ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 517.131

Е.В. МАНОХИН

Г-СЛАБО ЛОКАЛЬНО РАВНОМЕРНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

Данная работа — продолжение исследования некоторого обобщения слабой локальной равномерной выпуклости, начатого в [1].

Напомним, что банахово пространство X называется слабо локально равномерно выпуклым (обозначается $X \in WLUR$), если из условий $x, x_n \in X$, $\|x\| = \|x_n\| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x+x_n\| = 2$ следует слабая сходимость последовательности x_n к элементу x (см. [2]).

Сопряженное банахово пространство X^* называется слабо* локально равномерно выпуклым (обозначается $X^* \in W^*LUR$), если из условий $y, y_n \in X^*$, $\|y\| = \|y_n\| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|y + y_n\| = 2$ следует слабая* сходимость последовательности y_n к элементу y. Единичную сферу банахова пространства X в дальнейшем будем обозначать через $S(X)$.

Подмножество $F \subset X^*$ называется тотальным, если условие $f(x) = 0$ для всех $f \in F$ влечет $x = 0$. Напомним, что отображение $x \to f_x$ из $X \setminus \{0\}$ в $X^* \setminus \{0\}$ называется опорным отображением, если из $\|x\| = 1$ следует $\|f_x\| = 1 = f_x(x)$ и из $\lambda > 0$ следует $f_{\lambda x} = \lambda f_x$.

Банахово пространство X называется гладким в точке $x_0 \in S(X)$, если существует единственный функционал $f \in S(X^*)$ такой, что $f(x_0) = 1$. Если X гладкое в каждой точке $S(X)$, то говорят, что X гладкое.

Банахово пространство X называется строго выпуклым (обозначается $X \in R$), если $S(X)$ не содержит нетривиальных линейных сегментов.

В данной статье вводится свойство $WLUR(\Gamma)$, являющееся обобщением свойств $WLUR$ и W^*LUR.

Пусть $\Gamma \subset X^*$, $x, x_n \in X$. Будем говорить, что последовательность x_n Г-слабо сходится к x, если

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \quad f \in \Gamma.$$

Например, слабая сходимость x_n к x, где $x_n, x \in X$ является X^*-слабой сходимостью x_n к x. Соответственно $*$-слабая сходимость f_n к f, где $f_n, f \in X^*$ является X-слабой сходимостью f_n к f, т.к. X естественно вкладывается в X^{**}.

Определение. Пусть $\Gamma \subset X^*$. Пространство X назовем Г-слабо локально равномерно выпуклым (обозначается $X \in WLUR(\Gamma)$), если из условий $x, x_n \in X$, $\|x\| = \|x_n\| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x+x_n\| = 2$ следует Г-слабая сходимость последовательности x_n к x.

Аналогично определяется Г-слабо локально равномерная выпуклость пространства X^*. Отметим,что допустимо говорить о Г-слабо локально равномерной выпуклости X^* не только в случае $\Gamma \subset X^{**}$, но и в случае $\Gamma \subset X$, т.к. X естественно вкладывается в X^{**}.

Очевидно при $\Gamma = X^*$ и $X \in WLUR(\Gamma)$ получим обычное $WLUR$-свойство пространства X. При $\Gamma = X$ и $X^* \in WLUR(\Gamma)$ получим $X^* \in W^*LUR$. Очевидно, что если $\Gamma \supset \Gamma_1$, то из $X \in WLUR(\Gamma)$ следует $X \in WLUR(\Gamma_1)$.

В случае сепарабельных пространств Г вопрос о наличии эквивалентной нормы, относительно которой X обладает $WLUR(\Gamma)$ свойством, решается следующим утверждением, которое представляет собой аналог теоремы Кадеца ([3]) и которое в другой формулировке доказано в работе [1].

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство. Если Γ — сепарабельное подпространство X^*, то X допускает эквивалентную Γ-слабо локально равномерно выпуклую норму.*

Следствие 1 ([1]). Если X — сепарабельное пространство, то X^* допускает двойственную эквивалентную слабо* локально равномерно выпуклую норму (определение двойственной нормы см. в [2]).

