ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.765

Л.В. ЛИПАГИНА

О СТРОЕНИИ АЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТНЫХ АФФИНОРНЫХ СТРУКТУР НА СФЕРЕ S^5

В теории однородных φ-пространств большое внимание уделяется изучению инвариантных аффинорных структур на них [1]. В данной работе исследуется строение алгебры инвариантных аффинорных структур на сфере S^5. Полученные результаты применяются для отыскания всех инвариантных аффинорных f-структур на S^5, удовлетворяющих условию $f^s + f^t = 0$, $s \geq 2t$, $t \geq 1$, которые будем называть финслеровыми (см. [2]).

Известно, что сфера S^5 как однородное пространство допускает различные модели. Будем рассматривать ее как фактор-пространство $SU(3)/SU(2)$, где $SU(3)$ и $SU(2)$ — специальные унитарные группы порядка 3 и 2 соответственно. При этом инвариантность аффинорных структур на S^5 рассматривается относительно $SU(3)$. В этой модели S^5 представляет собой периодическое φ-пространство порядка 4, поскольку $SU(2)$ есть подгруппа φ-неподвижных элементов относительно автоморфизма $\varphi : SU(3) \to SU(3)$, $u \to a\bar{u}a^{-1}$, где $a = 1 \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Мы используем в этой работе обозначения и терминологию работы [3].

Теорема 1. *Алгебра инвариантных аффинорных структур $\mathcal{A}$ на сфере S^5 изоморфна $\mathbb{R}\otimes\mathbb{H}$, а ее подалгебра канонических аффинорных структур $\mathcal{A}(T_E\varphi|_m)$ изоморфна $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}$. Здесь $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — соответственно поля вещественных и комплексных чисел, $\mathbb{H}$ — тело кватернионов.*

Доказательство. Рассмотрим базис $B = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, где e_0 — единичная матрица четвертого порядка,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что произведения элементов базиса B образуют следующую таблицу:

$\cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_2	e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Эта таблица задает умножение в теле кватернионов.

В работе [3] было показано, что алгебра инвариантных аффинорных структур на S^5 имеет строение

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \delta & \tau & \mu \\ 0 & -\delta & \gamma & \mu & -\tau \\ 0 & -\tau & -\mu & \gamma & \delta \\ 0 & -\mu & \tau & -\delta & \gamma \end{pmatrix} \middle| \beta, \gamma, \delta, \tau, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1}$$

Заметим, что матрица

$$\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \delta & \tau & \mu \\ -\delta & \gamma & \mu & -\tau \\ -\tau & -\mu & \gamma & \delta \\ -\mu & \tau & -\delta & \gamma \end{pmatrix}, \tag{2}$$

полученная из матрицы (1) вычеркиванием первой строки и первого столбца, может быть разложена по базису $B : \lambda = \gamma e_0 + \delta e_1 + \tau e_2 + \mu e_3$. Следовательно, λ есть кватернион. Отсюда следует, что алгебра инвариантных аффинорных структур $\mathcal{A}$ изоморфна $\mathbb{R} \otimes \mathbb{H}$.

Поскольку $e_2^2 = -e_0$, то $B_1 = \{e_0, e_2\}$ является базисом в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Алгебра канонических инвариантных аффинорных структур на сфере S^5 имеет вид [3]

$$\mathcal{A}(T_E\varphi|_m) = \left\{ \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -\tau \\ 0 & -\tau & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 & \gamma \end{pmatrix} \middle| \beta, \gamma, \tau \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3}$$

Легко видеть, что матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & \tau & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\tau \\ -\tau & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \tau & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{4}$$

полученная вычеркиванием первой строки и первого столбца матрицы (3), может быть представлена разложением $\gamma e_0 + \tau e_2$. Это задает изоморфизм алгебр $\mathcal{A}(T_E\varphi|m)$ и $\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$. $\square$

Используем полученное строение алгебры инвариантных аффинорных структур для отыскания финслеровых инвариантных структур на S^5, т. е. структур, удовлетворяющих условию

$$f^s + f^t = 0. \tag{5}$$

Для большей общности снимем ограничения $s \geq 2t$, $t \geq 1$, полагая для определенности $s > t$.

Пусть $f \in \mathcal{A}$, $f = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $\beta \in \mathbb{R}$, а λ имеет строение (2). Тогда уравнение (5) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \beta^s + \beta^t = 0, \\ \lambda^s + \lambda^t = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Если $\lambda = 0$, то получаем тривиальные финслеровы инвариантные аффинорные структуры $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при очевидных ограничениях на s и t.

В дальнейшем положим $\lambda \neq 0$. В этом случае, т. к. тело кватернионов образует алгебру с делением, система (6) равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} \beta = 0, \\ \lambda^n + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{(I)} \qquad \begin{cases} \beta^n + 1 = 0, \\ \lambda^n + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{(II)}$$

где $n = s - t$.

Система (II) имеет решения $(-1, \lambda)$, где $(0, \lambda)$ — решения системы (I) при $n \equiv 1 \pmod 2$. Поэтому достаточно найти все решения системы (I), т. е. решить уравнение

$$\lambda^n + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{H}. \tag{7}$$

Случай 1. $n \equiv 0 \pmod 2$. Многочлен $F(\lambda) = \lambda^n + 1$ разлагается над полем $\mathbb{R}$ на сомножители вида

$$\lambda^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\lambda + 1, \quad \text{где} \quad k = \overline{0, n/2-1}. \tag{8}$$

Поэтому уравнение (7) принимает вид

$$\prod_{k=0}^{n/2-1}\Big(\lambda^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\lambda + 1\Big) = 0. \tag{9}$$

Очевидно, что ни один из его корней не является вещественным.

