ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.956

А.Г. ЛОСЕВ, Е.А. МАЗЕПА

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Вопросы существования нетривиальных ограниченных гармонических функций на римановых многообразиях в их связи с геометрией многообразий изучались рядом авторов. Классическая теорема Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в R^n функция является тождественной постоянной. Аналогичный результат был получен Яу [1], который доказал, что любая положительная гармоническая функция на многообразии неотрицательной кривизны Риччи является постоянной. С другой стороны, Сулливан [2] и Андерсон [3] показали, что на односвязных многообразиях отрицательной кривизны существуют нетривиальные гармонические функции. Более того, они доказали разрешимость задачи Дирихле с непрерывными граничными условиями на таких многообразиях. В [4] установлено, что геометрическая граница полного многообразия отрицательной кривизны гомеоморфна его границе Мартина. Рядом авторов решались аналогичные задачи для линейных эллиптических уравнений более общих, чем уравнение Лапласа–Бельтрами (напр., [5]–[7]).

Данная работа посвящена изучению поведения ограниченных решений уравнения вида

$$Lu = \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая, неотрицательная функция, на римановых многообразиях некоторого специального вида.

Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт, а D изометрично прямому произведению $R_+ \times S$ ($R_+ = (0, +\infty)$, а S — компактное риманово многообразие) с метрикой

$$ds^2 = h^2(r)dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь $h(r)$ и $g(r)$ — положительные, гладкие на R_+ функции, а $d\theta^2$ — метрика на S. Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство ($h(r) = 1$, $g(r) = r$), пространство Лобачевского ($h(r) = 1$, $g(r) = \operatorname{sh} r$), поверхность, полученная вращением графика функции $f(r)$ вокруг луча Or в R^n ($h(r) = \sqrt{1 + |f'(r)|^2}$, $g(r) = f(r)$), и другие.

Будем говорить, что на многообразии M выполнена двусторонняя теорема Лиувилля, если всякое ограниченное по модулю решение уравнения (1) на M является тождественным нулем.

Будем говорить, что на многообразии M однозначно разрешима задача Дирихле, если для любой непрерывной на S функции $\Phi(\theta)$ существует единственное решение $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = \Phi(\theta).$$

В дальнейшем считается, что на D выполнено условие $c(r, \theta) \equiv c(r)$.

Замечание 1 ([7]). Пусть $0 \le c(x) \le Ac_1(x)$, где $A = \text{const} > 0$, $c \not\equiv 0$. Тогда, если выполнена двусторонняя лиувиллева теорема для уравнения $\Delta v - c(x)v = 0$, то она выполнена и для уравнения $\Delta v - c_1(x)v = 0$.

Положим
$$I = \int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^{t} (h(\beta) g^{n-3}(\beta) + c(\beta) h(\beta) g^{n-1}(\beta))\, d\beta \right) dt,$$
где $r_0 = \mathrm{const} > 0$, $n = \dim M$.

Теорема. *α) Если риманово многообразие M таково, что $I < \infty$, то для любой непрерывной на S функции $\Phi(\theta)$ однозначно разрешима на M задача Дирихле для уравнения* (1).

β) Если на M выполнено хотя бы одно из условий
$$\int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t)\, dt = \infty$$
или
$$\int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^{t} c(\beta) h(\beta) g^{n-1}(\beta)\, d\beta \right) dt = \infty,$$
то всякое ограниченное решение уравнения (1) *на M тождественно равно нулю.*

γ) Если M таково, что $I = \infty$ и не выполнены условия п. β) теоремы, то на M существует нетривиальное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (1)*, для которого существует конечный предел $\lim\limits_{r \to \infty} u(r, \theta)$, не зависящий от θ.*

Замечание 2. Если $c(x) \equiv 0$, то пп. β) и γ) в теореме заменяются на следущее утверждение, доказанное ранее в [8]. *Если M таково, что $I = \infty$, то на нем всякая ограниченная гармоническая функция является тождественной константой.*

Доказательство теоремы. Докажем сначала п. α) теоремы. Пусть $\Phi(\theta)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая на S функция. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть риманово многообразие M таково, что $I < \infty$. Тогда для любых гладких на S функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ существует решение $u(r, \theta)$ внешней задачи Дирихле на $M \setminus B$ уравнения* (1)*, для которого $u(r_0, \theta) = \Psi(\theta)$ и $\lim\limits_{r \to \infty} u(r, \theta) = \Phi(\theta)$.*

