ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 12 (547)

УДК 515.124

Ж.К. КОРТИССОЗ

ПОТОК РИЧЧИ НА ДВУМЕРНОМ ДИСКЕ С МЕТРИКОЙ ВРАЩЕНИЯ

1. Введение

Пусть M — компактное двумерное многообразие с границей, и $g(t)$ — однопараметрическое семейство метрик на M (параметр t будем называть "временем"). Обозначим через $R(t)$ скалярную кривизну метрики $g(t)$, а через $k_g(t)$ — геодезическую кривизну границы ∂M относительно внешней нормали. Отметим, что в дальнейшем в обозначениях t будет опускаться, когда зависимость от t ясна из контекста, т.е., например, будем писать g вместо $g(t)$.

Рассмотрим следующую граничную задачу для потока Риччи на M:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial g}{\partial t} = -Rg \quad \text{в} \;\; M \times (0,T),\\ &k_g = \psi \qquad \text{на} \;\; \partial M \times (0,T),\\ &g(\cdot,0) = g_0.\end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 1.1 ([1]). *Пусть M — компактная поверхность с границей ∂M. Тогда для каждой начальной метрики такой, что граница имеет нулевую геодезическую кривизну k_g, задача* (1) *имеет единственное решение. Решение нормализованного потока определено для всех $t \geq 0$. Для $t \to \infty$ решение экспоненциально сходится к метрике постоянной гауссовой кривизны с нулевой геодезической кривизной границы.*

В данной работе рассматривается следующая задача с граничными и начальными условиями для однопараметрического семейства метрик $g(t)$ на двумерном диске $\mathbf{B}^2$:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial g}{\partial t} = -Rg \quad \text{в} \;\; B^2 \times (0,T),\\ &k_g = k_0 \qquad \text{на} \;\; \partial B^2 \times (0,T),\\ &g(\cdot,0) = g_0,\end{aligned} \tag{2}$$

где g_0 — метрика поверхности вращения на $\mathbf{B}^2$: $ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\omega^2$, и $\psi = k_0$ постоянно (заметим, если g_0 — метрика поверхности вращения, то решение g задачи (2) также состоит из метрик поверхностей вращения).

Также будем рассматривать "нормализованную версию" задачи (2). Нормализованный поток Риччи определяется следующим образом. Пусть $\phi(t)$ — такое семейство функций, что для $\widetilde{g} = \phi g$ имеем $\mathrm{Vol}(M) = 1$. Заменим время следующим образом: $\widetilde{t}(t) = \int\limits_0^t \phi(\tau)d\tau$, тогда $\widetilde{g}(\widetilde{t})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{t}}\widetilde{g} = \frac{2}{n}\widetilde{r}\,\widetilde{g} - 2\,\mathrm{Ric}(\widetilde{g}). \tag{3}$$

Это уравнение называется уравнением нормализованного потока Риччи.

Основные результаты данной работы состоят в следующем. В разделе 5 доказывается

Теорема 1.2. *Предположим, что $R \geq 0$ в $t = 0$. Тогда единственное решение уравнения нормализованного потока Риччи определено для всех t.*

В разделе 7 с использованием техники Перельмана [2] доказывается

Теорема 1.3. *Если $R > 0$ и $k_0 \geq 0$ для начальной метрики g_0, то кривизна R решения уравнения (2) испытывает раздутие (становится бесконечной в какой-то точке) через конечное время. Также существует последовательность $t_k \to T$ такая, что решение задачи (2) удовлетворяет условию*

$$\frac{R_{\max}(t_k)}{R_{\min}(t_k)} \to 1 \quad \textit{при} \quad t_k \to T.$$

Также строятся примеры семейств $g(t)$ со свойствами: $k_0 < 0$ и существует последовательность $t_k \to \infty$ такая, что $g(t_k)$ сходится к гладкой метрике $g(\infty)$, которая имеет постоянную кривизну и вполне геодезическую границу.

Главный инструмент, который будет использоваться при доказательстве теоремы 1.3 (и других результатов о сходимости в этой статье) — это техника теории раздутий ("blow up analysis"). Для того, чтобы оценить время, через которое происходит раздутие кривизны, необходимо выразить оценки производных от кривизны через оценки границ самой кривизны — это делается в разделе 6. В нашем случае, благодаря тому, что рассматриваются метрики поверхностей вращения, т. е. обладающие вращательной симметрией, легко получить оценки радиуса инъективности и оценки внутреннего радиуса Ферми ("насколько большим может быть воротник границы") с помощью теоремы сравнения лапласианов.

Следует отметить, что использование вращательной симметрии при доказательстве данной теоремы по-видимому не является существенным. Действительно, формулы монотонности раздела 7 не зависят от этого предположения. Единственное место, где существенно используется вращательная симметрия — в доказательстве того, что нормализованный поток определен при любом t и при доказательстве оценок на производные. Однако, как только имеется сходимость подпоследовательности метрик ненормализованного потока к метрике вращения на диске, из нее легко следует существование нормализованного потока при любых t. Кроме того, доказательство оценок на производные, приведенное в данной статье, по-видимому, можно обобщить на случай, когда наличие вращательной симметрии не предполагается. Следует указать, что для нормализованного потока, соответствующего (2), $k_g \to 0$ (это является следствием того, что здесь производится рескейлинг с помощью множителя, возрастающего к ∞, а геодезическая кривизна в ненормализованном потоке сохраняется равномерно ограниченной), и, следовательно, нормализованный поток Риччи униформизирует кривизну, в то время как граница поверхности становится геодезической. Наконец, отметим, что с помощью несложных дополнительных рассуждений можно показать, что сходимость подпоследовательности фактически является равномерной сходимостью. Кроме того, можно показать, что сходимость кривизны к константе экспоненциальна в любой L^p-норме для $1 \leq p < \infty$.

2. Существование решения для малых t

Из (1) следует, что решение g лежит в том же конформном классе, что и g_0. Если положить $\widetilde{g} = ug$ для $u > 0$, то, как хорошо известно,

$$\widetilde{R} = \frac{1}{u}(R - \Delta \log u).$$

Пусть $\frac{\partial}{\partial \eta}$ — внешняя нормаль к ∂M в начальной метрике g_0. Тогда закон преобразования геодезической кривизны имеет вид

$$k_{\widetilde{g}} = \frac{1}{\sqrt{u}}\left(k_g + \frac{1}{2u}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Поэтому задача (2) эквивалентна следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} &u_t = \Delta \log u - R_0 && \text{в } \ M \times (0,T), \\ &u_\eta = 2u(k_g u^{\frac{1}{2}} - k_0) && \text{на } \ \partial M \times (0,T), \\ &u(x,0) = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Из теории линейных параболических уравнений известно, что *задача* (4) *имеет единственное решение для малых* t*, которое является гладким в* $\overline{M} \times (0, \varepsilon)$ *и класса* C^2 *в* $\overline{M} \times [0, \varepsilon)$. Также имеет место следующее утверждение о регулярности решения: *если начальная метрика* g_0 *гладкая, то решение задачи* (1) *гладко в* $\overline{M} \times (0, \varepsilon)$.

3. Эволюция кривизны

Если g изменяется по закону ненормализованного потока Риччи в промежуток времени $(0, T)$, и $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — внешняя нормаль к границе относительно g (она будет изменяться со временем), то непосредственными вычислениями получаем

Предложение 3.1. *Для ненормализованного потока Риччи скалярная кривизна* R *удовлетворяет следующему эволюционному уравнению:*

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial R}{\partial t} &= \Delta R + R^2 \quad \text{в} \ \ M \times (0, T), \\ \tfrac{\partial R}{\partial \nu} &= k_g R - 2k_g' \quad \text{на} \ \ \partial M \times (0, T). \end{aligned}$$

Здесь и далее $'$ *означает дифференцирование по* t.

