 1-0} \frac{\varphi_1(r) - \varphi_1(1)}{1 - r} = 0.$$

Утверждение б) проверяется непосредственно.

Теорема 1. *Пусть G и K — выпуклые компакты в $\mathbb{C}$, причем G не совпадает с точкой; функционал $\mu \in A(K)' \setminus \{0\}$ таков, что множество нулей функции $\hat{\mu}$ бесконечно и оператор свертки $T_\mu : A(G + K) \to A(G)$ сюръективен. Пусть φ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ такое, что $\varphi(0) = \infty$; функция D определена формулой* (1). *Следующие утверждения равносильны:*

а) *$T_\mu : A(G + K) \to A(G)$ имеет ЛНПО.*

б) *$\inf\limits_{a \in A_\mu} D(a) > 0$, где A_μ — множество предельных точек последовательности $(z/|z|)_{z \in V(\hat{\mu})}$.*

в) *Для любого $b \in \Gamma(A_\mu)$ существует субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция u_b со следующими свойствами: $\forall m\ \exists k : \forall b \in \Gamma(A_\mu)$ $u_b(b) \ge 0$ и $u_b(z) \le H(z) + |z|/m - H(b) - |b|/k$ $\forall z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Пусть $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$ имеет ЛНПО. Следуя [15], возьмем последовательность $(d_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq V(\hat{\mu})$, для которой множество всех предельных точек последовательности $(d_j/|d_j|)_{j \in \mathbb{N}}$ совпадает с A_μ, а функция $d(z) := \prod_{j=1}^{\infty}(1 - z/d_j)$, $z \in \mathbb{C}$, является целой функцией минимального типа при порядке 1. Положим $c := \hat{\mu}/d$. Существуют функционалы $\gamma \in A(K)'$ и $\nu \in A(\{0\})'$ такие, что $\hat{\gamma} = c$ и $\hat{\nu} = d$. Если R — ЛНПО для T_μ, то вследствие $T_\mu = T_\nu \circ T_\gamma$ оператор $T_\gamma \circ R$ является ЛНПО для $T_\nu : A(G) \to A(G)$. В силу леммы 7 $\inf_{a \in A_\mu} D(a) > 0$.

Импликация б) $\Rightarrow$ в) выполняется по лемме 6.

в) $\Rightarrow$ б). Построим функцию d и функционал $\nu \in A(\{0\})'$, как при доказательстве импликации а) $\Rightarrow$ б). Согласно [10] существует открытая окрестность U множества $(d_j)_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условиям леммы 3 и состоящая из компонент S_p таких, что $\forall p \in \mathbb{N}$ $\exists z_p \in S_p \cap (d_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Выберем последовательность $a_p \in A_\mu$, $p \in \mathbb{N}$, для которой $|a_p - z_p/|z_p|| \to 0$, $p \to \infty$. Пусть субгармонические в $\mathbb{C}$ функции v_p таковы, что $\forall m\ \exists k > 1 : \forall p \in \mathbb{N}$ $v_p(a_p|z_p|) \ge 0$ и $v_p(z) \le H(z) + \frac{1}{m+1}|z| - H(a_p|z_p|) - \frac{1}{k-1}|z_p|$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Так как найдется константа C_1, для которой $H(z_p) \ge H(a_p|z_p|) - C_1|a_p|z_p| - z_p|$ $\forall p \in \mathbb{N}$, то $\forall k > 1$ $\exists C_2 < \infty : H(z_p) \ge H(a_p|z_p|) - \frac{1}{k(k-1)}|z_p| - C_2$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Положим $u_p(z) := \sup\limits_{a \in S_p} v_p(z + a_p|z_p| - a)$. Тогда u_p, $p \in \mathbb{N}$, — субгармонические в $\mathbb{C}$ функции, для которых $u_p|_{S_p} \ge 0$. Поскольку $\sup\limits_{a \in S_p} |a_p|z_p| - a| = \bar{o}(|z_p|)$, $p \to \infty$, то, учитывая полуаддитивность H, получим $\forall m\ \exists k\ \exists C_3 < \infty : \forall p \in \mathbb{N}$

$$u_p(z) \le H(z) + |z|/m - H(z_p) - |z_p|/k + C_3 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

В силу леммы 5 $d \cdot A_H^\circ$ дополнимо в A_H°. По лемме 7 $\inf\limits_{a \in A_\mu} D(a) > 0$.

