ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 513.82

М.Б. БАНАРУ

О КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ 6-МЕРНЫХ КЕЛЕРОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

На всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия естественным образом индуцируется почти контактная метрическая структура. Именно этим, в основном, обусловлено значение почти эрмитовых многообразий в дифференциальной геометрии и теоретической физике.

В данной статье рассматриваются косимплектические гиперповерхности 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. Отметим, что 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры Кэли изучали Грей [1], [2] и Кириченко [3], [4], а почти контактным метрическим структурам на гиперповерхностях келеровых многообразий посвящено большое количество работ. Не вдаваясь в подробности столь обширной тематики, выделим статьи [5]–[7]. Данная статья является продолжением исследований автора, ранее рассматривавшего косимплектические гиперповерхности 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав [8]–[11].

1. Напомним, что почти эрмитовой структурой (AH-структурой) на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и g должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Здесь $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием (AH-многообразием). С каждой AH-структурой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т. е. 2-формы) F, определяемого равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}),$$

и называемого фундаментальной (или келеровой [12]) формой структуры.

Пусть $(M^{2n} \mid \{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\})$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p, g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g{=}\langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные к почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом: $(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, где ε_a — собственные векторы оператора структуры J_p, отвечающие собственному значению i, $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \overline{\varepsilon}_a$. Здесь $i = \sqrt{-1}$, $a = 1, \dots, n$, $\hat{a} = a + n$. Матрица оператора структуры J_p в точке p в A-репере выглядит следующим образом:

$$(J^k_j) = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right),$$

где I_n — единичная матрица порядка n, $k,j = 1,\dots,2n$. Как известно [13], матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в A-репере принимают соответственно вид

$$(g_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right); \quad (F_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right).$$

Пусть $\mathbf{O} \equiv R^8$ — алгебра Кэли. Как известно [14], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,Y,Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y;$$
$$P_2(X,Y,Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y.$$

Здесь $X,Y,Z \in \mathbf{O}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеприведенных.

Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением $J_\alpha(X) = P_\alpha(X,e_1,e_2)$, $\alpha = 1,2$, где $\{e_1,e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [14]. Почти эрмитово многообразие называется келеровым, если$\nabla J = 0$, где ∇ — риманова связность метрики на этом многообразии.

Напомним [3], что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где $e_0 \in \mathbf{O}$ — единица алгебры Кэли. Подмногообразие, состоящее только из общих точек, называется подмногообразием общего типа [3], [15]. Отметим, что в [3] приводится полная классификация 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав.

2. Пусть N — ориентируемая гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$, σ — вторая квадратичная форма ее погружения в M^6. Как известно [7], [16], на N внутренним образом индуцируется почти контактная метрическая структура. Напомним [17], что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется такая система $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$ тензорных полей на этом многообразии, что ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, Φ — поле тензора типа $(1,1)$, g — риманова метрика на N. При этом

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X,Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X,Y \in \mathfrak{X}(N).$$

Почти контактная метрическая структура называется косимплектической, если $\nabla\eta = \nabla\Phi = 0$. Многообразие, наделенное такой структурой, локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую [18]. Типовым числом гиперповерхности риманова многообразия называют ранг ее второй квадратичной формы (см., напр., [19]).

Теорема 1. *Типовое число всякой косимплектической гиперповерхности* 6*-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли не превосходит единицы.*

Доказательство. Воспользуемся первой группой структурных уравнений почти контактной метрической структуры на гиперповерхности эрмитова многообразия [9], [20]:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}{}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + (\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta)\omega^\beta \wedge \omega +$$
$$+ \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n + i\sigma^{\alpha\beta}\Big)\omega_\beta \wedge \omega;$$

$$
\begin{aligned}
d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^\gamma\omega_\gamma\wedge\omega^\beta + (\sqrt{2}B_{\alpha n}{}^\beta - i\sigma^\beta_\alpha)\omega_\beta\wedge\omega + \\
+\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n - i\sigma_{\alpha\beta}\Big)\omega^\beta\wedge\omega; \\
d\omega = (\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha - 2i\sigma^\alpha_\beta)\omega^\beta\wedge\omega_\alpha + (B_{n\beta}{}^n + i\sigma_{n\beta})\omega\wedge\omega^\beta + \\
+(B^{n\beta}{}_n - i\sigma^\beta_n)\omega\wedge\omega_\beta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\{B^{ab}{}_c\}$ и $\{B_{ab}{}^c\}$ — компоненты виртуальных тензоров Кириченко I и II рода соответственно [21]. При этом $\alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,n-1$; $a,b,c = 1,\dots,n$. Эрмитово многообразие является келеровым тогда и только тогда, когда [22]

$$B^{ab}{}_c = B_{ab}{}^c = 0.$$

Поэтому в келеровом случае уравнения (1) запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta + i\sigma^\alpha_\beta\omega^\beta\wedge\omega + i\sigma^{\alpha\beta}\omega_\beta\wedge\omega; \\
d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta - i\sigma^\beta_\alpha\omega_\beta\wedge\omega - i\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta\wedge\omega; \\
d\omega &= -2i\sigma^\alpha_\beta\omega^\beta\wedge\omega_\alpha + i\sigma_{n\beta}\omega\wedge\omega^\beta - i\sigma^\beta_n\omega\wedge\omega_\beta.
\end{aligned}
$$

Поскольку первая группа структурных уравнений косимплектической структуры должна иметь вид [17]

$$
\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta; \\
d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta; \\
d\omega &= 0,
\end{aligned}
$$

то условия, представляющие собой критерии косимплектичности гиперповерхности N имеют вид

$$\sigma^{\alpha\beta} = 0; \quad \sigma^\alpha_\beta = 0; \quad \sigma^\beta_n = 0. \tag{2}$$

В силу полученных равенств (2) матрица второй квадратичной формы гиперповерхности N 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли имеет вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Очевидно, ранг σ не превосходит единицы. $\square$

Поскольку всякое 6-мерное W_4-подмногообразие алгебры октав является келеровым [22], из доказанной теоремы вытекает

Следствие. Типовое число всякой косимплектической гиперповерхности 6-мерного W_4-подмногообразия алгебры Кэли не превосходит единицы.