Для граничной задачи (2) имеем $k_g' = 0$, следовательно, в силу принципа максимума получаем

Предложение 3.2. *Пусть* $g(t)$ *— решение задачи* (4)*, и* $R(t)$ *— скалярная кривизна* $g(t)$*. Если* $R \geq 0$ *при* $t = 0$*, то это неравенство выполняется для любого времени* t*.*

4. Ненормализованный поток: раздутие кривизны

Основной инструмент, который будет использоваться для изучения предельного поведения потока Риччи — нахождение временной границы, за которой происходит раздутие. Поэтому важно описать ситуации, при которых кривизна испытывает раздутие (в случае ненормализованного потока).

Предложение 4.1. *Предположим, что* $\chi(M) = 1$ *и* $R > 0$ *для всех метрик потока. Пусть* $k_g \geq 0$ *и* $k_g' \leq 0$*. Тогда скалярная кривизна испытывает раздутие через конечное время.*

Доказательство. Достаточно применить принцип максимума к уравнению эволюции кривизны. □

Предложение 4.2. *Предположим, что* $\chi(M) = 1$ *и геодезическая кривизна границы неположительна. Тогда скалярная кривизна испытывает раздутие через конечное время.*

Доказательство. Пусть $A(t)$ — площадь многообразия в момент времени t. Тогда с помощью легкого вычисления получаем

$$A'(t) = -\int_M R\, dV.$$

Из этой формулы и того факта, что $\chi(M) = 1$, следует $A'(t) \leq -\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Значит, кривизна не может оставаться ограниченной после момента времени $T = \frac{A(0)}{\varepsilon}$ (иначе в силу оценок, которые будут получены в разделе 6, можно было бы это решение продолжить за T). □

5. Нормализованный поток: Существование для любого времени t

Как было отмечено, задача (2) (или, эквивалентно, задача (4)) имеет решение на малом интервале времени t. Вообще говоря, нельзя ожидать, что это решение существует для любого времени t. В данном параграфе при определенных дополнительных условиях доказывается существование решения нормализованного потока Риччи (в случае метрик вращения), определенное для любого t. В процессе доказательства используются идеи из [3] (см. также [4]–[6]). Заметим, что результаты данного параграфа не зависят от оценок производных кривизны.

Определение 5.1. Назовем потенциальной функцией решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\Delta f = R - r,\\ &\tfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0 \end{aligned}$$

с нулевым средним, где

$$r = \frac{\int\limits_M R}{A(M)},$$

и $A(M)$ — площадь M.

Лемма 5.1. *Потенциальная функция удовлетворяет эволюционному уравнению*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + rf + \psi \quad \text{в } \ M \times (0,T),\\ &\tfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0 \qquad\qquad\qquad \text{на } \ \partial M \times (0,T), \end{aligned}$$

где ψ удовлетворяет

$$\begin{aligned} &\Delta \psi = -r',\\ &\tfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = -\tfrac{\partial R}{\partial \nu} = k(r-R) + 2k'. \end{aligned}$$

Доказательство. Подсчитаем

$$(R-r)\Delta f + \Delta\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta f) = \frac{\partial}{\partial t}(R-r) = \Delta R + R(R-r) - r' = \Delta(\Delta f) + R\Delta f - r'.$$

Отсюда следует $\Delta(\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f - rf) = r'$.

С другой стороны, если записать $\psi := \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f - rf$, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = -\frac{\partial R}{\partial \nu}. \quad \square$$

Рассмотрим функцию

$$h = \Delta f + |\nabla f|^2.$$

Лемма 5.2. *Функция h удовлетворяет эволюционному уравнению*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial h}{\partial t} = \Delta h - 2|M_{ij}|^2 + rh - r' - 2\langle \nabla\psi, \nabla f\rangle,\\ &h = R - r \quad \text{на} \ \ \partial M \times (0,T), \quad \text{где } M_{ij} = \nabla_i\nabla_j f - \frac{1}{2}\Delta f g_{ij}. \end{aligned}$$

Доказательство. Подсчитаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\nabla f|^2 = 2g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}\partial_i f\right)\partial_j f + \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)\partial_i f\partial_j f = 2g^{ij}\partial_i(\Delta f + rf + \psi)\partial_j f +\\ + (R-r)g^{ij}\partial_i f\partial_j f = 2\langle\nabla\Delta f, \nabla f\rangle + 2r|\nabla f|^2 + \langle\nabla\psi,\nabla f\rangle + (R-r)|\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Из формул Вейценбека получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla f|^2 = \Delta|\nabla f|^2 - 2|\operatorname{Hess} f|^2 - R|\nabla f|^2 + 2r|\nabla f|^2 + \langle\nabla\psi,\nabla f\rangle + (R-r)|\nabla f|^2.$$

Равенство $h|_{\partial M} = R - r$ вытекает из того, что $|\nabla f|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial \nu}\right|^2 = 0$. $\square$

Используя формулу, полученную в предыдущей лемме, выводим следующее неравенство:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \le \Delta h + rh - r' + 2\|\nabla\psi\|_\infty |\nabla f| \le \Delta h + rh - r' + 2\|\nabla\psi\|_\infty (|\nabla f| + (R - r) + r) =$$
$$(\text{т. к. } R > 0) = \Delta h + (r + 2\|\nabla\psi\|_\infty)h - r' + 2(r + \tfrac{1}{4})\|\nabla\psi\|_\infty.$$

Лемма 5.3. *Пусть $g_k = dr^2 + f_k(r)^2 d\omega$ — последовательность метрик на B^2. Пусть $d_k = \mathrm{diam}(B^2, g_k)$ и предположим, что существует постоянная $C > 0$, не зависящая от k, такая, что $d_k < C$, и существует $\varepsilon > 0$ со свойством, что геодезическая кривизна границы $k_{g_k} > -\varepsilon$. Тогда если $l_k(\partial B^2) \to 0$ (длина границы в метрике g_k), то площадь $A(B^2, g_k) \to 0$.*

Доказательство. Положим $r_k = \frac{d_k}{2}$. Если $r_k \to 0$ — все доказано. Предположим противное: пусть найдется подпоследовательность g_k такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \alpha$. По предположению $\alpha < \infty$. Тогда для любого $0 < \tau < \alpha$ имеем $\frac{f_k'}{f_k} = k_{g_k}$, и, значит, $f_k(\alpha) = f_k(\tau)\exp\Big(\int\limits_\tau^\alpha k_{g_k}\, d\rho\Big)$.

Заметим, что k_{g_k} — возрастающая последовательность, поэтому

$$f_k(\alpha) \ge f_k(\tau)\exp\left(\int_\tau^\alpha k_{g_k}(\alpha)\, d\rho\right) \ge f_k(\tau)\exp\left(-\int_\tau^\alpha \varepsilon\, d\rho\right) = f_k(\tau)\exp[-(\alpha-\tau)\varepsilon] \ge f_k(\tau)\exp(-\varepsilon\alpha).$$

Так как $l_k(B^2) \to 0$, также $f_k(\alpha) \to 0$ и $f_k(\tau) \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому для любой $\eta > 0$ можно найти τ_0 такое, что $f_k(\tau_0) \le \eta$, и тогда выбрать достаточно большое k для того, чтобы при любом $\tau > \tau_0$ выполнялось $f_k(\tau) < \eta$. Отсюда следует

$$A(B^2, g_k) \le 2\pi \int_0^\alpha f_k(\rho)\, d\rho \ \le 2\pi\eta\alpha,$$

что доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1.2. Дадим доказательство от противного и проведем его в два этапа. Предположим, что кривизна испытывает раздутие в некоторый момент времени $T < \infty$.