б) $\Rightarrow$ а). Пусть $\inf\limits_{a \in A_\mu} D(a) > 0$. По замечанию 7 $A_\mu \subseteq S_G$. По лемме 3 и замечанию 3 существует открытая окрестность U множества $V(\hat{\mu})$, удовлетворяющая условиям а)–в) леммы 3 и состоящая из компонент S_j таких, что $\forall j \in \mathbb{N}$ $\exists z_j \in S_j \cap V(\hat{\mu})$. Выберем $a_j \in A_\mu$ так, чтобы $|a_j - z_j/|z_j|| \to 0$, $j \to \infty$. По лемме 6 существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции v_j такие, что $\forall m\ \exists k > 1 : \forall j \in \mathbb{N}$ $v_j(a_j|z_j|) \ge 0$ и $v_j(z) \le H(z) + \frac{1}{m+1}|z| - H(a_j|z_j|) - \frac{1}{k-1}|z_j|$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Точно так же, как при доказательстве импликации в) $\Rightarrow$ б) (с помощью леммы 5), получим, что $\hat{\mu}\cdot A_H^\circ$ дополнимо в A_{H+L}°. Значит, в силу замечания 2 оператор $T_\mu : A(G+K)\to A(G)$ имеет ЛНПО. $\square$

Следствие. Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и функционал $\mu\in A(K)'\setminus\{0\}$ таков, что множество нулей функции $\hat{\mu}$ бесконечно.

а) Пусть G — отличный от точки отрезок, для которого $H(b)=H(-b)$, где $|b|=1$. Сюръективный оператор свертки $T_\mu : A(G+K)\to A(G)$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда $A_\mu\subseteq\{-b,b\}$.

б) Пусть G — выпуклый компактный многоугольник с непустой внутренностью; $\{b_s\}_{1\le s\le n}\subseteq\partial\,\mathbb{D}$ — множество внешних нормалей ко всем сторонам G. Сюръективный оператор $T_\mu : A(G+K)\to A(G)$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда $A_m\subseteq\{\bar{b}_s\}_{1\le s\le n}$.

Доказательство. Утверждение а) вытекает из замечания 7 б) и теоремы 1.

б) Пусть $T_\mu : A(G+K)\to A(G)$ имеет ЛНПО. По теореме 1 $\inf\limits_{a\in A_\mu} D(a)>0$. Вследствие замечания 7 а) $A_\mu\subseteq\{\bar{b}_s\}_{1\le s\le n}$.

Пусть теперь $A_\mu\subseteq\{\bar{b}_s\}_{1\le s\le n}$. Построим замкнутый круг B_s, содержащийся в G и касающийся стороны с внешней нормалью b_s, $1\le s\le n$. Ясно, что для кругов B_s (вместо G) и $\{\bar{b}_s\}_{1\le s\le n}$ (вместо A_μ) выполняется утверждение б) теоремы 1. Тогда по лемме 6 существуют субгармонические в $\mathbb{C}$ функции u_b, $b\in\bigcup\limits_{1\le s\le n}\Gamma(\{\bar{b}_s\})\supseteq\Gamma(A_\mu)$, такие, что $\forall m\ \exists k : \forall b\in\Gamma(\{\bar{b}_s\})$, $\forall 1\le s\le n$ $u_b(b)\ge 0$ и $u_b(z)\le H_{B_s}(z)+|z|/m-H_{B_s}(b)-|b|/k\ \forall z\in\mathbb{C}$. Поскольку $H_{B_s}(z)\le H(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$, и $H_{B_s}(b)=H(b)\ \forall b\in\Gamma(\{\bar{b}_s\})$, $1\le s\le n$, то для G и A_μ выполняется утверждение в) теоремы 1. Значит, по теореме 1 $T_\mu : A(G+K)\to A(G)$ имеет ЛНПО. $\square$