Доказательство леммы. Заметим, что в координатах (r, θ) на D оператор $L = \Delta - c(r)$ имеет вид
$$L = \frac{1}{h^2(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{h^2(r)} \Big[(n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} \Big] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{g^2(r)} \Delta_\theta - c(r), \tag{2}$$
где Δ_θ — внутренний лапласиан на S. Формула проверяется непосредственно по определению оператора Лапласа–Бельтрами (напр., [8]).

Пусть $\{w_k\}$ — ортонормированный базис в $L^2(S)$ из собственных функций оператора Δ_θ, а $\{\lambda_k\}$ — соответствующие собственные числа. Тогда имеют место представления
$$\Phi(\theta) \overset{L^2(S)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(\theta), \quad \Psi(\theta) \overset{L^2(S)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} z_k w_k(\theta),$$
где
$$c_k = \int_S \Phi(\theta) w_k(\theta)\, d\theta, \quad z_k = \int_S \Psi(\theta) w_k(\theta)\, d\theta,$$
и для любого r имеем
$$u(r, \theta) \overset{L^2(S)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta),$$
где
$$v_k(r) = \int_S u(r, \theta) w_k(\theta)\, d\theta, \quad \Delta_\theta w_k(\theta) + \lambda_k w_k(\theta) = 0.$$

Из (2) следует, что для любого индекса k функция $v_k(r)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$v_k''(r) + \Big[(n-1)\frac{g'(r)}{g(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)}\Big]v_k'(r) - \Big[\lambda_k \frac{h^2(r)}{g^2(r)} + h^2(r)c(r)\Big]v_k(r) = 0, \qquad (3)$$

которое эквивалентно уравнению

$$\Big[\frac{g^{n-1}(r)}{h(r)}v_k'(r)\Big]' = \Big[\lambda_k h(r)g^{n-3}(r) + c(r)g^{n-1}(r)h(r)\Big]v_k(r).$$

После интегрирования его от r_0 до r получим

$$v_k'(r) = \frac{h(r)}{g^{n-1}(r)}\int_{r_0}^{r}[\lambda_k h(\beta)g^{n-3}(\beta) + c(\beta)h(\beta)g^{n-1}(\beta)]v_k(\beta)\,d\beta + \frac{v_k'(r_0)g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)}\frac{h(r)}{g^{n-1}(r)}. \qquad (4)$$

Интегрируя еще раз от r_0 до r, имеем

$$v_k(r) = \int_{r_0}^{r}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\int_{r_0}^{t}[\lambda_k h(\beta)g^{n-3}(\beta) + c(\beta)g^{n-1}(\beta)h(\beta)]v_k(\beta)\,d\beta\,dt +$$
$$+ \frac{v_k'(r_0)g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)}\int_{r_0}^{r}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\,dt + v_k(r_0). \qquad (5)$$

Так как $u(r_0,\theta) = \Psi(\theta)$, то для любого $k = 0,1,2,\ldots$ $v_k(r_0) = z_k$. Покажем, что по значениям $v_k(r_0) = z_k$ и c_k можно подобрать значение $v_k'(r_0)$ так, что соответствующее решение уравнения (3) удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) = c_k$ для всех $k = 0,1,2,\ldots$

Переобозначим решение уравнения (3) $v_k(r)$ с граничными условиями $v_k(r_0) = 1$, $v_k'(r_0) = 0$ через $l_k(r)$. Тогда из (4) следует, что $l_k(r)$ — монотонно возрастающая, положительная функция на луче $(r_0,+\infty)$ [8].