Шаг 1. Докажем, что $\int\limits_0^T \|\nabla\psi\|_\infty\, dt < \infty$. Заметим вначале, что функция $|\nabla\psi|^2$ субгармонична. Действительно, по формуле Вейценбека имеем $\Delta(|\nabla\psi|^2) = 2|\operatorname{Hess}\psi|^2 + 2\langle\nabla(\Delta\psi), \nabla\psi\rangle + R|\nabla\psi|^2 \ge 0$, поэтому $|\nabla\psi|^2$ принимает максимальное значение на границе. Следовательно,

$$\|\nabla\psi\| \le \|k_g(R - r)\|_{\infty,\partial M} + \|2k_g'\|_{\infty,\partial M} \le C\|R - r\|_{\infty,\partial M} + C$$

(конечно следует еще показать, что k_g' ограничена, см. замечание 5.1 в конце данного раздела).

Значит, если $\|\nabla\psi\|_\infty$ не интегрируема в $[0, T]$, то $R|_{\partial M}$ — тоже не интегрируема. В таком случае, т. к. конформный множитель имеет вид

$$u(x,t) = \exp\left[\int_0^t r(\tau) - R(x,\tau)\, d\tau\right],$$

то $l(\partial M) \to 0$ при $t \to T$. Но $R > 0$ и $k_g \ge 0$, следовательно, по лемме 5.3 получаем $A(M) \to 0$, а это противоречит тому, что нормализованный поток сохраняет площадь.

Шаг 2. Если нормализованный поток не существует для произвольного времени, то для ненормализованного потока имеем максимальную степень раздутия на границе.

Как уже было показано, имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \le \Delta h + (r + 2\|\nabla\psi\|_\infty)h - r' + 2(r + \tfrac{1}{4})\|\nabla\psi\|_\infty.$$

Пусть $c(t) = \int\limits_0^t (r + 2\|\nabla\psi\|_\infty)\, dt$, и положим $w = \exp(-c(t))h$, тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leq \Delta w - \exp\big(-c(t)\big)\Big[r' - 2\|\nabla\psi\|_\infty\Big(r + \frac{1}{4}\Big)\Big].$$

Используя то, что $c(t)$ ограничены, а также неравенства

$$|r'| \leq \int_{\partial M} \left|\frac{\partial R}{\partial \nu}\right| d\sigma \leq C[k_g\|R - r\|_{\infty,\partial M} + 2\|k_g'\|_{\infty,\partial M}] \leq C\|R - r\|_{\infty,\partial M} + C$$

и $|\nabla\psi| \leq C|R - r|_{\partial M} + C$, из принципа максимума получаем $h(t) \leq C\widehat{R}_{\max}(t) + C$, где $\widehat{R}_{\max}(t) = \max\limits_{(x,\tau)\in\partial M\times[0,t]} R(x,\tau)$.

Это доказывает требуемое утверждение, т. к. $h(t) \geq R(t,x) - r(t)$, и $r(t)$ ограничено.

Последнее утверждение показывает $\int\limits_0^T R_{\max}(\tau)d\tau < \infty$, где $[0,T)$ — максимальный интервал существования для потока Риччи. Вновь используем то, что конформный множитель u удовлетворяет тождеству

$$u(x,t) = \exp\left[\int_0^t r(\tau) - R(x,\tau)d\tau\right].$$

Отсюда следует, что существует константа $\delta > 0$, для которой $u \geq \delta$, и, значит, можно продолжить решение за T (т. к. u ограничено, см. [7], гл. III, теорема 1.3, получаем, что u гельдерова, остальное следует из стандартных рассуждений, основанных на "бутстрапе"). $\square$

Замечание 5.1. Предположим, что нормализованный поток становится сингулярным в момент времени $T_0 < \infty$. Покажем, что k_g' остается ограниченной. Для этого рассмотрим ненормализованный поток. Тогда T_0 соответствует времени раздутия $T < \infty$ для ненормализованного потока. Пусть $A(t)$ — площадь поверхности в момент времени t. Равенство $A(T) = 0$ невозможно, поскольку из теоремы Гаусса–Бонне и того, что для ненормализованного потока $k_g = k_0$ следует $A(t) \leq C(T - t)$. Последнее, в свою очередь, повлекло бы, что нормализованный поток существует для любого времени t. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такой, что $A(t) \geq \varepsilon$ для $0 \leq t < T$.

С другой стороны, если через $\widetilde{t}$ и t обозначить временные параметры для нормализованного и ненормализованного потоков и положить $\phi = 1/A$, то получим

$$\frac{d}{d\widetilde{t}}k_g = \frac{d}{dt}\Big(\frac{k_0}{\sqrt{\phi(t)}}\Big)\Big/\frac{d\widetilde{t}}{dt} = -\frac{k_0}{2\phi^{\frac{5}{2}}}\phi'.$$

Таким образом, все что необходимо — это показать ограниченность $\phi' = \left(\frac{1}{A}\right)'$. Но в этом достаточно легко убедиться, т. к.

$$A'(t) = -\int_M R\, dV = -2\pi + \int_{\partial M} k_0\, d\sigma,$$

что очевидно ограничено.

Заметим, что результат о существовании потока для больших времен дает интересную дополнительную информацию, именно

Предложение 5.1. *Для нормализованного потока $k_g \to 0$ экспоненциально.*

6. Ненормализованный поток: Оценки производных

Чтобы выразить оценки производных кривизны через оценки для самой кривизны, зафиксируем воротник границы в момент времени $t = 0$. Для метрик вращения, если известна верхняя граница кривизны и оценка геодезической кривизны границы, теорема сравнения для лапласианов дает оценку радиуса диска, наделенного метрикой вращения. Это обстоятельство позволяет выбрать воротник $V = \partial M \times [0, c)$, инвариантный относительно группы вращений такой, что $\rho_t(\cdot, \partial M)$ — расстояние до границы в момент времени t является гладкой функцией и расстояние в момент времени t до границы $\partial M = \partial M \times \{0\}$ и внутренней границы воротника $\partial M \times \{c\}$ ограничено снизу равномерно по $\frac{c}{2}$.

Также согласно внутренним оценкам Ши производной на внутренней границе воротника при $t > 0$ можно допустить, что границы производных кривизны выражаются через границы кривизны. Из всего вышесказанного следует, что целью дальнейших рассмотрений является оценка производных $\frac{\partial^n R}{\partial \nu^n}$, где через $\frac{\partial}{\partial \nu}$ обозначаем радиальный единичный вектор, который корректно определен в V для любого времени t.

6.1. *Оценки первых производных.* Следующая теорема (и ее доказательство) аналогичны теореме 7.1 из [8].

Теорема 6.1. *Существует константа C_1 для $R \geq 1$ такая, что если кривизна ограничена $|R| \leq M$ до момента времени t, где $0 < t \leq \frac{1}{M}$, то производная кривизны ограничена*

$$\left|\frac{\partial R}{\partial \nu}\right| \leq C_1 \frac{M}{\sqrt{t}}.$$

Доказательство. На границе имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \nu} = k_g R.$$

Положим $F = t\left|\frac{\partial R}{\partial \nu}\right|^2 + AR^2$, где A постоянная, которую выберем позже. Во внутренних точках имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= (R_\nu)^2 + 2t(R_\nu)_t R_\nu + 2ARR_t = (R_\nu)^2 + 2tR_\nu[RR_\nu + (R_t)_\nu] + 2AR[\Delta R + R^2] = \\
&= (R_\nu)^2 + 2tR_\nu[(\Delta R)_\nu + 2RR_\nu + RR_\nu] + 2AR[\Delta R + R^2] \leq \\
&\leq \Delta(t(R_\nu)^2 + AR^2) - 2(t|\nabla R_\nu|^2 + A|\nabla R|^2) + CtR(R_\nu)^2 + 2AR^3 \leq \\
&\leq \Delta F + (CtR - 2(A-1))|\nabla R|^2 + 2AR^3.
\end{aligned}$$

Выбирая A достаточно большим, получаем неравенство $\frac{\partial F}{\partial t} \leq \Delta F + 2AR^3$.