Замечание 8. Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и $\mu\in A(K)'\setminus\{0\}$. Если G совпадает с точкой, то $T_\mu : A(G+K)\to A(G)$ имеет ЛНПО тогда и только тогда, когда $K=\{w\}$ и $\hat{\mu}(z)=P(z)\exp(wz)$, $z\in\mathbb{C}$, для некоторых $w\in\mathbb{C}$ и ненулевого многочлена P (при $K=\{0\}$ этот результат следует из [7]).

Лемма 8. *Пусть выпуклый компакт G отличен от точки; φ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ такое, что $\varphi(0)=\infty$; функция D определяется формулой* (1). *Следующие утверждения равносильны:*

а) $\inf\limits_{|a|=1} D(a)>0$;

б) $\inf\limits_{|z|<1}|\varphi'(z)|>0$.

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства леммы 3.4 из [18].

а) $\Rightarrow$ б). Существует такая константа $c>0$, что для всех $a\in\partial\,\mathbb{D}$

$$\inf_{0<r<1}\frac{H_r(a)-H(a)}{1-r}=\min\left\{\inf_{0<r<1/2}\frac{H_r(a)-H(a)}{1-r},\right.$$
$$\left.\inf_{1/2\le r<1}\frac{-\log r}{1-r}\,\frac{H_r(a)-H(a)}{-\log r}\right\}\ge\min\{H_{1/2}(a)-H(a),\ D(a)\}\ge c.$$

Зафиксируем $z\in\mathbb{D}$. По классической теореме о расстоянии для конформных отображений ([25], следствие 1.4) $|\varphi'(z)|\ge\frac{1}{2}\operatorname{dist}(\varphi(z),\,\partial G)/(1-|z|)$. Возьмем такое $a\in\partial\,\mathbb{D}$, что $\mathrm{Re}(\varphi(z)a)=H_{|z|}(a)$. Так как $\operatorname{dist}(\varphi(z),\,\partial G)\ge H_{|z|}(a)-H(a)$, то $|\varphi'(z)|\ge c/2$.

б) $\Rightarrow$а). Пусть $d:=\inf\limits_{|z|<1}|\varphi'(z)|>0$. Зафиксируем $a\in\partial\,\mathbb{D}$. Выберем $z\in\partial\,\mathbb{D}$, для которого $H(a)=\mathrm{Re}(\varphi(z)a)$. Если для $r\in(0,1)$ $\varphi(w_r)$ — точка пересечения $\partial\,G_r$ и внешней нормали к $\partial\,G$

в $\varphi(z)$, то $\operatorname{dist}(\varphi(w_r), \partial G) = \operatorname{Re}((\varphi(w_r) - \varphi(z))a)$. По ([25], следствие 1.4)

$$D(a) = \lim_{r\to 1-0} \frac{H_r(a) - H(a)}{1-r} \geq \liminf_{r\to 1-0} \frac{\operatorname{Re}((\varphi(w_r) - \varphi(z))a)}{1-r} \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} \liminf_{r\to 1-0} |\varphi'(w_r)| \geq \frac{d}{2}.$$

□

Из теоремы 1 и леммы 8 вытекает

Теорема 2. *Пусть выпуклый компакт G в $\mathbb{C}$ отличен от точки; φ — конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ такое, что $\varphi(0) = \infty$; функция D определена формулой (1); K - выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Утверждение:* в) *любой сюръективный оператор свертки $T_\mu : A(G+K) \to A(G)$, $\mu \in A(K)'$, имеет ЛНПО — равносильно утверждениям* а), б) *из леммы* 8.

Замечание 9. Каждое из эквивалентных условий в теореме 2 выполняется, например, если G имеет границу класса C^λ для некоторого $\lambda > 1$, и не выполняется, если ∂G имеет угловые точки.