Отметим, что если подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ эрмитово, то типовое число его косимплектической гиперповерхности не превосходит трех [10].

В [10] доказано также, что косимплектическая гиперповерхность 6-мерного эрмитова (а значит, в частности, и келерова) подмногообразия общего типа алгебры октав является минимальной в том и только том случае, если для ее второй квадратичной формы выполняется условие

$$\sigma_{33} \equiv 0. \tag{4}$$

Пусть N — минимальная косимплектическая гиперповерхность 6-мерного келерова подмногообразия общего типа алгебры Кэли. В этом случае из (3) и (4) следует, что матрица второй квадратичной формы является нулевой, и, следовательно, гиперповерхность будет вполне геодезической. Очевидно и обратное: всякая вполне геодезическая косимплектическая гиперповерхность келерова $M^6 \subset \mathbf{O}$ является его минимальным подмногообразием.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Косимплектическая гиперповерхность N 6-мерного келерова подмногообразия M^6 общего типа алгебры Кэли является минимальной тогда и только тогда, когда N — вполне геодезическое подмногообразие многообразия M^6.*

Отметим, что если M^6 — эрмитово подмногообразие алгебры октав, то условие минимальности N в M^6, оставаясь необходимым для вполне геодезичности N, достаточным не будет [10].

Автор считает своей приятной обязанностью поблагодарить заведующего кафедрой геометрии МПГУ профессора Вадима Федоровича Кириченко и профессора кафедры геометрии Ясского университета “Александру Ион Куза” Василе Опрою, чьи ценные советы и замечания были весьма полезны на разных стадиях написания данной статьи.

Литература

1. Gray A. *Some examples of almost Hermitian manifolds* // Illinois J. Math. – 1966. – V. 10. – № 2. – P. 353–366.
2. Gray A. *Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products* // Tôhoku Math. J. – 1969. – V. 21. – P. 614–620.
3. Кириченко В.Ф. *Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 8. – С. 32–38.
4. Кириченко В.Ф. *Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли* // Укр. геометрич. сб. – 1982. – Т. 25. – С. 60–68.
5. Goldberg S. *Totally geodesic hypersurfaces of Kaehler manifolds* // Pacif. J. Math. – 1968. – V. 27. – № 2. – P. 275–281.
6. Tashiro Y. *On contact structures of hypersurfaces in complex manifolds.* I // Tôhoku. Math. J. – 1963. – V. 15. – № 1. – P. 62–78.
7. Кириченко В.Ф., Степанова Л.В. *О геометрии гиперповерхностей квазикелеровых многообразий* // УМН. – 1995. – № 2. – С. 213–214.
8. Banaru M. *Six theorems on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra* // Изв. АН Респуб. Молдова. Сер. матем. – 2000. – № 3. – С. 3–10.
9. Banaru M. *On six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra satisfying the g-cosymplectic hypersurfaces axiom* // Annuaire de l'université de Sofia “St. Kl. OHRIDSKI”. – 2000. – V. 94. – P. 91-96.
10. Banaru M. *Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra* // J. Harbin Inst. Techn. – 2001. – V. 8. – № 1. – P. 38–40.
11. Banaru M. *On totally umbilical cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra* // Acta Univ. Palacki. Olomuc. Math. – 2002. – V. 41. – P. 7–12.
12. Sato T. *An example of an almost Kähler manifold with pointwise constant holomorphic sectional curvature* // Tokyo J. Math. – 2000. – V. 23. – № 2. – P. 387–401.
13. Арсеньева О.Е., Кириченко В.Ф. *Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей* // Матем. сб. – 1998. – Т. 189. – № 1. – С. 21–44.
14. Gray A. *Vector cross products on manifolds* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 141. – P. 465–504.
15. Кириченко В.Ф. *Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли* // Вестн. МГУ. Сер. матем., механ. – 1994. – № 3. – С. 6–13.

16. Blair D.E. *The theory of quasi-Sasakian structures* // J. Different. Geom. – 1967. – V. 1. – P. 331–345.
17. Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – 1986. – Т. 18. – С. 25–71.
18. Kiritchenko V.F. *Sur la gèomètrie des variètès approximativement cosymplectiques* // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. – 1982. – V. 295. – № 2. – P. 673–676.
19. Kurihara H. *The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form* // Tsukuba J. Math. – 2000. – V. 24. – № 1. – P. 127–132.
20. Степанова Л.В. *Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий* // Научн. тр. Московск. гос. пед. ун-та. – 1995. – С. 187-191.
21. Банару М.Б. *Тензоры Кириченко* // Исследов. по краев. задачам комплексн. анализа и дифференц. уравнениям. – Смоленск, 2000. – Вып. 2. – С. 42–48.
22. Банару М.Б. *Классы Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли* // Научн. тр. Московск. гос. пед. ун-та. – 1994. – С. 36–38.

Смоленский гуманитарный университет

Поступила 13.12.2001