УДК 515.124.4

Е.Н. СОСОВ

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей статье *“Об ε-ядре ограниченного множества в специальном метрическом пространстве”*, опубликованной в журнале “Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 9. – С. 34–37”, лемма 2 сформулирована в излишней общности. Контрпримеры для нее достаточно просто построить, и она не может быть использована для получения следствия из основной теоремы. Теорему и следствие можно доказать при выполнении в полном метрическом пространстве (X,ρ) следующих условий.

1) *Для любых x, y из X найдется единственная точка $\omega(x,y)\in X$ такая, что $\rho(x,\omega(x,y)) = \rho(y,\omega(x,y)) = \rho(x,y)/2$.*
2) *Для всех p, x, y из X выполняется неравенство $2\rho(\omega(p,x),\omega(p,y)) \le \rho(x,y)$.*
3) *Для каждого $r>0$ и для любых ограниченных последовательностей (p_n), (x_n), (y_n) пространства X, удовлетворяющих для каждого натурального n соотношениям $\rho(p_n,x_n)\le r$, $\rho(p_n,y_n)\le r$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(p_n,\omega(x_n,y_n)) = r$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$.*

Отметим, что эти условия сформулированы в [1], где они обозначены A), B), C).

В дальнейшем используются обозначения, принятые в опубликованной статье. Полное метрическое пространство X, в котором выполняется условие 1), является геодезическим пространством, в котором каждые две точки $x,y\in X$ могут быть соединены единственным геодезическим сегментом $[x,y]$ с концами в этих точках [2]. Условие 2) есть глобальное условие неположительности кривизны пространства в смысле Буземана ([3], с. 304). Простыми примерами полных метрических пространств, удовлетворяющих условиям 1)–3), являются равномерно выпуклые банаховы пространства и пространства Лобачевского (включая бесконечномерные).

Приведем точную формулировку основного результата.

Теорема. *Пусть полное метрическое пространство (X,ρ) удовлетворяет условиям 1)–3). Пусть задана последовательность непустых ограниченных множеств M_n, N_n такая, что $\delta(M_n,N_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда для любого $\varepsilon>0$*

A. $\delta(K_\varepsilon(M_n),K_\varepsilon(N_n))\to 0$, $n\to\infty$;
B. $\delta(\varepsilon(M_n),\varepsilon(N_n))\to 0$, $n\to\infty$;
C. *если для каждого натурального n множества $k_\varepsilon(M_n)$, $k_\varepsilon(N_n)$ непустые, то* $\delta(k_\varepsilon(M_n),k_\varepsilon(N_n))\to 0$, $n\to\infty$.

Приведенное в статье доказательство (см. с. 36-37) станет верным, если использовать на с. 36 в строке 10 снизу и на с. 37 в строках 5, 17 сверху нижеприведенную лемму и в соответствии с формулировкой леммы осуществить переход к подпоследовательности, а также заменить константу $c/3$ на константу a.

Лемма. *Пусть полное метрическое пространство (X,ρ) удовлетворяет условиям 1)–3). Если при заданных $r>0$, $c>0$ для каждого натурального l выполняется $z_l\in X$, $M_l\in B[X]$, $W_l=\cap\{B[x,r]: x\in M_l\}\ne\emptyset$, $\rho(z_l,W_l)>c$, то найдутся $a>0$, натуральное t_0, подпоследовательности $(z_t)\subset(z_l)$, $(M_t)\subset(M_l)$ такие, что $\zeta_t=\sup\{\rho(z_t,B[x,r]): x\in M_t\}>a$ для каждого натурального $t>t_0$.*

Доказательство. Используем метод доказательства от противного. Пусть $\zeta_l\to 0$, $l\to\infty$. Тогда найдется натуральное число l_0 такое, что $\zeta_l<c/18$ при $l>l_0$.