Покажем ограниченность $l_k(r)$ на $(r_0,+\infty)$. Так как $l_k(r)$ монотонно возрастает на $(r_0,+\infty)$ и положительна, то из (4) следует, что

$$l_k'(r) \le h(r)g^{1-n}(r)l_k(r)\int_{r_0}^{r}[\lambda_k h(\beta)g^{n-3}(\beta) + c(\beta)h(\beta)g^{n-1}(\beta)]\,d\beta.$$

Отсюда

$$[\ln l_k(r)]' \le \frac{h(r)}{g^{n-1}(r)}\int_{r_0}^{r}[\lambda_k h(\beta)g^{n-3}(\beta) + c(\beta)h(\beta)g^{n-1}(\beta)]\,d\beta.$$

Интегрируя данное неравенство от r_0 до r, получаем

$$l_k(r) \le \exp\Big\{\int_{r_0}^{r}\frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\Big(\int_{r_0}^{t}[\lambda_k h(\beta)g^{n-3}(\beta) + c(\beta)g^{n-1}(\beta)]\,d\beta\Big)\,dt\Big\}.$$

Из условия $I < \infty$ имеем ограниченность $l_k(r)$.

Из монотонного возрастания и ограниченности функции $l_k(r)$ следует существование предела $\lim\limits_{r\to\infty} l_k(r) = b_k$ для всех $k = 0,1,2,\ldots$, причем $b_k > 0$.

Рассмотрим теперь решение уравнения (3) с граничными условиями $v_k(r_0)=0$, $v_k'(r_0)=1$. Обозначим его $m_k(r)$. Точно так же, как и для $l_k(r)$, доказывается, что $m_k(r)$ монотонно возрастает и ограничена на $(r_0,+\infty)$. Из монотонного возрастания и ограниченности функции следует существование предела

$$\lim_{r\to+\infty} m_k(r) = d_k$$

для всех $k = 0,1,2,\ldots$, причем $d_k > 0$.

Из линейности уравнения (3) любое его решение можно представить в виде $v_k(r) = a_1 l_k(r) + a_2 m_k(r)$, где a_1, a_2 — некоторые константы. Из условий $v_k(r_0) = z_k$, $c_k = \lim\limits_{r\to+\infty} v_k(r)$ легко найти, что $a_1 = z_k$, $a_2 = (c_k - z_k b_k)/d_k$. Тогда искомое решение имеет вид

$$v_k(r) = z_k l_k(r) + \frac{c_k - z_k b_k}{d_k} m_k(r), \quad \text{причем} \quad v_k'(r_0) = \frac{c_k - z_k b_k}{d_k}.$$

Кроме того, легко показать, что решение $v_k(r)$ уравнения (3), полученное выше, удовлетворяет неравенству $|v_k(r)| \le |z_k| + |c_k|$ для всех $r \ge r_0$.

Далее докажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)$ равномерно сходится на $(r_0, +\infty)$.

Используя формулу Грина и определение $w_k(\theta)$, для $k \ne 0$ получаем

$$|c_k| = \Big|\int_S \Phi(\theta) w_k(\theta)\, d\theta\Big| = \frac{1}{\lambda_k}\Big|\int_S \Phi(\theta)\Delta_\theta w_k(\theta)\, d\theta\Big| = \frac{1}{\lambda_k}\Big|\int_S \Delta_\theta \Phi(\theta) w_k(\theta)\, d\theta\Big|.$$

Применяя формулу Грина p_1 раз (p_1 — произвольное натуральное число), получим

$$|c_k| = \frac{1}{\lambda_k^{p_1}}\Big|\int_S \Delta_\theta^{p_1}\Phi(\theta) w_k(\theta)\, d\theta\Big|.$$

Применяя к правым частям неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$|c_k| \le \frac{1}{\lambda_k^{p_1}}\left(\int_S (\Delta_\theta^{p_1}\Phi(\theta))^2\, d\theta\right)^{1/2}\left(\int_S w_k^2(\theta)\, d\theta\right)^{1/2} = \frac{a}{\lambda_k^{p_1}},$$

где a — константа, зависящая от S и p_1.

Из асимптотики Вейля [9] следует, что $\lambda_k \ge a_1 k^{\frac{2}{n-1}}$, где a_1 — константа, зависящая от S. Поэтому $|c_k| \le a/(a_1^{p_1} k^{\frac{2p_2}{n-1}})$. Из теоремы вложения Соболева и стандартных эллиптических оценок вытекает оценка $|w_k(\theta)| < a_2 k^N$, где a_2 и N — константы, зависящие от компакта S [8]. Учитывая эти оценки, получаем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,|w_k(\theta)|.$$

Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|\,|w_k(\theta)|.$$

Из равномерной сходимости этих рядов получаем равномерную и абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)$$

на $(r_0, +\infty)$, т. к.