На границе M имеем (можно предположить, что подобная оценка на внутренней границе воротника зафиксирована с самого начала) $F = tk_g^2 R^2 + AR^2 \leq \widetilde{C} t M^3 + \widetilde{C} M^2$ для некоторой постоянной $\widetilde{C}$. Тогда принцип максимума при $tM \leq 1$ влечет

$$t\left|\frac{\partial R}{\partial \nu}\right|^2 \leq F \leq CM^2$$

для некоторой постоянной C_1. $\square$

6.2. *Оценки вторых производных.* Покажем как оценить $\frac{\partial^2 R}{\partial \nu^2}$. Производные более высокого порядка оцениваются аналогично.

Пусть $\rho(P, t) = d_t(P, \partial M)$ есть расстояние от P до границы в момент времени t и положим $F = \exp(k_0 \rho) R$, где k_0 — геодезическая кривизна границы ∂M.

С помощью простых вычислений получаем $F_\nu = 0$ на границе. Функция F удовлетворяет эволюционному уравнению

$$F_t = \Delta F - 2\left(\frac{\nabla \exp(k_0\rho)}{\exp(k_0\rho)}\right) \cdot \nabla F + 2\left(\frac{|\nabla \exp(k_0\rho)|^2 - \Delta \exp(k_0\rho)}{\exp(k_0\rho)} + \frac{k_0 \rho'}{2}\right) F + \frac{F^2}{\exp(k_0\rho)}.$$

Для упрощения перепишем последнее выражение в виде

$$\begin{aligned} &F_t = \Delta F + B \cdot \nabla F + CF + EF^2 && \text{в } \ B^2 \times (0,T), \\ &F_\nu = 0 && \text{на } \ \partial B^2 \times (0,T), \end{aligned}$$

где смысл B, C, E очевиден. Дифференцируя по ν и полагая $w = F_\nu$, получим

$$Lw \equiv w_t - \Delta w - B \cdot \nabla w = RF_\nu + B_\nu \cdot \nabla F - C_\nu F + E_\nu F^2 - (C + EF)w.$$

Запишем $\mathcal{G} = RF_\nu + B_\nu \cdot \nabla F - C_\nu F + E_\nu F^2 - (C + EF)w$, а граничные условия имеют вид $w = 0$.

Для того чтобы оценить производные w, будем использовать фундаментальные решения линейных параболических уравнений. С этой целью подсчитаем коэффициенты оператора L в координатах Ферми.

Зафиксируем точку $P \in \partial M$. Предположим, что в окрестности $\mathcal{F}_{\varepsilon,\delta} = \{(x,s) \in \mathbf{R}^2 : -\delta < x < \delta,\ 0 \le s < \varepsilon\}$ точки P заданы координаты Ферми $(\mathcal{F}_{\varepsilon,\delta}, \phi)$, т. е. координата s задает расстояние до границы, а x — координата на кривых, “параллельных” границе. Через $k(\sigma)$ обозначим геодезическую кривизну кривой $\partial M_\sigma = \{P \in M : \pi_2(\phi^{-1}(P)) = \sigma\}$, где $\pi_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ — проекция на вторую координату.

В координатах Ферми метрика может быть описана в явном виде с помощью соответствующих геометрических величин.

Предложение 6.1. *В координатах Ферми*

(1) $g = ds^2 + \exp\Big(-2\int\limits_0^s k(\sigma)\,d\sigma\Big)dx^2$,

(2) $\frac{\partial k}{\partial s} = k^2 + \frac{R}{2}$,

(3) $\sqrt{g} = \exp\Big(-\int\limits_0^s k(\sigma)\,d\sigma\Big)$,

где s — расстояние до границы.

Доказательство. Докажем (1). Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial s} g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = 2g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = -2g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = -2k(s) g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big).$$

Искомый результат получается в результате интегрирования с учетом того, что $g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = 1$ при $s = 0$.

Перейдем к (2). Имеем

$$k(s) g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = -g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\Big).$$

Продифференцируем данное уравнение по s. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\Big[k(s) g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big] &= k'(s) g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) + 2k(s) g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = \\ &= k'(s) g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) - 2[k(s)]^2 g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big), \\ \frac{\partial}{\partial s} g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) &= g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\Big) + g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial s}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x}\Big) = \\ &= -\frac{R}{2} g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) + [k(s)]^2 g\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\Big), \end{aligned}$$

то отсюда и следует требуемый результат. Наконец, (3) следует из (1). $\square$

Теперь перейдем к изучению оператора L в координатах Ферми. Вначале изучим его главную часть, которая соответствует лапласиану. Заметим, что лапласиан задается в локальных координатах следующим образом:

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j).$$

Выберем координаты Ферми в момент времени $t = 0$. В этих координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 s} + \exp\left(2\int_0^s k(\sigma)\,d\sigma\right)\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \exp\left(\int_0^s k(\sigma)\,d\sigma\right)\frac{\partial}{\partial s}\left[\exp\left(-\int_0^s k(\sigma)\,d\sigma\right)\right]\frac{\partial}{\partial s}.$$

Следовательно, т. к. $\Delta_{g(t)} = \exp\Big(\int\limits_0^t R(s,\tau)\,d\tau\Big)\Delta$ (конформный множитель имеет вид $u = \exp\Big(-\int_0^t R(s,\tau)\,d\tau\Big)$, а в размерности 2, если $h = \lambda g$, то $\Delta_h = \lambda^{-1}\Delta_g$), функции, гельдерову норму которых необходимо оценить, имеют вид

(1) $\alpha(s,t) = \exp\Big(\int\limits_0^t R(s,\tau)\,d\tau\Big)$,

(2) $\beta(s,t) = \exp\Big(\int_0^t R(s,\tau)\,d\tau\Big)\exp\Big(2\int_0^s k(\sigma)\,d\sigma\Big)$,

(3) $\gamma(s,t) = k(s)\exp\Big(\int_0^t R(s,\tau)\,d\tau\Big)$.

Проверим, что эти функции дифференцируемы и что можно найти оценки их производных, используя оценки кривизны и ее первых производных (которые уже известно как оценивать). Сделаем оценки для функции (3), для остальных аналогично. Так как все метрики потока являются метриками вращения, производные по x дают нуль. Значит, надо подсчитать только производные по t и s. Найдем вначале производные по s

$$\gamma_s = k'(s)\exp\left(\int_0^t R(s,\tau)\,d\tau\right) + k(s)\left(\int_0^t R_s(s,\tau)\,d\tau\right)\exp\left(\int_0^t R(s,\tau)\,d\tau\right).$$

Учитывая (2) из предложения 6.1, получаем оценку γ_s в терминах кривизны, ее первой производной и геодезической кривизны. Для производной по времени t имеем

$$\gamma_t = R(s,t)k(s)\exp\left(\int_0^t R(s,\tau)\,d\tau\right),$$

следовательно, имеет место тот же самый результат.

Теперь рассмотрим члены низшего порядка, входящие в оператор L. Следующее утверждение доказывается непосредственными вычислениями.

Предложение 6.2. *Имеют место следующие формулы*:
(1) $|\nabla_{g(t)}\exp(k_0\rho)|^2 = k_0^2\exp(2k_0\rho)$,
(2) $\Delta_{g(t)}\exp(k_0\rho) = \exp\Big(\int\limits_0^t R(\sigma,\tau)\,d\tau\Big)[k_0^2\exp(k_0\rho) + k_0 k(s)\exp(k_0\rho)]$,
(3) $\rho(s,t) = \int\limits_0^s \exp\Big(-\int\limits_0^t R(\sigma,\tau)\,d\tau\Big)\,d\sigma$.

С помощью последнего предложения можно найти члены B, C, E и показать, что они удовлетворяют условию Липшица, и что их липшицевы константы зависят только от границ кривизны. Также легко можно проверить, что B_ν, C_ν, E_ν — ограниченные непрерывные функции, оценки которых зависят только от оценок кривизны и ее первых производных, которые в свою очередь могут быть оценены в терминах оценок кривизны.