Следствие 2 ([1]). Пространство l_∞ допускает двойственную эквивалентную слабо* локально равномерно выпуклую норму.

Теорема 2. *Если X есть Γ-слабо локально равномерно выпуклое пространство и Γ — тотальное множество, то X — строго выпуклое пространство.*

Доказательство. Предположим, что X есть не строго выпуклое банахово пространство, а $x, y \in S(X)$ такие различные точки из X, для которых

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S(X)$$

при всех $\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1$. Рассмотрим

$$z_n = \frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n}y.$$

Заметим, что z_n сильно сходится к y. С другой стороны, при каждом n очевидно

$$\frac{x+z_n}{2} \in S(X).$$

Из Γ-слабо локальной равномерной выпуклости следует, что z_n Γ-слабо сходится к x. Но это невозможно, т.к. z_n Γ-слабо сходится к y, а Γ тотально на X. Приходим к противоречию. Итак, $X \in R$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1 ([2]). Если X — слабо локально равномерно выпуклое пространство, то X — строго выпуклое пространство.

Следствие 2 ([1]). Если X^* — слабо* локально равномерно выпуклое пространство, то X^* — строго выпуклое пространство.

Следствие 3 ([2]). Если X — сепарабельное пространство, то $X^* \in R$ в эквивалентной двойственной норме и, следовательно, X — гладкое пространство в эквивалентной норме.

Следствие 4 ([1]). Если S — несчетное множество, то $l_\infty(S)$ не будет слабо* локально равномерно выпуклым ни в какой эквивалентной норме.

Последнее утверждение получается из теоремы 2 и из того факта, что $l_\infty(S) \notin R$ ни в какой эквивалентной норме, если Γ – несчетное множество ([2]).

Из теоремы 2 следует, что если X^* — слабо* локально равномерно выпуклое пространство, то X — гладкое пространство, т.е. опорное отображение переводит сходящуюся последовательность из единичной сферы X в слабо* сходящуюся последовательность. Известно ([2]), что если X^* — слабо локально равномерно выпуклое пространство, то X — очень гладкое пространство, т.е. опорное отображение переводит сходящуюся последовательность из единичной сферы в слабо сходящуюся последовательность. Можно доказать более сильное утверждение.

Теорема 3. *Если X^* есть Γ-слабо локально равномерно выпуклое пространство, то опорное отображение переводит любую слабо сходящуюся последовательность из единичной сферы X в Γ-слабо сходящуюся последовательность единичной сферы X^*.*

Доказательство. Пусть $x, x_n \in S(X)$ и x_n слабо сходится к x. Тогда $\|f_{x_n}\| = \|f_x\| = 1$. Оценим $\|f_{x_n} + f_x\|$:

$$2 \geq \|f_{x_n} + f_x\| \geq (f_{x_n} + f_x)(x_n) = f_{x_n}(x_n) + f_x(x) - f_x(x) + f_x(x_n) = 2 - f_x(x - x_n).$$

Так как $x_n \xrightarrow{w} x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_{x_n} + f_x\| = 2$. Так как $X^* \in WLUR(\Gamma)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_{x_n}(y) = f_x(y)$ для любых $y \in \Gamma$. $\square$

Следствие 1 ([1]). Если $X^* \in W^*LUR$, то опорное отображение переводит любую слабо сходящуюся последовательность из единичной сферы в слабо* сходящуюся последовательность.

Следствие 2. Если $X^* \in WLUR$, то опорное отображение переводит любую слабо сходящуюся последовательность из единичной сферы в слабо сходящуюся последовательность.

В заключение остановимся на связи свойств выпуклости единичного шара с непрерывными линейными отображениями.

Известно ([2]), что банахово пространство X имеет эквивалентную строго выпуклую норму тогда и только тогда, когда существует строго выпуклое банахово пространство Y и взаимно однозначное непрерывное отображение $T : X \to Y$.