Пусть $\lambda = \gamma e_0 + \delta e_1 + \tau e_2 + \mu e_3$. Тогда из (9) получаем

$$\delta^2 + \tau^2 + \mu^2 = \sin^2\theta, \quad \gamma = \cos\theta, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n/2-1}.$$

Отсюда видно, что множество решений уравнения (9) представляет собой совокупность двумерных сфер, являющихся сечениями трехмерной сферы $\gamma^2+\delta^2+\tau^2+\mu^2 = 1$ плоскостями $\gamma = \cos\theta$, $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, n/2-1}$. Всего таких сечений $n/2$.

Заметим, что при $n \equiv 0 \pmod 2$ $\theta \neq \pi$ для любого $k = \overline{0, n/2-1}$.

Случай 2. $n \equiv 1 \pmod 2$. В этом случае $\theta = \pi$ при $k = \frac{n-1}{2}$, следовательно, уравнение (7) имеет один вещественный корень $-e_0$. Тогда имеем следующее разложение (7) на множители:

$$(\lambda+1)\prod_{k=0}^{(n-3)/2}\Big(\lambda^2 - 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\lambda + 1\Big) = 0. \tag{10}$$

Решая это уравнение относительно λ, получаем $\lambda = -e_0$ или $\lambda = \gamma e_0 + \delta e_1 + \tau e_2 + \mu e_3$, где $\delta^2+\tau^2+\mu^2 = \sin^2\theta$, $\gamma = \cos\theta$, $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, (n-3)/2}$.

Легко видеть, что множество решений уравнения (10) есть совокупность двумерных сфер, являющихся сечениями трехмерной сферы $\gamma^2+\delta^2+\tau^2+\mu^2 = 1$ плоскостями $\gamma = \cos\theta$, $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, (n-3)/2}$ и плоскостью $\gamma = -1$ при $k = \frac{n-1}{2}$. Всего таких сечений $(n-1)/2$.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Инвариантные финслеровы аффинорные структуры на сфере S^5 выделяются из структур* (1) *следующим образом:*

а) *если $n \equiv 0 \pmod 2$, то $\delta^2+\mu^2+\tau^2 = \sin^2\theta$, $\gamma = \cos\theta$, $\beta = 0$ при $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, n/2-1}$;*

б) *если $n \equiv 1 \pmod 2$, то $\delta^2+\mu^2+\tau^2 = \sin^2\theta$, $\gamma = \cos\theta$, $\beta = -1$ при $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, (n-3)/2}$, и $\beta = -1$, $\gamma = -1$, $\delta = \tau = \mu = 0$ при $k = \frac{n-1}{2}$. Здесь $n = s - t$.*

Заметим, что f-структуры К. Яно, задаваемые условием $f^3 + f = 0$, являются частным случаем финслеровых структур. Строение f-структур, рассмотренное ранее [3], может быть получено из теоремы 2 при $n = 2$.

Выясним строение инвариантных канонических финслеровых аффинорных структур на S^5.

Теорема 3. *Инвариантные канонические финслеровы аффинорные структуры на сфере S^5 выделяются из структур* (3) *следующим образом:*

1) $\begin{cases}\beta = 0,\\ \gamma^2+\tau^2 = 1 \quad \textit{при } n \equiv 0 \pmod 2,\end{cases}$

2) $\begin{cases}\beta = -1,\\ \gamma^2+\tau^2 = 1 \quad \textit{при } n \equiv 1 \pmod 2,\end{cases}$

где n — степень уравнения $f^n + 1 = 0$, $f \in \mathcal{A}(T_E\varphi|m)$, $n = s - t$.

Доказательство. Строение инвариантных финслеровых аффинорных структур на сфере S^5 определяется теоремой 2. Инвариантные канонические аффинорные структуры на S^5 получаются из структур (1) при $\delta = 0$, $\mu = 0$ и имеют вид (3). Положим в условиях теоремы 2 $\delta = 0$ и $\mu = 0$, тогда имеем

1) если $n \equiv 0 \pmod 2$, то $\tau^2 = \sin^2\theta$, $\gamma = \cos\theta$, $\beta = 0$ при $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, n/2 - 1}$, или $\tau^2 + \gamma^2 = 1$, $\beta = 0$ при $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, n/2 - 1}$;
2) если $n \equiv 1 \pmod 2$, то $\tau^2 = \sin^2\theta$, $\gamma = \cos\theta$, $\beta = -1$ при $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, (n-3)/2}$, или $\tau^2 + \gamma^2 = 1$, $\beta = -1$ при $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = \overline{0, (n-3)/2}$, и $\beta = -1$, $\gamma = -1$, $\delta = \tau = \mu = 0$ при $k = \frac{n-1}{2}$ или $\beta = -1$, $\tau^2 + \gamma^2 = 1$ при $k = \frac{n-1}{2}$.

Эти условия определяют строение инвариантных канонических финслеровых аффинорных структур на сфере S^5. $\square$

Литература

1. Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры на регулярных φ-пространствах* // УМН. – 1991. – Т. 46. – Вып. 1. – С. 205–206.
2. Tamia Dimopoulou P. *On direction dependent f-structures satisfying $f^s + f^t = 0$* // Riv. mat. Univ. Parma. – 1991. – V. 17. – № 4. – P. 279–293.
3. Липагина Л.В. *Инвариантные аффинорные структуры на сфере S^5* // Сб. научн. тр. Российск. ассоц. "Женщины-математики". – Н. Новгород, 1993. – Вып. 1. – С. 88–91.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила 06.02.1995