Для следующего шага потребуется

Предложение 6.3. *В полосе $[-\delta,\delta]\times[\frac{3}{4}\varepsilon,\varepsilon]$ все производные кривизны ограничены и их границы зависят только от ε, t и границ кривизны.*

Доказательство следует из локальных внутренних оценок (см. [8], теорема 13.1). $\square$

Зафиксируем функцию $\psi : \mathbf{R}_+ \longrightarrow [0,1]$ такую, что

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ u \in [0,1], \\ 0, & \text{если } \ u \in [2,\infty]. \end{cases}$$

Определим

$$\chi(s) = \psi\left[\frac{8(\varepsilon - s)}{\varepsilon}\right].$$

Заметим, что существует константа A такая, что

$$|\nabla\chi| \le \frac{A}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad |\nabla^2\chi| \le \frac{A^2}{\varepsilon^2}.$$

Пусть $v = w - \chi w$.

С помощью простого вычисления получаем

$$v_t - \Delta v - B \cdot \nabla v = \mathcal{G} - \chi\mathcal{G} + w\Delta\chi + 2\nabla\chi \cdot \nabla w + Bw\nabla\chi - Gv.$$

С этого момента будем использовать следующие обозначения:

$$\mathcal{W} = \mathcal{G} - \chi\mathcal{G} + w\Delta\chi + 2\nabla\chi \cdot \nabla w + Bw\nabla\chi - Gv.$$

Так как для $s \le \frac{3}{4}\varepsilon$ имеем $\chi \equiv 0$, левая часть предыдущего уравнения (в силу предложения 6.3) оценивается в терминах границ кривизны и ε. Это показывает, что левая часть — ограниченная непрерывная функция на отрезке $\{0 \le s < \varepsilon\}$. Возьмем любое $\theta > 0$, и положим $f = v|_{t=\theta}$. Пусть $\Gamma(s,t;\zeta,\tau)$ — функция Грина оператора L в слое $\{0 < s < \varepsilon\} \times [\theta, T]$. Так как $v = 0$ в $s = 0$ и $s = \varepsilon$, можно представить v следующим образом:

$$v(s,t) = \int_\theta^t \int_0^\varepsilon \Gamma(s,\zeta;t,\tau)\mathcal{W}(\zeta,\tau)\,d\zeta\,d\tau + \int_0^\varepsilon \Gamma(s,\zeta;t,\theta)f(\zeta)\,d\zeta.$$

Хорошо известно, что v дифференцируема по s, и производная получается с помощью дифференцирования под знаком интеграла, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \int_\theta^t \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,t;\zeta,\tau)\mathcal{W}(\zeta,\tau)\,d\zeta\,d\tau + \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,t;\zeta,\tau)f(\zeta)\,d\zeta.$$

Теперь можно найти границы $\frac{\partial v}{\partial s}$. Прежде всего, хорошо известно, что

$$\Gamma(s,t;\xi,\tau) \le C(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-C\frac{|s-\xi|^2}{t-\tau}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,t;\xi,\tau) \le C(t-\tau)^{-\frac{1+1}{2}} \exp\left[-C\frac{|s-\xi|^2}{t-\tau}\right],$$

где C зависит только от липшицевых констант коэффициентов оператора L. Поэтому, если $|f(\xi)| \le M_0$ и $|\mathcal{W}(\xi,\tau)| \le M_1$, то, обозначая

$$\int_\theta^\infty \int_0^\infty C(t-\tau)^{-\frac{1+1}{2}} \exp\left[-C\frac{|s-\xi|^2}{t-\tau}\right] d\xi\,d\tau = K_1$$

и

$$\int_0^\infty C(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-C\frac{|s-\xi|^2}{t-\tau}\right] d\xi = K_0,$$

находим, что

$$\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right| \le K_1 M_1 + \frac{M_0 K_0}{(t-\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Наконец, заметим, что M_0, M_1, K_0, K_1 зависят только от границ кривизны и ее первых производных. Так как

$$\frac{\partial v}{\partial s}(x,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \nu}(x,t) \; = \; \left(\text{напомним, что } \; \frac{\partial}{\partial \nu} = g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial s}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t R(x,\tau)\,d\tau\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2}(x,t) =$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t R(x,\tau)\,d\tau\right)\left[\exp(k_0\rho)\frac{\partial^2 R}{\partial \nu^2} + (k_0^2 - k_0)\exp(k_0\rho)\frac{\partial R}{\partial \nu}\right].$$

Доказана

Теорема 6.2. *Частные производные второго порядка от R (в координатах Ферми) ограничены вплоть до границы диска и границы этих частных производных зависят от границ кривизны R, геодезической кривизны границы диска, времени $t > 0$, до которого производятся оценки, и $\varepsilon > 0$ — "размера" окрестности с координатами Ферми при $t = 0$.*

7. Сходимость для последовательности времен: случай выпуклой границы ($k_0 \geq 0$)

Основная цель данного раздела — показать, что при $k_0 \geq 0$ кривизна униформизируется (ненормализованным) потоком, т. е. если $[0, T)$ — максимальный интервал существования решения уравнения ненормализованного потока, то для последовательности времен $t_k \to T$ выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_{\max}(t_k)}{R_{\min}(t_k)} = 1,$$

где $R_{\max}(t) = \max_{x\in M} R(x,t)$ и $R_{\min}(t)$ определяется аналогично.

Для достижения поставленной цели будем применять раздутия. Прежде всего опишем как получить предел раздутия. Пусть $(0, T)$ — максимальное время существования потока Риччи. Тогда можно найти последовательности времен $t_i \to T$ и точек $p_i \in M$ такие, что $\lambda_i := R(p_i, t_i) = \max\limits_{M\times[0,t_i]} R(x,t)$, $\lambda_i \to \infty$. Определим растяжения $g_i(t) := \lambda_i g(t_i + \frac{t}{\lambda_i})$, $-\lambda_i t_i \leq t < \lambda_i(T - t_i)$.

Тогда, используя оценки производных (и дополнительно — радиус инъективности и предположения о внутреннем радиусе Ферми, которые как легко видеть выполняются для метрики вращения в силу теоремы сравнения для лапласианов), можно найти подпоследовательность моментов времени, которую снова будем обозначать через t_i, сходящуюся к T такую, что $(M, g_i(t), p_i)$ гладко сходится к решению уравнения потока Риччи $(M_\infty, g_\infty(t), p_\infty)$.

Для достижения необходимых результатов ключевой является

Теорема 7.1 ([8], теоремы 26.1 и 26.3). *Существуют два возможных предельных раздутия для решений задачи (2) при $R > 0$.* A) *Если предельное раздутие компактно, то это — полусфера S^2_+ с вполне геодезической границей.* B) *Если предельное раздутие некомпактно, то оно или его удвоение изометрично сигарной метрике на $\mathbf{R}^2$.*

Напомним, что сигарная метрика в $\mathbf{R}^2$ задается следующим образом:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Доказательство. Основным наблюдением здесь является то, что геодезическая кривизна метрики $\lambda^2 g$ имеет вид $k_{\lambda^2 g} = k_g/\lambda$.

Поэтому предельные раздутия (поскольку для потока геодезическая кривизна остается равномерно ограниченной) имеют вполне геодезическую границу. Как только этот факт установлен, нетрудно показать (следуя соответствующим рассуждениями для случая без границы), что утверждение теоремы верно. □

Согласно предыдущей теореме, для того чтобы доказать, что поток униформизирует кривизну, необходимо лишь доказать, что единственное возможное раздутие есть S^2_+. Так как уже известно, что альтернативой может быть лишь солитонная метрика на $\mathbf{R}^2$ (по теореме 7.1), все, что надо сделать — это исключить этот случай и здесь полезной оказывается работа [2].