В работах [4], [5] установлена связь непрерывного неизоморфного отображения с локальной равномерной выпуклостью. Доказывается

Теорема 4. *Пусть X, Y — банаховы пространства. $Y \in WLUR$ и $T : X \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Тогда X — Γ-слабо локально равномерно выпукло в эквивалентной норме, где Γ — замыкание T^*Y^* в нормированной топологии пространства X^*. Если T^*Y^* плотно в X^*, то X — слабо локально равномерно выпуклое пространство.*

Доказательство. Будем использовать следующее определение $WLUR$ [4]:

> $X \in WLUR$, если для любых $x_n, x \in X$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2 = 0$ выполнено: x_n слабо сходится к x.

Определим эквивалентную норму на X формулой

$$|||x||| = (\|x\|^2 + \|Tx\|^2)^{1/2},$$

где $\|\cdot\|$ — норма на X или на Y.

Пусть $z, z_n \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2|||z|||^2 + 2|||z_n|||^2 - |||z + z_n|||^2 = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(T^*f) = z(T^*f)$, $f \in Y^*$. Действительно, $2\|z\|^2 + 2\|z_n\|^2 - \|z + z_n\|^2 \geq 2\|z\|^2 + 2\|z_n\|^2 - (\|z\| + \|z_n\|)^2 = (\|z_n\| - \|z\|)^2 \geq 0$. Аналогично доказывается $2\|Tz\|^2 + 2\|Tz_n\|^2 - \|Tz + Tz_n\|^2 \geq (\|Tz_n\| - \|Tz\|)^2 \geq 0$. Тогда $2|||z_n|||^2 + 2|||z|||^2 - |||z + z_n|||^2 \geq (\|z_n\| - \|z\|)^2 + (\|Tz_n\| - \|Tz\|)^2 \geq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} (\|z_n\| - \|z\|)^2 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\|Tz_n\| - \|Tz\|)^2 = 0$. Так как $2|||z|||^2 + 2|||z_n|||^2 - |||z + z_n|||^2 \geq (2\|Tz_n\|^2 + 2\|Tz\|^2 - \|Tz + Tz_n\|^2) \geq (\|Tz_n\| - \|Tz\|)^2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} 2\|Tz\|^2 + 2\|Tz_n\|^2 - \|Tz_n + Tz\|^2 = 0$. Поскольку $Y \in WLUR$, то Tz_n сходится слабо к Tz. Пусть $f \in Y^*$. $\lim\limits_{n\to\infty} T^*f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(Tz_n) = f(Tz) = T^*f(z)$. Итак, z_n Γ_1-слабо сходится к z, где $\Gamma_1 = T^*Y^*$, если $\lim\limits_{n\to\infty} 2|||z|||^2 + 2|||z_n|||^2 - |||z + z_n|||^2 = 0$. Возьмем произвольные $x_n, x \in X$, $|||x_n||| = |||x||| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |||x + x_n||| = 2$. Тогда очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2|||x|||^2 + 2|||x_n|||^2 - |||x + x_n|||^2 = 0$, а следовательно, x_n Γ_1-слабо сходится к x. Если ограниченная последовательность x_n сходится к элементу на всех линейных функционалах из некоторого множества $\Gamma_1 \subset X^*$, то она сходится к нему на всех элементах его замыкания Γ.

Следовательно, x_n Γ-слабо сходится к x. Итак, $X \in WLUR(\Gamma)$. $\square$

Литература

1. Манохин Е.В. *О K-локально равномерно выпуклых пространствах* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 5. – С.32–34.
2. Дистель Д. *Геометрия банаховых пространств.* – Киев: Вища школа, 1980. – 215 с.
3. Кадец М.И. *0 связи между слабой и сильной сходимостью* // ДАН УССР. – 1959. – № 9. – С.949–952.
4. Godefroy G., Troyanski S., Whitefield J., Zizler V. *Smoothness in weakly compactly generated Banach spaces* // J. Funct. Anal. – 1983. – V. 52. – № 3. – P. 344–352.
5. Godefroy G., Troyanski S., Whitefield J., Zizler V. *Three-space problem for locally uniformly rotund renorming of Banach spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 94. – № 4. – P. 647–652.

Тульский государственный
педагогический университет

Поступила
14.07.1994