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)\Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)|\,|w_k(\theta)| \le \sum_{k=1}^{\infty} (|z_k| + |c_k|)|w_k(\theta)| = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|\,|w_k(\theta)| + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,|w_k(\theta)|,$$

а эти два ряда сходятся равномерно.

Учитывая, что

$$\lim_{r\to\infty} v_k(r) = c_k,$$

получаем

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(\theta) = \Phi(\theta).$$

Таким образом, на $M \setminus B$ уравнение $Lu = \Delta u - c(r)u = 0$ решает функция

$$u(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta),$$

удовлетворяющая условиям

$$u(r_0,\theta) = \Psi(\theta), \quad \lim_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Phi(\theta),$$

где $\Phi(\theta)$, $\Psi(\theta)$ — произвольные бесконечно дифференцируемые функции. $\square$

Замечание 3. В условиях леммы решения уравнения (3) обладают следующим свойством. Если существует $r_1 \geq r_0$, при котором $v_k(r_1)v_k'(r_1) \geq 0$ и одно из чисел отлично от нуля, то решение $v_k(r)$ не меняет знака на $(r_1, +\infty)$ и $|v_k(r)|$ монотонно возрастает на $(r_1, +\infty)$.

Продолжим доказательство теоремы. По лемме на $M\setminus B$ существует решение $u_0(r,\theta)$ внешней задачи Дирихле уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющее условиям

$$u_0(r_0,\theta) = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} u_0(r,\theta) = \Phi(\theta).$$

Далее рассмотрим последовательность функций ϕ_i, являющихся решениями задач

$$L\phi_i = 0 \quad \text{в} \quad B_i, \qquad \phi_i\,|_{\partial B_i} = u_0\,|_{\partial B_i},$$

где $\{B_i\}$ — возрастающая последовательность предкомпактных подмножеств M, имеющих гладкие границы и исчерпывающих M.

По принципу максимума

$$\sup_{B_i} |\phi_i| = \sup_{\partial B_i} |\phi_i| = \sup_{\partial B_i} |u_0| \leq \sup_{\theta} |\Phi(\theta)|.$$

Отсюда следует равномерная ограниченность семейства функций $\{\phi_i\}$ на M.

Далее для каждой точки $x \in M$ существует окрестность $O(x) \subset M$, гомеоморфная R^n, а также существует номер $I(x)$, начиная с которого $O(x) \subset B_i$ и, следовательно, для всех $i > I(x)$ выполнено $L\phi_i = 0$ в $O(x)$. Кроме того, оператор L является строго эллиптическим, а его коэффициенты — гладкими функциями. Тогда для любого предкомпактного подмножества $\Omega' \subset O(x)$ такого, что $\operatorname{dist}(\Omega', \partial O(x)) \geq d > 0$, и для всех функций ϕ_i, $i > I(x)$, выполнена внутренняя оценка Шаудера ([10], с. 94–95)

$$d \sup_k \sup_{\Omega'} \Big|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}(x)\Big| + d^2 \sup_{k,p} \sup_{\Omega'} \Big|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_k \partial x_p}(x)\Big| + \\ + d^2 \sup_{j,k,l,p} \sup_{\substack{x,y\in\Omega' \\ x\neq y}} \Big|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_k \partial x_p}(x) - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_j \partial x_l}(y)\Big| \leq C \sup_{O(x)} |\phi_i(x)|,$$

где C — константа, зависящая от свойств оператора L, n и области $O(x)$. Из данной оценки с учетом равномерной ограниченности семейства функций $\{\phi_i\}$ на M следует равностепенная непрерывность этого семейства, а также равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность семейств первых и вторых производных этих функций на любом компактном подмножестве $\Omega' \subset O(x)$. Отсюда с учетом свойств компактных множеств легко получается компактность семейства функций $\{\phi_i\}$ вместе с семейством их первых и вторых производных на любом компактном подмножестве $G \subset M$.