Следуя Перельману, определим вначале следующий функционал:

$$\mathcal{F}(g,f) = \int_M (R + |\nabla f|^2)\exp(-f)\,dV \tag{5}$$

и подсчитаем его первую вариацию.

Предложение 7.1. *Пусть $\delta g_{ij} = v_{ij}$, $\delta f = h$, $g^{ij}v_{ij} = v$. Тогда имеем*

$$\delta\mathcal{F} = \int_M \exp(-f)[-v_{ij}(R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f) + \left(\frac{v}{2} - h\right)(2\Delta f - |\nabla f|^2 + R)] -$$
$$- \int_{\partial M}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu} + v\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)\exp(-f)\,d\sigma + \int_{\partial M}\exp(-f)\nabla_i v_{ij}\nu^j\,d\sigma - \int_{\partial M}\nabla_j\exp(-f)v_{ij}\nu^i\,d\sigma. \tag{6}$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial\nu} = \{\nu^i\}$ — внешняя нормаль к ∂M относительно g (заметим, что $\frac{\partial}{\partial\nu}$ зависит от времени), ∇ есть ковариантная производная в римановой связности метрики g, и $v_\partial/2$ есть вариация элемента площади ∂M, индуцированного с помощью v_{ij}.

Доказательство. Уравнения (6) вытекают из следующих формул:

$$\begin{aligned} \delta R &= -\Delta v + \nabla_i\nabla_j v_{ij} - R_{ij}v_{ij}, \\ \delta|\nabla f|^2 &= -v^{ij}\nabla_i f\nabla_j f + \langle\nabla f, \nabla h,\rangle, \\ \delta(\exp(-f)\,dV) &= \left(\frac{v}{2} - h\right)\exp(-f)\,dV \end{aligned} \tag{7}$$

и интегрирования по частям (Δ — лапласиан метрики g). $\square$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{array}{ll} g_t = -2(\mathrm{Ric}(g) + \mathrm{Hess}\, f) & \text{в } M\times(0,T), \\ k_g = k_0 & \text{на } \partial M\times(0,T), \\ f_t = -R - \Delta f & \text{в } M\times(0,T), \\ \frac{\partial f}{\partial\nu} = 0 & \text{на } \partial M\times(0,T). \end{array} \tag{8}$$

Предложение 7.2.

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 2\int_M |R_{ij} + \nabla_i\nabla_j f|^2\exp(-f)\,dV + 2\int_{\partial M}k_0 R\exp(-f)\,dA + 2\int_{\partial M}k_0|\nabla^\partial f|^2\exp(-f)\,dA.$$

Доказательство. Подсчитаем каждый из граничных интегралов в (7), используя эволюционные уравнения (8):

$$\begin{aligned} \int_{\partial M}\exp(-f)\nabla_i v_{ij}\nu^j\,dA &= \int_{\partial M}k_0 R\exp(-f)\,dA, \\ -\int_{\partial M}\nabla_j\exp(-f)v_{ij}\nu^i\,dA &= 2\int_{\partial M}\exp(-f)k_0|\nabla^\partial f|^2\,dA, \end{aligned}$$

где ∇^∂ — градиент на границе, и

$$-\int_{\partial M}\nabla_\nu\exp(-f)v_{\nu\nu}\,dA = \int_{\partial M}\nabla_\nu v\exp(-f)\,dA = 0.$$

Отсюда следует формула монотонности. $\square$

Для дальнейших рассуждений необходима более сложная версия функционала $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{W}(g,f,\tau)=\int_M[\tau(|\nabla f|^2+R)+f-2](4\pi\tau)^{-1}\exp(-f)\,dV,$$

в ограничении на функции f, удовлетворяющие $\int\limits_M (4\pi\tau)^{-\frac{1}{2}}\exp(-f)\,dV=1$.

Если сделать замену $\Phi=\exp(-\frac{f}{2})$, получим функционал

$$\mathcal{W}(g,\Phi,\tau)=(4\pi\tau)^{-1}\int_M[4\tau|\nabla\Phi|^2+(\tau R-2\log\Phi-2)\Phi^2]\,dV,$$

который подробно изучался Ротхаусом (см. [9], [10]) в области с границей Ω при дополнительном условии, что инфимум берется по всем гладким функциям, обращающимся в нуль на границе. Используя методы Ротхауса, нетрудно показать, что для этого модифицированного функционала существует минимизирующий элемент.

Как и раньше, для заданного семейства метрик, зависящих от времени, и образующих поток Риччи, т. е.

$$\begin{aligned} g_t &= -Rg \quad \text{в } \ M\times(0,T),\\ k_g &= k_0 \qquad \text{на } \ \partial M\times(0,T), \end{aligned}$$

и функции $f(\cdot,t)$, удовлетворяющей обратному уравнению теплопроводности,

$$f_t=-\Delta f+|\nabla f|^2-R+\frac{1}{\tau},\quad \tau_t=-1,$$

и еще дополнительно граничным условиям

$$\frac{\partial f}{\partial\nu}=0,$$

имеем следующую формулу монотонности. Доказательство этой формулы получается вычислениями, аналогичными вычислениям в доказательстве предложения 7.2.

Теорема 7.2.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{W}}{dt}=\int_M 2\tau|R_{ij}+\nabla_i\nabla_j f-\frac{1}{2\tau}g_{ij}|^2(4\pi\tau)^{-1}\exp(-f)\,dV+{}\\ +2\tau\Big(\int_{\partial M}k_0R\exp(-f)\,dA+\int_{\partial M}k_0|\nabla^{\partial}f|^2\exp(-f)\,dA\Big).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\mu(g,\tau)=\inf\limits_{f\in\mathcal{C}^\infty}\mathcal{W}(g_{ij},f,\tau)$ монотонно возрастает по τ (в предположении, что $k_0\geq 0$).

7.1. *Доказательство теоремы* 1.3. Вначале приведем доказательство интересного и хорошо известного свойства солитонной метрики, но перед этим введем некоторые обозначения. Кольцо в многообразии (M,g) с внутренним радиусом $r_1>0$ и внешним радиусом $r_2>r_1$ (в метрике g) будем обозначать через $A(r_1,r_2)$, т. е. $A(r_1,r_2):=B(0,r_2)\setminus B(0,r_1)$.

Иногда (это будет ясно из контекста) тем же символом $A(r_1,r_2)$ будем обозначать площадь этого кольца.

Лемма 7.1. *Зафиксируем $k>1$. Тогда площадь кольца $A(r,kr)$ в метрике сигарного солитона удовлетворяет $A(r,kr)\sim C_kr$.*

Доказательство. Солитонная метрика задается следующим образом:

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{1+x^2+y^2}.$$

Тогда при $P = (x, y)$ имеем (через d обозначено расстояние на многообразии)

$$d(0, P) = \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}\, d\rho \sim \log\alpha,$$

где $\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$. Поэтому, если $r = \log\alpha$, то

$$A(\log\alpha, k\log\alpha) \sim 2\pi \int_\alpha^{\alpha^k} \frac{r}{1+r^2}\, dr = \pi\log(1+\alpha^k) - \pi\log(1+\alpha^2) \sim \frac{k}{2}\pi\log\alpha.$$

Это доказывает требуемое утверждение.

Теперь продолжим рассмотрения, используя аргументацию Перельмана [2]. Для данного $r > 0$ определим следующую функцию:

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{если } \ p \in A(2r, 3r); \\ \frac{\varepsilon}{r}, & \text{если } \ p \in B(0, r); \\ \varepsilon\exp(-d(0,p)), & \text{если } \ p \notin B(0, 4r), \end{cases} \tag{9}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало и

$$|\nabla\phi| \le \frac{1}{r}.$$

Наконец, определим

$$f = -\log\phi + c,$$

где c — константа такая, что

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_M \phi\exp(-c)\, dV = 1.$$

В случае солитонной метрики для ϕ, определенной как в (9), согласно лемме 7.1 имеем

$$\frac{1}{4\pi r^2}\int_M \phi\exp(-c)\, dV \sim \int_{A(r,4r)} \exp(-c)\, dV \sim \frac{1}{4\pi r}\exp(-c),$$

что влечет $c \sim -\log(r)$.

