ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 512.555

А.Н. АБЫЗОВ

ПРЯМЫЕ СУММЫ СЛАБО РЕГУЛЯРНЫХ МОДУЛЕЙ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей. Напомним некоторые определения из [1] и [2]. Правый R-модуль M будем называть слабо регулярным, если каждый его подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля M, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Правый R-модуль M называется модулем со свойством подъема, если для каждого его подмодуля N существуют такие подмодули N_1 и N_2, что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N$ косущественен в N_2.

В статье [3] описывались полусовершенные кольца, над которыми все модули являются слабо регулярными. Следующим естественным этапом является изучение колец, над которыми все модули раскладываются в прямую сумму слабо регулярных модулей.

Теорема 1. *Пусть n — некоторое натуральное число. Тогда следующие условия для кольца R равносильны*:

1) *кольцо R является артиновым полуцепным и степень нильпотентности радикала Джекобсона кольца R равна $2n$ либо $2n-1$*;

2) *каждый модуль над кольцом R является прямой суммой n слабо регулярных модулей и найдется модуль над этим кольцом, который не является прямой суммой $n-1$ слабо регулярных модулей.*

Поскольку модули со свойством подъема являются частным случаем слабо регулярных модулей, а кольца, над которыми все модули раскладываются в прямую сумму конечного числа модулей со свойством подъема, являются совершенными, то теорема 1 позволяет дать описание колец, над которыми все модули являются прямыми суммами конечного числа модулей со свойством подъема.

Теорема 2. *Пусть n — некоторое натуральное число. Тогда следующие условия для кольца R равносильны*:

1) *кольцо R является артиновым полуцепным и степень нильпотентности радикала Джекобсона кольца R равна $2n$ либо $2n-1$*; 2) *каждый модуль над кольцом R является прямой суммой n модулей со свойством подъема и найдется модуль над этим кольцом, который не является прямой суммой $n-1$ модулей со свойством подъема.*

Литература

1. Сахаев И.И., Хакми Х.И. *О сильно регулярных модулях и кольцах* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 2. – С. 60–63.
2. Keskin D., Smith F., Xue W. *Rings whose modules are $\oplus$-supplemented* // J. Algebra. – 1999. – V. 218. – P. 470–487.
3. Абызов А.Н. *Слабо регулярные модули над полусовершенными кольцами* // Чебышевский сб. – 2003. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 4–9.

Казанский государственный университет

Поступила 24.10.2003