Докажем теперь, что существует функция $u = \lim_{i\to+\infty} \phi_i$. Для этого рассмотрим в B_i следующие задачи:

$$L\psi_i = 0 \quad \text{в} \quad B_i, \qquad \psi_i\,|_{\partial B_i} = u_0^+\,|_{\partial B_i},$$

и

$$L\chi_i = 0 \quad \text{в} \quad B_i, \qquad \chi_i\,|_{\partial B_i} = u_0^-\,|_{\partial B_i},$$

где $u_0^{\pm} = \max\{0, \pm\, u_0\}$ и $u_0 = u_0^+ - u_0^-$. Тогда $\phi_i = \psi_i - \chi_i$ для всех i. По принципу максимума легко доказывается, что последовательности решений $\{\psi_i\}$ и $\{\chi_i\}$ монотонно не убывают в каждой точке $x \in M$. Кроме того, оба семейства функций равномерно ограничены на M в силу принципа максимума. Значит, существуют функции $u^+ = \lim\limits_{i\to\infty} \psi_i$ и $u^- = \lim\limits_{i\to\infty} \chi_i$ и, следовательно, существует функция $u = u^+ - u^- = \lim\limits_{i\to\infty} \phi_i$, которая в силу компактности семейства $\{\phi_i\}$ является решением уравнения $Lu = 0$ на M.

Далее докажем, что

$$\lim_{r\to+\infty} u(r,\theta) = \Phi(\theta). \tag{6}$$

Действительно, т. к. $u = \lim\limits_{i\to\infty} \phi_i$, то существует $u(r_0,\theta) = \lim\limits_{i\to\infty} \phi_i(r_0,\theta)$. Обозначим $U_1 = \min\limits_{\theta} u(r_0,\theta)$, $U_2 = \max\limits_{\theta} u(r_0,\theta)$. Тогда $U_1 \le u\,|_{\partial B} \le U_2$, а следовательно, $U_1 - 1 \le \phi_i|_{\partial B} \le U_2 + 1$ при достаточно больших i. Кроме того, $u_0\,|_{\partial B} = 0$.

Пусть $A_1 = \min\{0,\, U_1 - 1\}$, $A_2 = \max\{0,\, U_2 + 1\}$. Очевидно, $A_1 \le u_0\,|_{\partial B} \le A_2$. Согласно лемме на $M \setminus B$ существуют решения $u_1(r,\theta)$ и $u_2(r,\theta)$ уравнения $Lu = 0$, удовлетворяющие условиям

$$u_1(r_0,\theta) = A_1, \qquad u_2(r_0,\theta) = A_2$$

и

$$\lim_{r\to+\infty} u_1(r,\theta) = \lim_{r\to+\infty} u_2(r,\theta) = \Phi(\theta). \tag{7}$$

Применяя принцип максимума к функциям u_0, u_1, u_2 на $M \setminus B$, получаем $u_1(r,\theta) \le u_0(r,\theta) \le u_2(r,\theta)$. Для последовательности функций $\{\phi_i\}$, определенных ранее, выполнены неравенства $u_1\,|_{\partial B_i} \le \phi_i\,|_{\partial B_i} = u_0\,|_{\partial B_i} \le u_2\,|_{\partial B_i}$ для достаточно больших i. Значит, применяя принцип максимума к функциям $\{\phi_i\}$, где i достаточно большое, в области $B_i \setminus B$ имеем $u_1 \le \phi_i \le u_2$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, на $M \setminus B$ запишем $u_1 \le u \le u_2$. Учитывая (7), получим (6). Таким образом, на многообразии M решена задача Дирихле для любой бесконечно дифференцируемой функции $\Phi(\theta)$.

Пусть теперь на S задана непрерывная функция $\Phi(\theta)$, $\{\Phi_i\}$ — последовательность бесконечно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к Φ, $\{u_i\}$ — последовательность решений задачи Дирихле на M с граничными функциями Φ_i. По принципу максимума получаем, что последовательность $\{u_i\}$ равномерно сходится на M. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ на M выполнено

$$|u_i - u_j| \le \sup_M |u_i - u_j| \le \sup_\theta |\Phi_i(\theta) - \Phi_j(\theta)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

где i, j достаточно большие, что равносильно равномерной сходимости $\{u_i\}$.