Также имеем следующую хорошо известную оценку убывания кривизны солитонной метрики.

Предложение 7.3. *Кривизна солитонной метрики удовлетворяет следующей оценке*:

$$R(P) \sim \exp(-d(0, P)).$$

Доказательство. В силу закона преобразования кривизны при конформном преобразовании метрики, для точки $P = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ имеем, что

$$R(P) = \frac{4}{1+x^2+y^2}.$$

Но, как было показано в лемме 7.1, $\sqrt{x^2+y^2} \sim \exp(d(0, P))$, откуда следует требуемое утверждение. $\square$

Положим $\tau = r^2$ в (5). Тогда

$$\int_M \tau|\nabla f|^2\exp(-f)\frac{1}{4\pi\tau}\, dV = \int_M 4r^2\left|\nabla\exp\left(-\frac{f}{2}\right)\right|^2\exp(-c)\frac{1}{4\pi r^2}\, dV \le$$

$$\le \int_{A(r,4r)} 4r^2\frac{1}{r^2}\frac{\exp(-c)}{4\pi r^2}\, dV,$$

эта величина остается ограниченной при $r \to \infty$.

Так как $R \leq \exp(-r)$, интеграл $\int\limits_M Rr^2 \frac{1}{4\pi r^2} \exp(-f)\, dV$ остается ограниченным.

Также ясно, что выражение $\int\limits_M n \frac{1}{4\pi r^2} \exp(-f)\, dV$ остается ограниченным.

Наконец,

$$\int_M f \exp(-f) \frac{1}{4\pi r^2}\, dV = \int_M \phi \log \phi \frac{1}{4\pi r^2} \exp(-c)\, dV - \int_M c \exp(-f) \frac{1}{4\pi r^2}\, dV.$$

Первый интеграл в правой части ограничен. Действительно,

$$\int_M \phi \log \phi \frac{1}{4\pi r^2} \exp(-c)\, dV \leq C \int_{A(r,4r)} \frac{1}{4\pi r^2} \exp(-c)\, dV \leq C \frac{1}{r^2} rr.$$

Второй интеграл стремится к $-\infty$ при $r \to \infty$.

Используя все полученные оценки для (5), с таким выбором ϕ получаем, что если $g(t)$ — решение уравнения потока Риччи и если существует последовательность раздутий (p_l, t_l), сходящаяся к солитонной метрике, то существует последовательность радиусов r_l такая, что

$$\mu_l = \mu(g(t_l), r_l^2) \to -\infty \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

С другой стороны, пусть $\tau = t_l - t + r_l^2$ и $\widehat{f}_l(\cdot, t)$ — решение в интервале $[0, t_l]$ для уравнения

$$\begin{aligned} &f_t = -\Delta f + |\nabla f|^2 - R + \tfrac{n}{2\tau}, \\ &\tfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0, \\ &f(\cdot, t_l) = f_l, \end{aligned}$$

где f_l выбрано так, чтобы $\mu(g(t_l), f_l, r_l^2) \leq \mu_l + 1$.

Тогда по формуле монотонности для $t = 0$

$$\mu(g(0), t_l + r_l^2) \leq \mathcal{W}(g(0), \widehat{f}_l(\cdot, 0), t_l + r_l^2) \leq \mu_l + 1.$$

Если $\lim\limits_{l\to\infty} t_l = T$, то, как нетрудно показать (см. [9], [10]), $\mu(g(0), t_l) \to \mu(g(0), T)$, что дает противоречие. Таким образом, доказано, что *если $R_0 > 0$ и $k_{g_0} \geq 0$, то рассмотренный поток Риччи с течением времени униформизирует кривизну.*

7.2. *Замечания к доказательству теоремы* 1.3. Некоторые результаты данного раздела можно усилить.

Предложение 7.4. *Если $R > 0$, $\int\limits_M R\, dV + \int\limits_{\partial M} k\, d\sigma > 0$ и (для ненормализованного потока) $\frac{R_{\max}(t_i)}{R_{\min}(t_i)} \to 1$ для некоторой последовательности $t_i \to T < \infty$, то нормализованный поток определен для любого времени t.*

Доказательство. Так как $\frac{R_{\max}(t_i)}{R_{\min}(t_i)} \to 1$, площадь поверхности (в ненормализованном потоке) стремится к нулю при $t_i \to T$ (по теореме Бонне–Майерса). Теорема Гаусса–Бонне и ограниченность геодезической кривизны влекут

$$A(t) \sim C(T - t).$$

Это в свою очередь влечет существование нормализованного потока для любого момента времени. □

Учитывая результаты данного раздела, получаем, что из предыдущего предложения следует, что теорема 1.2 представляет интерес лишь при $k_0 \leq 0$.

Также приведем обоснование для утверждений, содержащихся в последнем абзаце введения. Начнем со следующего предложения.

Предложение 7.5. *Если нормализованный поток существует для любого момента времени t, то существует константа $C > 0$ такая, что $R < C$ любого момента времени t.*

Доказательство. Предположим противное. Переходя к ненормализованному потоку, найдем последовательность $t_i \to T$, где T — время, в которое метрика испытывает раздутие такое, что

$$(T - t_i)R_{\max}(t_i) \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Отсюда следует, что существует предельное раздутие, которое является пределом потока Риччи (либо без границы, либо с вполне геодезической границей). Но тогда это предельное решение должно быть сигарной метрикой, что противоречит оценке в теореме 7.2. □

Вновь рассмотрим нормализованный поток. Пусть

$$r = \frac{\int\limits_M R\,dV}{A(M)}.$$

Так как имеет место равенство $\frac{dr}{dt} = \int\limits_{\partial M} [k_g(R-r) - 2k_g']\,d\sigma$ и можно показать, что $l_t(\partial M) < C$ и $k \sim C\exp(-\delta t)$, получаем, что существует $\varepsilon > 0$ со свойством $r \geq \varepsilon$. Значит, существует и константа $c > 0$ такая, что $R_{\max}(t) \geq c$, где $R_{\max}(t) = \max\limits_{x\in M} R(x,t)$.

Переходя к ненормализованному потоку, заключаем, что $R_{\max}(t)$ сравним с $\frac{1}{T-t}$, где T — момент времени раздутия. Поэтому, если задана последовательность $t_k \to T$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_{\max}(t_k)}{R_{\min}(t_k)} = 1.$$

Переходом обратно к нормализованному потоку, получается

Теорема 7.3. *Предположим, что $R > 0$ и $k_0 > 0$ при $t = 0$. Тогда для нормализованного потока Риччи выполняется следующее свойство*: $R_{\max}(t) - R_{\min}(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

В изучаемом случае можно ожидать экспоненциальную сходимость. К примеру, можно попытаться применить методы раздела 6 из [11] для доказательства экспоненциальной сходимости, т. к. граничные члены экспоненциально быстро стремятся к нулю.

8. Сходимость подпоследовательности в случае $k_0 < 0$; семейство примеров

В силу теоремы 7.1 можно найти конформно инвариантные свойства начальных условий, которые сохраняются потоком Риччи, потом показать, что у сигарной метрики таких свойств нет.

Рассмотрим метрику вращения $ds^2 = dr^2 + f(r)^2 d\omega$ на $\mathbf{B}^2$, удовлетворяющую следующим свойствам:

(P1) $R > 0$ и R радиально убывают,

(P2) $\frac{\partial R}{\partial r} = k_g R$ на $\partial\mathbf{B}^2$.

