ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 519.10

Р.А. БЕРДЫШЕВА, В.А. ЕМЕЛИЧЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ УСТОЙЧИВОСТИ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Проблема устойчивости задач дискретной оптимизации к возмущениям ее параметров привлекла внимание многих специалистов (см., напр., [1] и обзоры [2], [3]). Потребность в исследовании устойчивости задачи оптимизации вызвана неточностью исходных данных, неадекватностью математических моделей реальным процессам, погрешностью вычислений на ЭВМ, появлением алгоритмов, состоящих из решения последовательности "близких" задач, необходимостью проведения параметрического и постоптимального анализа и другими факторами.

Наиболее детально исследована устойчивость однокритериальных траекторных задач дискретной оптимизации, в схему которых легко вписываются все известные оптимизационные задачи на графах, задачи булева программирования и некоторые задачи теории расписаний [3]–[7]. В основу этих исследований положено понятие радиуса устойчивости, впервые введенное в работе [4].

Необходимые и достаточные условия трех типов устойчивости (в нашей терминологии — устойчивость, квазиустойчивость и стабильность) множества Парето векторной задачи целочисленного линейного программирования были получены в [8]–[10].

Исследованию устойчивости векторных траекторных задач с широко известными в дискретной оптимизации частными критериями вида MINSUM (линейный), MINMAX (узкого места) и MINMIN посвящены работы [11]–[14]. Здесь найдены достижимые оценки, а в ряде случаев — и формулы для радиуса всех трех типов устойчивости множества Парето.

Выявлению условий устойчивости и нахождению радиуса устойчивости одной эффективной (оптимальной по Парето, Слейтеру или Смейлу) траектории посвящены статьи [15], [16].

В данной работе рассматривается векторная траекторная задача лексикографической оптимизации, состоящая в нахождении лексикографического множества. Получены условия трех типов устойчивости такой векторной задачи с частными критериями наиболее общих видов, включающих, в частности, три перечисленные выше критерия. Указаны также нижние достижимые оценки для радиусов устойчивости, квазиустойчивости и стабильности задачи в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров и исследовано ядро устойчивости, т. е. множество всех устойчивых лексикографически оптимальных траекторий.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему подмножеств (E, T), где $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m > 1$, $T \subseteq 2^E \setminus \{\emptyset\}$, т. е. T — некоторая совокупность непустых подмножеств множества E, называемых траекториями. Будем в дальнейшем предполагать, что $|T| > 1$.

Пусть на множестве E задана векторная весовая функция

$$a(e) = (a_1(e), a_2(e), \dots, a_n(e)) \in \mathbf{R}^n, \quad n \geq 1,$$

Данная работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант № Ф95-70) и Международной Соросовской программой образования в области точных наук (грант "Соросовский профессор" для второго автора).

а на множестве траекторий T — вектор-функция (векторный критерий)

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad n \geq 1,$$

компоненты которой (частные критерии) имеют вид

$$\Sigma\text{-MINMAX} \quad f_i(t) = \max\left\{ \sum_{e \in q} a_i(e) : q \subseteq t,\ |q| = \min\{|t|, k_i\}\right\} \to \min_T \tag{1.1}$$

(Σ-минимаксный критерий) или

$$\Sigma\text{-MINMIN} \quad f_i(t) = \min\left\{ \sum_{e \in q} a_i(e) : q \subseteq t,\ |q| = \min\{|t|, k_i\}\right\} \to \min_T \tag{1.2}$$

(Σ-миниминный критерий). Здесь k_i, $i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, — некоторые заданные натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 \leq k_i \leq p = \max\{|t| : t \in T\} \ \ \forall i \in N_n.$$

При $k_i = p$, $i \in N_n$, как критерий (1.1), так и (1.2) превращаются в линейный (стоимостной) критерий

$$\text{MINSUM} \qquad f_i(t) = \sum_{e \in t} a_(e) \to \min_T. \tag{1.3}$$

При $k_i = 1$, $i \in N_n$, критерий (1.1) превращается в критерий "узкого места"

$$\text{MINMAX} \quad f_i(t) = \max\{a_i(e) : e \in t\} \to \min_T,$$

а критерий (1.2) — в миниминный критерий

$$\text{MINMIN} \quad f_i(t) = \min\{a_i(e) : e \in t\} \to \min_T.$$

Отметим, что задачи с критериями вида Σ-MINMAX и Σ-MINMIN произошли из потребностей оптимального целераспределения (как отчасти и задачи с минимаксными критериями) [17].

Под n-критериальной траекторной задачей лексикографической оптимизации будем понимать задачу нахождения лексикографического множества, которое является подмножеством множества Парето и определяется следующим образом.