Обозначим $u = \lim\limits_{i\to\infty} u_i$. Из равномерной сходимости следует равномерная ограниченность семейства $\{u_i\}$ на M. Как и выше, доказывается равностепенная непрерывность этого семейства, а также равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность семейств первых и вторых производных функций $\{u_i\}$ на любом компактном подмножестве $G \subset M$. А значит, семейство $\{u_i\}$ компактно в классе дважды дифференцируемых функций на M. Из компактности семейства $\{u_i\}$ следует, что функция u является решением задачи Дирихле на M с граничной функцией $\Phi(\theta)$. Первая часть теоремы доказана.

Перейдем к доказательству пп. β) и γ) теоремы. Пусть $I = \infty$. Докажем сначала, что в условиях теоремы для любого номера $k \ge 1$ для решения уравнения (3) выполнено

$$\lim_{r\to\infty} v_k(r) = 0. \tag{8}$$

Легко показать, что если при каком-то $r_1 \ge r_0$ выполнено $v_k'(r_1)v_k(r_1) \ge 0$, причем $v_k'(r_1)$ и $v_k(r_1)$ не равны нулю одновременно, то из (5) следует, что $|v_k(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$, что противоречит ограниченности $v_k(r)$. Таким образом, для всех $r \in (r_0,\, \infty)$ либо $v_k(r) = v_k'(r) = 0$, либо $v_k'(r)v_k(r) < 0$. В первом случае $v_k(r) \equiv 0$. Покажем, что во втором случае выполнено (8). Домножив при необходимости на -1, можно считать, что при всех $r \in (r_0, \infty)$ выполнено

$$v_k(r) < 0, \quad v_k'(r) > 0. \tag{9}$$

Таким образом, $v_k(r)$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) \le 0$. Заметим, что в условиях пп. β) и γ) теоремы функция $|v_k(r)|$ монотонно убывает.

Пусть $\lim\limits_{r\to\infty} v_k(r) < 0$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ и всех $r > r_0$ выполнено

$$v_k(r) \le -\varepsilon. \tag{10}$$

Покажем, что условие (10) противоречит расходимости интеграла I. Пусть сначала

$$\int_{r_0}^{\infty} h(t)g^{1-n}(t)\,dt < \infty.$$

Тогда из (5) и (10) следует, что

$$v_k(r) \le -\varepsilon \int_{r_0}^{r} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} [\lambda_k h(\beta)g^{n-3}(\beta) + c(\beta)g^{n-1}(\beta)h(\beta)]\,d\beta\,dt + \\ + \frac{v_k'(r_0)g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)} \int_{r_0}^{r} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)}\,dt + v_k(r_0),$$

где правая часть стремится к $-\infty$ при $r \to \infty$ в силу расходимости I, что противоречит ограниченности $v_k(r)$.

Пусть теперь

$$\int_{r_0}^{\infty} h(t)g^{1-n}(t)\,dt = \infty. \tag{11}$$

Перепишем равенство (5) в виде

$$v_k(r) = \int_{r_0}^{r} h(t)g^{1-n}(t)F(t)\,dt + v_k(r_0), \tag{12}$$

где

$$F(t) = \int_{r_0}^{t} [\lambda_k + c(\beta)g^2(\beta)]g^{n-3}(\beta)h(\beta)v_k(\beta)\,d\beta + g^{n-1}(r_0)h^{-1}(r_0)v_k'(r_0)$$

— монотонно убывающая функция в силу отрицательности $v_k(r)$. Если $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) \ne 0$, то из (11) и (12) следует, что $|v_k(r)| \to \infty$ при $r \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$, и, следовательно,

$$v_k'(r_0)\frac{g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)} = -\int_{r_0}^{\infty} [\lambda_k + c(\beta)g^2(\beta)]g^{n-3}(\beta)h(\beta)v_k(\beta)\,d\beta.$$

Тогда из (12) следует

$$v_k(r) = -\int_{r_0}^{r} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{t}^{\infty} [\lambda_k + c(\beta)g^2(\beta)]g^{n-3}(\beta)h(\beta)v_k(\beta)\,d\beta\right) dt + v_k(r_0). \tag{13}$$

Так как многообразие M полное, то $\int\limits_{r_0}^{\infty} h(t)\,dt = \infty$. Легко показать [8], что если выполнены условия

$$\int_{r_0}^{\infty} h(t)g^{1-n}(t)\,dt = \infty \qquad \text{и} \qquad \int_{r_0}^{\infty} h(t)\,dt = \infty,$$

то

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{t}^{\infty} g^{n-3}(\beta)h(\beta)\,d\beta\right) dt = \infty.$$

Отсюда, очевидно, для любого $k \geq 1$ выполнено

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_t^{\infty} [\lambda_k + c(\beta) g^2(\beta)] g^{n-3}(\beta) h(\beta)\, d\beta \right) dt = \infty.$$

Тогда из предположения (10) и из (13) получаем, что $v_k(r) \to -\infty$ при $r \to \infty$, что противоречит ограниченности $v_k(r)$. Следовательно, равенство (8) доказано.