Для каждых натурального l и $x\in M_l$ положим $q_l(x)=[z_l,x]\cap S(x,r)$ при $z_l\in X\setminus B[x,r]$, $q_l(x)=z_l$ при $z_l\in B[x,r]$, где $S(x,r)$ — сфера с центром в точке x, радиуса $r>0$. Кроме того, для каждого натурального l выберем $w_l\in W_l$ так, чтобы $\rho(z_l,w_l)<\rho(z_l,W_l)+c/6$. Тогда для каждых

$l > l_0$ и $x \in M_l$ получим неравенства $\rho(\omega(w_l, q_l(x)), W_l) \geq \rho(q_l(x), W_l) - \rho(q_l(x), \omega(w_l, q_l(x))) \geq \rho(z_l, W_l) - \rho(z_l, q_l(x)) - \rho(q_l(x), w_l)/2 \geq \rho(z_l, W_l) - \zeta_l - \rho(q_l(x), z_l)/2 - \rho(z_l, w_l)/2 \geq \rho(z_l, W_l) - \zeta_l - \zeta_l/2 - \rho(z_l, W_l)/2 - c/12 > c/3$.

Теперь возможны лишь два случая.

Случай 1. Для каждых $l > l_0$ и $x \in M_l$ выполняется $\omega(w_l, q_l(x)) \in W_l$. Тогда получаем противоречие с тем, что $\rho(\omega(w_l, q_l(x)), W_l) > c/3$.

Случай 2. Найдутся натуральное число $\tau_0 > l_0$, подпоследовательность $(w_\tau) \subset (w_l)$ и две последовательности $(x_\tau) \subset M_\tau$, $(\widehat{x}_\tau) \subset M_\tau$ такие, что $\omega(w_\tau, q_\tau(x_\tau)) \in B[x_\tau, r]$, $\omega(w_\tau, q_\tau(\widehat{x}_\tau)) \in B[\widehat{x}_\tau, r] \setminus B[x_\tau, r]$ при $\tau > \tau_0$. Используем теперь условие 2): $2\rho(\omega(w_\tau, q_\tau(x_\tau)), \omega(w_\tau, q_\tau(\widehat{x}_\tau))) \leq \rho(q_\tau(x_\tau), q_\tau(\widehat{x}_\tau)) \leq \rho(q_\tau(x_\tau), z_\tau) + \rho(z_\tau, q_\tau(\widehat{x}_\tau)) \leq 2\zeta_\tau \to 0$, $\tau \to \infty$. Но при $\tau > \tau_0$ имеем $\omega(w_\tau, q_\tau(\widehat{x}_\tau)) \in X \setminus B[x_\tau, r]$. Следовательно, $\rho(x_\tau, \omega(w_\tau, q_\tau(x_\tau))) \to r$, $\tau \to \infty$. Из условия 3) теперь получим $\rho(q_\tau(x_\tau), w_\tau) \to 0$, $\tau \to \infty$. Но, при $\tau > \tau_0$, $\rho(q_\tau(x_\tau), w_\tau) \geq \rho(z_\tau, w_\tau) - \rho(z_\tau, q_\tau(x_\tau)) > c - \zeta_\tau > c/2 > 0$. Получили противоречие. $\square$

Приведем исправленную формулировку следствия доказанной теоремы и теоремы 3 из [1].

Следствие. Пусть полное метрическое пространство (X, ρ) удовлетворяет условиям 1)–3). Предположим, что для каждого натурального n $M_n \in B(X)$, $N_n \in B(X)$, и $\delta(M_n, N_n) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда $\delta(\mathrm{Ch}(M_n), \mathrm{Ch}(N_n)) \to 0$, $n \to \infty$, где $\mathrm{Ch}(M_n)$ – чебышевский центр множества M_n.

Доказательство. Из теоремы 3 в [1] следует, что для каждого натурального n множество $M_n \in B(X)$ (аналогично для $N_n \in B(X)$) имеет единственный чебышевский центр. В этом случае доказательство утверждения 1) теоремы (с учетом сделанных исправлений) остается верным и при $\varepsilon = 0$, если считать, что $K_0(M_n) = \mathrm{Ch}(M_n)$, $0(M_n) = B[\mathrm{Ch}(M_n), R(M_n)]$. $\square$

Автор приносит извинения читателям и редакции журнала “Известия вузов. Математика” за допущенные ошибки.

Литература

1. Sosov E.N. *On existence and uniqueness of Chebyshev center of a bounded set in a special geodesic space* // Lobachevskii J. of Math. – 2000. – V. 7. – C. 43–46.
2. Ефремович В.А. *Неэквиморфность пространств Евклида и Лобачевского* // УМН. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 178–179.
3. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 504 с.

Поступило
25.05.2001