Пусть S_n — множество всех $n!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Траекторию $t \in T$ назовем лексикографически оптимальной, если существует такая перестановка $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \in S_n$, что для любой траектории $t' \in T$ выполняется одно из двух условий:

1) $f(t) = f(t')$,
2) $\exists k \in N_n \ (f_{S_k}(t) < f_{S_k}(t'))\, \&\, (\forall i \in N_{k-1} \ f_{S_i}(f) = f_{S_i}(t'))$.

Если $k = 1$, то последние равенства отсутствуют ($N_0 = \emptyset$).

Тем самым перестановкой s все частные критерии упорядочены (перенумерованы) по важности так, что каждый предыдущий важнее, чем все последующие. В этой ситуации сколь угодно малые потери более важного критерия предпочтительнее сколь угодно больших приращений всех менее важных критериев.

Заметим, что различные аспекты оптимизации по последовательно применяемым критериям отражены в целом ряде работ (напр., [18]–[23]).

Множество всех лексикографически оптимальных траекторий, определенных для всех $n!$ перестановок, будем называть лексикографическим множеством и обозначать через L^n, а n-критериальную задачу поиска этого множества — через Z^n.

Векторную весовую функцию $a(e)$ удобно представить в виде матрицы $A = \{a_{ij}\}_{n\times m}$, где $a_{ij} = a_i(e_j)$. Пусть I_1 и I_2 — множества тех чисел из N_n, которыми занумерованы соответственно критерии (1.1) и (1.2) ($I_1 \cup I_2 = N_n$). Если числа $k_1, k_2, \dots, k_n$ и множества E, T, I_1 и I_2 фиксированы, то матрица A может служить для индексации индивидуальной n-критериальной траекторной задачи лексикографической оптимизации. В дальнейшем такую задачу будем обозначать через $Z^n(A)$, лексикографическое множество — через $L^n(A)$, векторный критерий $f(t)$ — через $f(t, A)$, а частные критерии $f_i(t)$ — через $f_i(t, A)$.

В частном случае, когда $n = 1$, задача лексикографической оптимизации превращается в однокритериальную траекторную задачу, радиус устойчивости которой исследован В.К. Леонтьевым и Э.Н. Гордеевым в случае линейного критерия или критерия “узкого места” (см., напр., [4]–[7]).

Как обычно, возмущение матрицы $A \in \mathbf{R}^{nm}$ будем осуществлять путем сложения этой матрицы с матрицами множества

$$\mathfrak{R}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{nm} : \|B\| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\|\cdot\|$ — чебышевская норма в пространстве $\mathbf{R}^{nm}$, т. е.

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}, \quad B = \{b_{ij}\}_{n\times m}.$$

Пусть $A, B \in \mathbf{R}^{nm}$. Задачу $Z^n(A + B)$, полученную из исходной задачи $Z^n(A)$ при сложении матриц A и B, будем называть возмущенной, а матрицу B — возмущающей.

Следуя [12], [13], задачу $Z^n(A)$ назовем

— стабильной, если

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\ \ L^n(A) = L^n(A + B);$$

— устойчивой, если

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\ \ L^n(A) \supseteq L^n(A + B);$$

— квазиустойчивой, если

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\ \ L^n(A) \subseteq L^n(A + B).$$

Очевидно, свойства устойчивости и квазиустойчивости дискретной задачи $Z^n(A)$ эквивалентны свойствам полунепрерывности соответственно сверху и снизу по Хаусдорфу в точке $A \in \mathbf{R}^{nm}$ оптимального отображения $L^n : \mathbf{R}^{nm} \to 2^T$, т. е. точечно-множественного отображения, которое параметрам задачи (элементам матрицы A) ставит в соответствие лексикографическое множество (напр., [1], [2]).

Условимся в дальнейшем через I_{sum} обозначать множества тех индексов из N_n, которыми занумерован частный критерий (1.3) в вектор-функции $f(t, A)$.

2. Устойчивость

Радиусом устойчивости задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, назовем число

$$\rho_1^n(A) = \begin{cases} \sup \Omega_1(A), & \text{если } \ \Omega_1(A) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } \ \Omega_1(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где $\Omega_1(A) = \{\varepsilon > 0 : L^n(A) \supseteq L^n(A + B)\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}$.

Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^n(A)$ определяет предел возмущений элементов матрицы A, при которых не появляются новые лексикографически оптимальные траектории, хотя прежние могут исчезнуть.

Ясно, что в случае, когда $T = L^n(A)$, радиус устойчивости $\rho_1^n(A)$ равен бесконечности. Задачу $Z^n(A)$, для которой $\overline{L}^n(A) = T \setminus L^n(A) \neq \emptyset$, будем называть нетривиальной.

Из определения радиуса устойчивости с очевидностью вытекают следующие свойства.