Авторы выражают признательность Л.А.Аксентьеву за внимание к работе.

Литература

1. Martineau A. *Équations différentielles d'ordre infini* // Bull. Soc. math. France. – 1967. – V. 95. – P. 109–154.
2. Коробейник Ю.Ф. *О решениях некоторых функциональных уравнений в классах функций, аналитических в выпуклых областях* // Матем. сб. – 1968. – Т. 75. – № 2. – С. 225–234.
3. Моржаков В.В. *Об уравнениях свертки в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях и на выпуклых компактах в $\mathbb{C}^n$* // Матем. заметки. – 1974. – Т. 16. – № 3. – С. 431–440.
4. Епифанов О.В. *Уравнение свертки в комплексной области* // Исследов. по теории операторов. – Уфа, 1988. – С. 48–58.
5. Кривошеев А.С. *Критерий разрешимости неоднородных уравнений свертки в выпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – Т. 54. – № 3. – С.480–500.
6. Momm S. *Division problems in spaces of entire functions of finite order* // Funct. Anal., Bierstedt, Pietsch, Ruess, Vogt (eds.) – Marcel Dekker, New York, 1993. – P. 435–457.
7. Meise R., Taylor B.A. *Sequence space representations for (FN)-algebras of entire functions modulo closed ideals* // Studia math. – 1987. – T. 85. – № 3. – S. 203–227.
8. Коробейник Ю.Ф. *О правом обратном операторе для оператора свертки* // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43. – № 9. – С. 1167–1176.
9. Langenbruch M. *Continuous linear right inverses for convolution operators in spaces of real analytic functions* // Studia math. – 1994. – T. 110. – № 1. – S. 65–82.
10. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
11. Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* – М.: Мир, 1968. – 279 с.
12. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций.* I. *Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. – 1972. – Т. 87. – № 4. – С. 459–489.
13. Епифанов О.В. *Разрешимость уравнения свертки в выпуклых областях* // Матем. заметки. – 1974. – Т. 15. – № 5. – С. 787–796.
14. Momm S. *Convolution equations on the analytic functions on convex domains in the plane* // Bull. sci. math. – 1994. – T. 118. – P. 259–270.

15. Коробейник Ю.Ф., Мелихов С.Н. *Линейный непрерывный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки* // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 1. – С. 70–84.
16. Momm S. *On the dependence of analytic solutions of partial differential equations from the right-hand side* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 345. – P. 729–752.
17. Langenbruch M., Momm S. *Complemented submodules in weighted spaces of analytic functions* // Math. Nachr. – 1992. – Bd. 157. – S. 263–276.
18. Momm S. *Convex univalent functions and continuous linear right inverses* // J. Funct. Anal. – 1992. – V. 103. – P. 85–103.
19. Berenstein C.A., Taylor B.A. *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable* // Advances Math. – 1979. – V. 33. – № 2. – P. 109–143.
20. Jarchow H. *Locally convex spaces.* – Stuttgart: Teubner, 1981. – 548 p.
21. Meise R. *Sequence space representations for* (DFN)*-algebras of entire functions modulo closed ideals* // J. reine und angew. Math. – 1985. – Bd. 363. – S. 59–95.
22. Kiselman C.O. *The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions* // Invent. math. – 1978. – Bd. 49. – № 2. – S. 137–148.
23. Dubinsky E. *Nonlinear analysis in different kinds of Fréchet spaces* // Nonlinear analysis and applications (St. Johns Nfld., 1981). Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 83. – Dekker, New York: 1982. – P. 91-116.
24. Ahlfors L.V. *Conformal invariants.* Topics in geometric function theory. – New York: McGraw-Hill, 1973. – 157 p.
25. Pommerenke C. *Univalent functions with a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen.* – Göttingen: Vandenhoek and Ruprecht, 1975. – 376 p.

Ростовский государственный университет
Математический институт
университете Дюссельдорфа (ФРГ)

Поступила
04.11.1994