Для метрик данного типа покажем, что поток Риччи униформизирует кривизну в вышеуказанном смысле.

Рассмотрим величину $\inf \frac{l^2(\partial B_\rho)}{A(B_\rho)}$ по дискам с центрами в полюсе многообразия с метрикой вращения, где через $A(B_\rho)$ обозначена площадь дисков, а через $l(\partial B_\rho)$ — длина границы диска.

Лемма 8.1. *Для $R \geq 0$ выполняется равенство*

$$\inf_{\rho>0} \frac{l^2(\partial B_\rho)}{A(B_\rho)} = \frac{l(\partial M)^2}{A(M)}.$$

Доказательство. Так как

$$\frac{l^2(\partial B_\rho)}{A(B_\rho)} = \frac{4\pi^2 f^2(\rho)}{2\pi \int\limits_0^\rho f(r)\,dr},$$

необходимо лишь показать, что для $\rho > 0$ функция

$$\frac{f(\rho)f'(\rho)}{f(\rho)} = f'(\rho)$$

не возрастает. Это легко следует из равенства $f'' = -Kf$, где K — гауссова кривизна многообразия M. $\square$

Условие (P2) обеспечивает то, что решение задачи (4) является по крайней мере класса C^3, поэтому можно применить принцип максимума для доказательства следующего предложения.

Предложение 8.1. *Для метрики, удовлетворяющей свойствам* (P1) *и* (P2), *скалярная кривизна R метрик потока Риччи не возрастает в радиальных направлениях.*

Доказательство. Решение может быть записано в виде

$$ds^2 = h(r,t)^2 dr^2 + f(r,t)^2 d\omega^2.$$

Пусть $\frac{\partial}{\partial\rho}$ — единичная нормаль в направлении $\frac{\partial}{\partial r}$, т. е. $\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial r}$. Положим $w = fR_\rho$. Тогда из эволюционного уравнения для кривизны при $\rho > 0$ имеем $R_t = \frac{1}{f}w_\rho + R^2$. Дифференцируя по ρ, получаем $R_{t\rho} = -\frac{f_\rho}{f^2}w_\rho + w_{\rho\rho} + 2RR_\rho$. С другой стороны, $R_{\rho t} = -\frac{1}{2}RR_\rho + R_{t\rho}$, что, в свою очередь, влечет $f\left(\frac{1}{2}RR_\rho + R_{\rho t}\right) = -\frac{f_\rho}{f}w_\rho + \frac{1}{f}w_{\rho\rho} + 2Rw$. Также $(fR_\rho)_t = f'R_\rho + fR_{\rho t}$.

Из уравнения потока Риччи следует $f' = -\frac{1}{2}Rf$. Это дает $fR_{\rho t} = (fR_\rho)_t + \frac{1}{2}RfR_\rho$, откуда получаем $\frac{1}{2}Rw + (fR_\rho)_t + \frac{1}{2}Rw = -\frac{f_\rho}{f}w_\rho + \frac{1}{f}w_{\rho\rho} + 2Rw$. Последнее уравнение упрощается к виду $w_t = \frac{1}{f}w_{\rho\rho} - \frac{f_\rho}{f}w_\rho + Rw$, и граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &w = 0, && \text{если } \rho = 0;\\ &w < 0, && \text{если } \rho \text{ равен радиусу поверхности;}\\ &w|_{t=0} \le 0. \end{aligned}$$

Теперь окончательный результат следует из принципа максимума. $\square$

Теперь рассмотрим нормализованный поток. Из предложения 8.1 следует

$$r \ge R_{\min}(t) = R|_{\partial M\times\{t\}},$$

следовательно, $l_t(\partial M) = \exp\left[\int\limits_0^t (r - R)\,d\tau\right] l_0(\partial M) \ge l_0(\partial M)$.

Последнее выражение вместе с леммой 8.1 показывает, что $\inf\frac{l^2(\partial B_\rho)}{A(B_\rho)} = l_t(\partial M) \ge l_0(M)$, т. е. изопериметрическое отношение остается отделенным от нуля для метрик потока, но для сигарной метрики оно равно нулю. Это доказывает, что получается случай A) теоремы 7.1, а значит, поток униформизирует кривизну с течением времени.

8.1. *Примеры.* Предъявим семейство метрик, удовлетворяющих условиям (P1) и (P2). Пусть $ds^2 = dr^2 + f_\varepsilon(r)^2 d\omega^2$, где

$$f_\varepsilon(r) = (1-\varepsilon)\sin r + \varepsilon r.$$

Тогда $f' = (1-\varepsilon)\cos r + \varepsilon$, $f'' = -(1-\varepsilon)\sin r$. Гауссова кривизна имеет вид

$$-\frac{f''}{f} = \frac{(1-\varepsilon)\sin r}{(1-\varepsilon)\sin r + \varepsilon r},$$

что можно переписать как

$$K = \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\frac{r}{\sin r}}.$$

Это выражение показывает, что K убывает по r (действительно, $\frac{r}{\sin r}$ возрастает). С другой стороны, геодезическая кривизна границы выражается в виде

$$\frac{f'}{f} = \frac{(1-\varepsilon)\cos r + \varepsilon}{(1-\varepsilon)\sin r + \varepsilon r}.$$

Таким образом, необходимо, чтобы при некотором r выполнялось равенство $f''' = 2f''f'/f$, т. е. $(1-\varepsilon)\cos r = \frac{2(1-\varepsilon)\sin r[(1-\varepsilon)\cos r+\varepsilon]}{(1-\varepsilon)\sin r+\varepsilon r}$, что можно упростить до вида

$$\varepsilon r \cos r - 2\varepsilon \sin r - (1-\varepsilon)\cos r \sin r = 0. \tag{10}$$

Покажем, что это уравнение имеет корень. Для этого заметим, что при $r = \frac{\pi}{2}$ выражение в левой части всегда отрицательно. При $r = \frac{3\pi}{4}$ левая часть дает выражение

$$\varepsilon\left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2},$$

которое положительно для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому существует $r_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, являющееся корнем уравнения (10). Заметим также, что $f'(r_0) < 0$ — это немедленно следует из того, что $\frac{\partial R}{\partial r} < 0$, $R > 0$ и $\frac{\partial R}{\partial r} = kR$.

Литература

1. Brendle S. *Curvature flows on surfaces with boundary* // Math. Ann. – 2002. – V. 324. – P. 491–519.
2. Perelman G. *The entropy formula for the Ricci flow and geometric applications.* – arXiv:math.DG/0211159, 2002.
3. Hamilton R.S. *The Ricci flow on surfaces* // Math. and General Relativity, Contemporary Math. – 1988. – V. 71. – P. 237–261.
4. Hamilton R.S. *Three manifolds with positive Ricci curvature* // J. Different. Geom. – 1982. – V. 17. – P. 255–306.
5. Hamilton R.S. *Harmonic maps of manifolds with boundary* // Lect. Notes in Math. – 1975. – V. 471. – 168 p.
6. Hamilton R.S. *A compactness property for solutions of the Ricci flow* // Amer. J. Math. – 1995. – V. 117. – P. 545–572.
7. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations.* – Springer-Verlag, 1993. – xvi+387 p.
8. Hamilton R.S. *The formation of singularities in the Ricci flow* // Surveys in Different. Geom. – 1995. – V. 2. – P. 7–136.
9. Rothaus O. *Logarithmic Sobolev inequalities and the spectrum of Sturm–Liouville operators* // J. Funct. Anal. – 1908. – V. 39. – P. 42–56.
10. Rothaus O. *Logarithmic Sobolev inequalities and the spectrum of Schrödinger operators* // J. Funct. Anal. – 1981. – V. 42. – P. 110–120.
11. Struwe M. *Curvature flows on surfaces* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5). – 2002 – V. I. – P. 247–274.

Университет Лос Андес
(*Богота, Республика Колумбия*)

Поступила
13.04.2007