Свойство 2.1. Пусть $\varphi > 0$. Тогда $\rho_1^n(A) \geq \varphi$, если

$$\overline{L}^n(A) \subseteq \overline{L}^n(A+B) \ \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi).$$

Свойство 2.2. Пусть задача $Z^n(A)$ нетривиальна, $\varphi \geq 0$. Тогда $\rho_1^n(A) \leq \varphi$, если для всякого числа $\varepsilon > \varphi$ существуют возмущающая матрица $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ и траектория $t \in \overline{L}^n(A)$ такие, что t является лексикографически оптимальной траекторией возмущенной задачи $Z^n(A+B)$.

Для двух различных траекторий t, t' введем число

$$\Delta_i(t,t') = \begin{cases} |t| + |t'| - 2|t \cap t'|, & \text{если } \ i \in I_{\text{sum}}; \\ \min\{|t|, k_i\} + \min\{|t'|, k_i\} & \text{если } \ i \notin I_{\text{sum}}. \end{cases}$$

Очевидно, $\Delta_i(t,t') > 0$ при $t \neq t'$ для любого индекса $i \in N_n$. Будем также использовать обозначение $\tau_i(t,t',A) = f_i(t,A) - f_i(t',A)$.

Прежде, чем оценить радиус устойчивости снизу, сформулируем очевидные свойства и докажем необходимую лемму.

Свойство 2.3. Траектория $t \in L^n(A)$, если существует такой индекс $i \in N_n$, что $\tau_i(t,t',A) < 0$ $\forall t' \in T$, $t' \neq t$.

Свойство 2.4. Траектория $t \in \overline{L}^n(A)$, если для всякого индекса $i \in N_n$ существует такая траектория $t' \neq t$, что $\tau_i(t,t',A) > 0$.

В дальнейшем для любого подмножества $t \subseteq E$ будем пользоваться обозначением $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$.

Лемма 2.1. *Пусть t и t' — две различные траектории, $i \in N_n = I_1 \cup I_2$, $\varepsilon > 0$. Тогда $\tau_i(t,t',A+B) > 0$ $\forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$, если*

$$\tau_i(t,t',A) \geq \varepsilon \Delta_i(t,t'). \tag{2.1}$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $k_i = p$. Тогда функция $f_i(t,A)$ линейна. Поэтому, используя неравенства (2.1) и $\|B\| < \varepsilon$, получаем

$$\tau_i(t,t',A+B) = f_i(t,A+B) - f_i(t',A+B) > f_i(t,A) - \varepsilon|t \setminus t'| - (f_i(t',A) + \varepsilon|t' \setminus t|) = \\ = \tau_i(t,t',A) - \varepsilon\Delta_i(t,t') \geq 0 \ \ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon).$$

Случай 2. $k_i < p$, $i \in I_1$. Тогда имеем

$$\tau_i(t,t',A+B) = f_i(t,A+B) - f_i(t',A+B) = \max\Big\{ \sum_{j \in N(q)} (a_{ij} + b_{ij}) : q \subseteq t, \ |q| = \min\{|t|, k_i\} \Big\} -$$

$$- \max\Big\{ \sum_{j \in N(q)} (a_{ij} + b_{ij}) : q \subseteq t', \ |q| = \min\{|t'|, k_i\} \Big\} > f_i(t,A) - \varepsilon \min\{|t|, k_i\} -$$

$$- (f_i(t',A) + \varepsilon \min\{|t'|, k_i\}) = \tau_i(t,t',A) - \varepsilon\Delta_i(t,t') \geq 0 \ \ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon).$$

Случай 3. Когда $k_i < p$, $i \in I_2$, доказательство проводится аналогично случаю 2. □

Введем обозначение

$$\varphi^n(A) = \min_{t \in \overline{L}^n(A)} \min_{i \in N_n} \max_{t' \in T \setminus \{t\}} \frac{\tau_i(t,t',A)}{\Delta_i(t,t')}.$$

Ясно, что всегда $\varphi^n(A) \geq 0$.

Теорема 2.1. *Пусть* $A \in \mathbf{R}^{nm}$. *Для радиуса устойчивости нетривиальной траекторной задачи* $Z^n(A)$, $n \geq 1$, *с любой комбинацией частных критериев* (1.1) *и* (1.2) *справедлива оценка*

$$\rho_1^n(A) \geq \varphi^n(A), \tag{2.2}$$

причем

$$\rho_1^n(A) = \varphi^n(A), \tag{2.3}$$

если $I_{\text{sum}} = N_n$, *т. е. все частные критерии являются линейными* (*вида* MINSUM (1.3)).

Доказательство. Сначала докажем неравенство (2.2). Это неравенство очевидно, если $\varphi^n(A) = 0$.

Пусть $\varphi = \varphi^n(A) > 0$. Тогда $\mathfrak{R}(\varphi) \neq \emptyset$ и в силу определения числа φ для любой траектории $t \in \overline{L}^n(A)$ и всякого индекса $i \in N_n$ существует такая траектория $t' \neq t$, что $\tau_i(t, t', A) \geq \varphi\Delta_i(t, t')$. Поэтому на основании леммы 2.1 имеем $\tau_i(t, t', A+B) > 0\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi)$. Отсюда согласно свойству 2.4 выводим $t \in \overline{L}^n(A+B)\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi)$. Следовательно, получаем $\overline{L}^n(A) \subseteq \overline{L}^n(A+B)\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi)$, т. е. в силу свойства 2.1 неравенство (2.2) справедливо.

Для доказательства равенства (2.3) покажем, что $\rho_1^n(A) \leq \varphi$, если $I_{\text{sum}} = N_n$. Пусть $0 \leq \varphi < \varepsilon$. Тогда, ввиду определения числа φ, найдутся траектория $t \in \overline{L}^n(A)$ и индекс $k \in N_n$ такие, что справедливо неравенство

$$\varphi = \max\left\{\frac{\tau_k(t, t', A)}{\Delta_k(t, t')} : t' \in T,\ t' \neq t\right\} < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Поэтому, если в качестве возмущающей матрицы $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ возьмем матрицу с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} -b, & \text{если}\ \ i = k,\ j \in N(t); \\ b, & \text{если}\ \ i = k,\ j \notin N(t); \\ 0, & \text{если}\ \ i \neq k,\ j \in N_m, \end{cases}$$

где $\varphi < b < \varepsilon$, то ввиду линейности $\tau_k(t, t', A)$ с учетом (2.4) будем иметь

$$\tau_k(t, t', A+B) = \tau_k(t, t', A) - b\Delta_k(t, t') < \tau_k(t, t', A) - \varphi\Delta_k(t, t') \leq 0\ \ \forall t' \in T,\ \ t' \neq t.$$

Отсюда согласно свойству (2.3) t является лексикографически оптимальной траекторией возмущенной задачи $Z^n(A+B)$. Следовательно, в силу свойства 2.2 получаем $\rho_1^n(A) \leq \varphi$.

Собирая все доказанное, убеждаемся в справедливости теоремы 2.1. □

Замечание 2.1. Если $n = 1$, то формула (2.3) превращается в известную формулу радиуса устойчивости однокритериальной траекторной задачи с линейным критерием [6].

Поскольку задача $Z^n(A)$ устойчива лишь в случае, когда $\rho_1^n(A) > 0$, то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. Для того чтобы нетривиальная траекторная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, была устойчивой, достаточно, а в случае, когда $I_{\text{sum}} = N_n$, и необходимо, чтобы выполнялась формула

$$\forall t \in \overline{L}^n(A)\ \ \forall i \in N_n\ \ \exists t' \in T \setminus \{t\}\ \ (\tau_i(t, t', A) > 0). \tag{2.5}$$

Отсюда следует известный результат [5]: всякая однокритериальная задача $Z^1(A)$ с линейным критерием является устойчивой.

Следующий пример показывает, что в случае, когда $I_{\text{sum}} \neq N_n$, условие (2.5), вообще говоря, не является необходимым.

Пример 2.1. Пусть $n = 2$, $m = 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T = \{t_1, t_2\}, \quad t_1 = \{e_1, e_2\}, \quad t_2 = \{e_2, e_3\},$$
$$f_1(t, A) = \max\{a_{1j} : j \in N(t)\} \to \min_T,$$
$$f_2(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{2j} \to \min_T .$$

Тогда $t_2 \in \overline{L}^2(A)$.

Так как для любой матрицы $B \in \mathfrak{R}(1/2)$ справедливы соотношения

$$\tau_1(t_1, t_2, A + B) = 0, \quad \tau_2(t_1, t_2, A + B) < 0,$$

то t_2 не является лексикографически оптимальной траекторией возмущенной задачи $Z^2(A+B)$ $\forall B \in \mathfrak{R}(1/2)$. Следовательно, задача $Z^2(A)$ является устойчивой.

В то же время справедливо равенство $\tau_1(t_1, t_2, A) = 0$, которое свидетельствует о том, что формула (2.5) неверна.

3. Квазиустойчивость

Радиусом квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, назовем число

$$\rho_2^n(A) = \begin{cases} \sup \Omega_2(A), & \text{если } \Omega_2(A) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } \Omega_2(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где $\Omega_2(A) = \{\varepsilon > 0 : L^n(A) \subseteq L^n(A + B) \ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}$.

Иными словами, такой радиус определяет предел возмущений элементов матрицы A, при которых в возмущенной задаче сохраняются все лексикографические оптимумы и не исключается возможность появления новых.

Следующие свойства очевидны.

Свойство 3.1. Пусть $\varphi > 0$. Тогда $\rho_2^n(A) \geq \varphi$, если

$$L^n(A) \subseteq L^n(A + B) \ \ \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi).$$

Свойство 3.2. Пусть $\varphi \geq 0$. Тогда $\rho_2^n(A) \leq \varphi$, если для всякого числа $\varepsilon > \varphi$ существуют траектория $t \in L^n(A)$ и возмущающая матрица $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ такие, что траектория t не является лексикографически оптимальной траекторией возмущенной задачи $Z^n(A + B)$.

Введем обозначение

$$\psi^n(A) = \min_{t \in L^n(A)} \max_{i \in N_n} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma_i(t, t', A), \tag{3.1}$$

где

$$\gamma_i(t, t', A) = -\frac{\tau_i(t, t', A)}{\Delta_i(t, t')}. \tag{3.2}$$

Ясно, что всегда $\psi^n(A) \geq 0$.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in \mathbf{R}^{nm}$. Для радиуса квазиустойчивости траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с любой комбинацией частных критериев* (1.1) *и* (1.2) *справедлива оценка*

$$\rho_2^n(A) \geq \psi^n(A), \tag{3.3}$$

причем $\rho_2^n(A) = \psi^n(A)$, если $I_{\text{sum}} = N_n$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство (3.3). Если $\psi^n(A) = 0$, то неравенство (3.3) очевидно. Пусть $\psi = \psi^n(A) > 0$. Тогда $\mathfrak{R}(\psi) \neq \emptyset$ и в силу определения числа ψ для всякой траектории $t \in L^n(A)$ существует такой индекс $k \in N_n$, что для любой траектории $t' \neq t$ будем иметь $\tau_k(t', t, A) \geq \psi\Delta_k(t, t')$. Поэтому на основании леммы 2.1 убеждаемся в справедливости неравенств

$$\tau_k(t', t, A + B) > 0 \ \ \forall B \in \mathfrak{R}(\psi) \ \ \forall t' \in T, \ \ t' \neq t.$$

Отсюда в силу свойства 2.3 получаем $t \in L^n(A + B)$ $\forall B \in \mathfrak{R}(\psi)$, т. е.

$$L^n(A) \subseteq L^n(A + B) \ \ \forall B \in \mathfrak{R}(\psi).$$

Следовательно, согласно свойству 3.1 выводим (3.3).

Теперь докажем, что $\rho_2^n(A) \leq \psi$, если $I_{\mathrm{sum}} = N_n$. Пусть $0 \leq \psi < \varepsilon$. Тогда, ввиду определения числа ψ, существует такая траектория $t \in L^n(A)$, что для любого индекса $i \in N_n$ найдется траектория $t' \neq t$, для которой

$$\gamma_i(t, t', A) \leq \psi \ \ \forall i \in N_n.$$

Отсюда, взяв в качестве возмущающей матрицу $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{при } \ i \in N_n, \ j \in N(t); \\ -\alpha & \text{при } \ i \in N_n, \ j \notin N(t), \end{cases}$$

где $\psi < \alpha < \varepsilon$, с учетом линейности функций $\tau_i(t, t', A)$ выводим

$$\tau_i(t, t', A + B) = \tau_i(t, t', A) + \alpha\Delta_i(t, t') > \tau_i(t, t', A) + \gamma_i(t, t', A)\Delta_i(t, t') = 0 \ \ \forall i \in N_n.$$

Поэтому в силу свойства 2.4 траектория t не является лексикографически оптимальной траекторией возмущенной задачи $Z^n(A + B)$. Следовательно, на основании свойства 3.2 получаем $\rho_2^n(A) \leq \psi$.

Суммируя все доказанное, убеждаемся в справедливости теоремы 3.1. □

Из теоремы 3.1, в частности, выводим

Следствие 3.1. Для того чтобы задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, была квазиустойчивой, достаточно, а в случае, когда $I_{\mathrm{sum}} = N_n$, и необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\forall t \in L^n(A) \ \ \exists i \in N_n \ \ \forall t' \in T \setminus \{t\} \ \ (\tau_i(t, t', A) < 0). \tag{3.4}$$

Отсюда получаем

Следствие 3.2. Если $I_{\mathrm{sum}} = N_n$, то необходимым условием квазиустойчивости задачи $Z^n(A)$ является выполнение неравенства $|L^n(A)| \leq n$.

Следующий пример показывает, что в случае, когда $I_{\mathrm{sum}} \neq N_n$, условие (3.4), вообще говоря, не является необходимым.

Пример 3.1. Пусть $n = 2$, $m = 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}, \quad t_1 = \{e_1, e_2\}, \quad t_2 = \{e_2, e_3\}, \quad t_3 = \{e_2, e_4\},$$
$$f_1(t, A) = \max\{a_{1j} : j \in N(t)\} \to \min_T,$$
$$f_2(t, A) = \sum_{j \in N(t)} a_{2j} \to \min_T.$$

Тогда $L^2(A) = \{t_1\}$.

Так как для любой матрицы $B \in \mathfrak{R}(1/2)$ справедливы выражения

$$\tau_1(t_1, t_2, A + B) = 0, \quad \tau_2(t_1, t_2, A + B) < 0, \quad \tau_1(t_1, t_3, A + B) < 0,$$

то $t_1 \in L^2(A + B)$ $\forall B \in \mathfrak{R}(1/2)$. Следовательно, задача $Z^2(A)$ является квазиустойчивой.

В то же время справедливы равенства $\tau_1(t_1, t_2, A) = 0$ и $\tau_2(t_1, t_2, A) = 0$, которые указывают, что формула (3.4) неверна.

4. Стабильность

Очевидно, задача $Z^n(A)$ стабильна тогда и только тогда, когда она одновременно устойчива и квазиустойчива. Поэтому из следствий 2.1 и 3.1 вытекает

Теорема 4.1. *Для того чтобы нетривиальная задача $Z^n(A)$, $n \geq 1$, была стабильна, достаточно, а в случае, когда $I_{\text{sum}} = N_n$, и необходимо, чтобы одновременно выполнялись формулы* (2.5) *и* (3.4).

Для радиуса стабильности $\rho_3^n(A)$ задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, который определим как число

$$\rho_3^n(A) = \begin{cases} \sup \Omega_3(A), & \text{если } \ \Omega_3(A) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } \ \Omega_3(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где $\Omega_3(A) = \{\varepsilon > 0 : L^n(A) = L^n(A + B) \ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}$, очевидно равенство

$$\rho_3^n(A) = \min\{\rho_1^n(A), \rho_2^n(A)\}.$$

Поэтому из теорем 2.1 и 3.1 выводим следующую оценку снизу для радиуса стабильности задачи $Z^n(A)$

$$\rho_3^n(A) \geq \min\{\varphi^n(A), \psi^n(A)\},$$

достижимую при $I_{\text{sum}} = N_n$.

Для некоторых частных случаев приведем другие нижние оценки радиуса стабильности. Для всякого $i \in N_n$ введем обозначения

$$k_i^0 = \min\{k_i, \min\{|t| : t \in T\}\}, \quad Q_i = \{q \subset E : k_i^0 \leq |q| \leq k_i\}.$$

Так как множество E конечно, то множества Q_i, $i \in N_n$, также конечны. Для всякого индекса $i \in N_n$ элементы множества Q_i обозначим через $q_1^i, q_2^i, \ldots, q_{p_i}^i$, где $p_i = |Q_i|$, и рассмотрим вектор $V^i = (v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{p_i}^i)$, компонентами которого являются

$$v_s^i = \sum_{j \in N(q_s^i)} a_{ij} \ \ \forall s \in N_{p_i},$$

где a_{ij} — элементы матрицы A.

Теорема 4.2. *Если компоненты каждого вектора V^i, $i \in N_n$, попарно различны, то для радиуса стабильности нетривиальной траекторной задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, с любой комбинацией частных критериев* (1.1) *и* (1.2) *справедлива оценка*

$$\rho_3^n(A) \geq \frac{1}{2} \min_{i \in N_n} \min_{1 \leq j < s \leq p_i} \frac{|v_j^i - v_s^i|}{k_i}. \tag{4.1}$$

Доказательство. В силу строения векторов V^i, $i \in N_n$, очевидны включения

$$\{f_i(t, A) : t \in T\} \subseteq \{v_j^i : j \in N_{p_i}\} \ \ \forall i \in N_n.$$

Отсюда, учитывая, что все компоненты каждого вектора V^i, $i \in N_n$, попарно различны, убеждаемся в справедливости следующих эквивалентностей для любого индекса $i \in N_n$ и любой пары траекторий $t \neq t'$:

$$f_i(t, A) = f_i(t', A) \Longleftrightarrow f_i(t, A + B) = f_i(t', A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon),$$
$$f_i(t, A) < f_i(t', A) \Longleftrightarrow f_i(t, A + B) < f_i(t', A + B) \quad \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon),$$

если

$$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \min_{i \in N_n} \min_{1 \leq j < s \leq p_i} \frac{|v_j^i - v_s^i|}{k_i}.$$

Это означает, что справедливы равенства $L^n(A) = L^n(A+B)\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$. Следовательно, верна оценка (4.1). $\square$

5. Ядро устойчивости

Траекторию $t \in L^n(A)$ назовем устойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $t \in L^n(A+B)\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$.

Множество всех устойчивых траекторий будем называть ядром устойчивости задачи $Z^n(A)$ и обозначать $K^n(A)$.

Введем также множество строгих лексикографически оптимальных траекторий задачи $Z^n(A)$:

$$S^n(A) = \{t \in L^n(A) : \exists i = i(t) \in N_n\ \forall t' \in T,\ t' \neq t\ (\tau_i(t,t',A) < 0)\}.$$

Теорема 5.1. *При любой комбинации частных критериев* (1.1) *и* (1.2) *справедливы включения* $S^n(A) \subseteq K^n(A)\ \forall A \in \mathbf{R}^{nm}$, *причем* $S^n(A) = K^n(A)$, *если* $I_{\mathrm{sum}} = N_n$.

Доказательство. Пусть $t \in S^n(A)$. Тогда существует такой индекс $i \in N_n$, что $\tau_i(t,t',A) < 0\ \forall t' \in T,\ t' \neq t$. Отсюда в силу непрерывности любой функции $f_i(t,A)$ на множестве $\mathbf{R}^{nm}$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\tau_i(t,t',A+B) < 0\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$. Поэтому на основании свойства 2.3 траектория t принадлежит множеству $L^n(A+B)$ и, следовательно, является устойчивой. Тем самым доказано, что $S^n(A) \subseteq K^n(A)$.

Докажем, что в случае, когда $I_{\mathrm{sum}} = N_n$, выполняется равенство $S^n(A) = K^n(A)$. Для этого достаточно показать, что в указанном случае никакая траектория $t \in L^n(A) \setminus S^n(A)$ не может быть устойчивой. Поскольку $t \notin S^n(A)$, то для любого индекса $i \in N_n$ найдется такая траектория $t' \neq t$, что $\tau_i(t,t',A) \geq 0$. Поэтому очевидно, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и матрицы $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} \varepsilon/2, & \text{если}\ \ i \in N_n,\ j \in N(t); \\ -\varepsilon/2, & \text{если}\ \ i \in N_n,\ j \notin N(t), \end{cases}$$

справедливы соотношения $\tau_i(t,t',A+B) = \tau_i(t,t',A) + \frac{\varepsilon}{2}\Delta_i(t,t') > 0\ \forall i \in N_n$.

Отсюда на основании свойства 2.4 траектория $t \in \overline{L}^n(A+B)$, т. е. не является устойчивой. $\square$

Из теоремы 5.1 получаем

Следствие 5.1. Если $I_{\mathrm{sum}} = N_n$, то $|K^n(A)| \leq n\ \forall A \in \mathbf{R}^{nm}$.

Замечание 5.1. С учетом эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве [24] следствия 2.1, 3.1, 3.2, 5.1 и теоремы 4.1, 5.1 справедливы не только для чебышевской, но и для других норм в пространстве возмущающих матриц $\mathbf{R}^{nm}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Ядром ε-устойчивости задачи $Z^n(A)$ будем называть множество

$$K^n_\varepsilon(A) = \{t \in L^n(A) : t \in L^n(A+B)\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\}.$$

Теорема 5.2. *Для того чтобы траектория* $t \in L^n(A)$ *принадлежала ядру* ε*-устойчивости* $K^n_\varepsilon(A)$, *достаточно, а в случае* $I_{\mathrm{sum}} = N_n$ *и необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\max_{i \in N_n} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma_i(t,t',A) \geq \varepsilon, \tag{5.1}$$

где величина $\gamma_i(t,t',A)$ *вычисляется по формуле* (3.2).

Доказательство. Достаточность. Пусть траектория $t \in L^n(A)$. Тогда в силу (5.1) существует такой индекс $k \in N_n$, что $\tau_k(t',t,A) \geq \varepsilon\Delta_k(t,t')\ \forall t' \in T,\ t' \neq t$. Поэтому на основании леммы 2.1 имеем $\tau_k(t',t,A+B) > 0\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)\ \forall t' \in T,\ t' \neq t$. Отсюда согласно свойству 2.3 получаем $t \in L^n(A+B)\ \forall B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$. Следовательно, траектория $t \in K^n_\varepsilon(A)$.

Необходимость. Пусть $I_{\text{sum}} = N_n$, $\varepsilon > 0$, $t \in K_\varepsilon^n(A)$. Предположим, что неравенство (5.1) не выполняется. Это значит, что для любого индекса $i \in N_n$ найдется такая траектория $t' \neq t$, что $\gamma_i(t, t', A) < \alpha$, где α — любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\varepsilon > \alpha > \max_{i \in N_n} \min_{t^0 \in T \setminus \{t\}} \gamma_i(t, t^0, A).$$

Поэтому для матрицы $B \in \mathfrak{R}(\varepsilon)$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{при } i \in N_n, \ j \in N(t); \\ -\alpha & \text{при } i \in N_n, \ j \notin N(t), \end{cases}$$

справедливы соотношения

$$\tau_i(t, t', A + B) = \tau_i(t, t', A) + \alpha \Delta_i(t, t') > \tau_i(t, t', A) + \gamma_i(t, t', A) \Delta_i(t, t') = 0 \ \ \forall i \in N_n.$$

Отсюда на основании свойства 2.4 траектория $t \in \overline{L}^n(A + B)$, т. е. $t \notin K_\varepsilon^n(A)$. Полученное противоречие и доказывает необходимость условий теоремы. □

Радиусом ядра устойчивости задачи $Z^n(A)$, $n \geq 1$, назовем число

$$\rho^n(A) = \sup\{\varepsilon > 0 : K_\varepsilon^n(A) \neq \emptyset\}.$$

Если $K_\varepsilon^n(A) = \emptyset \ \forall \varepsilon > 0$, то $\rho^n(A) = 0$.

Введем обозначение

$$\xi^n(A) = \max_{t \in L^n(A)} \max_{i \in N_n} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \gamma_i(t, t', A).$$

Из теоремы 5.2 легко вытекает

Теорема 5.3. *Пусть* $A \in \mathbf{R}^{nm}$. *Для радиуса ядра устойчивости траекторной задачи* $Z^n(A)$, $n \geq 1$, *с любой комбинацией частных критериев* (1.1) *и* (1.2) *справедлива оценка* $\rho^n(A) \geq \xi^n(A)$, *причем* $\rho^n(A) = \xi^n(A)$, *если* $I_{\text{sum}} = N_n$.

Литература

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.* – Киев: Наук. думка, 1995. – 169 с.
2. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. *Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации* // Кибернет. и систем. анал. – 1993. – № 3. – С. 78–93.
3. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. *Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization* // Discr. Appl. Math. – 1995. – V. 58. – P. 169–190.
4. Леонтьев В.К. *Устойчивость задачи коммивояжера* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – Т. 15. – № 5. – С. 1293–1309.
5. Леонтьев В.К. *Устойчивость в линейных дискретных задачах* // Пробл. кибернетики. – М., 1979. – Вып. 35. – С. 169–184.
6. Леонтьев В.К., Гордеев Э.Н. *Качественное исследование траекторных задач* // Кибернетика. – 1986. – № 5. – С. 82–90.
7. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. *Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 1. – С. 66–72.
8. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. *Вопросы параметрического анализа и исследования устойчивости многокритериальных задач целочисленного линейного программирования* // Кибернетика. – 1988. – № 3. – С. 41–44.
9. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. *Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 307. – № 3. – С. 527–529.
10. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. *Задача частично-целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости* // Кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 58–60.

11. Бакурова А.В., Емеличев В.А., Перепелица В.А. *Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств* // Докл. АН Беларуси. – 1995. – Т. 39. – № 2. – С. 33–35.
12. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации* // Кибернет. и систем. анал. – 1995. – № 4. – С. 137–143.
13. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. *О радиусе квазиустойчивости многокритериальной траекторной задачи* // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40. – № 1. – С. 9–12.
14. Ефимчик Н.Е., Подкопаев Д.П. *О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче векторной дискретной оптимизации* // Вестн. Белорусск. ун-та. Сер. 1. – 1996. – № 1. – С. 48–52.
15. Емеличев В.А., Гирлих Э., Подкопаев Д.П. *Об устойчивости эффективных решений векторной траекторной задачи дискретной оптимизации.* I // Изв. АН Республики Молдова. Математика. – 1996. – № 3. – С. 5–16.
16. Емеличев В.А., Гирлих Э., Подкопаев Д.П. *Об устойчивости эффективных решений векторной траекторной задачи дискретной оптимизации.* II // Изв. АН Республики Молдова. Математика. – 1997. – № 2. – С. 9–25.
17. Диниц Е.А. *О решении двух задач о назначении* // Исследов. по дискретной оптимизации. – М., 1976. – С. 333–347.
18. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. *Оптимизация по последовательно применяемым критериям.* – М.: Сов. радио, 1975. – 192 с.
19. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* – М.: Наука, 1982. – 256 с.
20. Сергиенко И.В. *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации.* – Киев: Наук. думка, 1985. – 384 с.
21. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем.* – М.: Наука, 1986. – 296 с.
22. Емеличев В.А., Гладкий А.А., Янушкевич О.А. *О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов* // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. – 1996. – № 3. – С. 82–86.
23. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. *Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58. – № 3. – С. 365–371.
24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1972. – 496 с.

Белорусский государственный
университет

Поступила
28.11.1997