Исследуем поведение ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)$. Точно так же, как и при доказательстве п. α) теоремы, легко показать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta)$ абсолютно и равномерно сходится. Действительно, учитывая монотонность функции $|v_k(r)|$, имеем неравенства

$$\Big| \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta) \Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r)|\, |w_k(\theta)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r_0)|\, |w_k(\theta)| = a_2 \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(r_0)| k^N.$$

Последний ряд сходится (доказательство см., напр., в [8]). Учитывая (8), получим

$$\lim_{r \to \infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) w_k(\theta) \Big) = 0.$$

В силу $w_0(\theta) \equiv \mathrm{const}$ заключаем, что $v_0(r) w_0(\theta)$ имеет предел при $r \to \infty$. Выясним условия, при которых $v_0(r) \equiv 0$, и условия, при которых $v_0(r)$ — нетривиальное решение (5).

Пусть сначала на M выполнены условия

$$\int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t)\, dt < \infty, \quad \int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t) \left(\int_{r_0}^{t} c(\beta) h(\beta) g^{n-1}(\beta)\, d\beta \right) dt = \infty.$$

Доказательство того, что $\lim\limits_{r \to \infty} v_0(r) = 0$, дословно совпадает с доказательством аналогичного факта для $v_k(r)$, где $k \geq 1$.

Пусть теперь выполнено условие

$$\int_{r_0}^{\infty} h(t) g^{1-n}(t)\, dt = \infty.$$

Замечание 4. В работе [7] показано, что следующие условия эквивалентны:

1) на M существует ограниченное нетривиальное решение уравнения (1);
2) на $M \setminus B$ существует ограниченное нетривиальное решение краевой задачи

$$\Delta u - c(x) u = 0 \ \text{ в } \ M \setminus B \quad (c(x) \geq 0), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial B} = 0. \tag{14}$$

Из линейной независимости функций $w_k(\theta)$ получаем, что условие (14) эквивалентно тому, что при некотором r_0 для всех k выполнено $v_k'(r_0) = 0$. Таким образом, уравнение (5) записывается в виде

$$v_0(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \int_{r_0}^{t} [\lambda_0 h(\beta) g^{n-3}(\beta) + c(\beta) g^{n-1}(\beta) h(\beta)] v_0(\beta)\, d\beta\, dt + v_0(r_0). \tag{15}$$

Дальнейшее доказательство того, что $\lim\limits_{r \to \infty} v_0(r) = 0$, аналогично приведенным выше. Таким образом, $u(r, \theta) \to 0$ при $r \to \infty$. Применяя принцип максимума, получаем $u \equiv 0$, что доказывает п. β) теоремы.

Если M таково, что $I = \infty$, и

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^{t} c(\beta) g^{n-1}(\beta) h(\beta)\, d\beta \right) dt < \infty,$$

то существует ограниченное нетривиальное решение уравнения (15) — $v_0(r)$, которое является на $M \setminus B$ нетривиальным решением задачи

$$\Delta u - c(x)u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial B} = 0.$$

Учитывая замечание 4, заключаем справедливость п. γ) теоремы. $\square$

Литература

1. Yau S.T. *Harmornic functions on complete Riemannian manifolds* // Commun. Pure and Appl. Math. – 1975. – V. 28. – № 2. – P. 201–228.
2. Sullivan D. *The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds* // J. Diff. Geom. – 1983. – V. 18. – № 4. – P. 722–732.
3. Anderson M.T. *The Dirichlet problem at infinity for manifold of negative curvature* // J. Diff. Geom. – 1983. – V. 18. – № 4. – P. 701–722.
4. Anderson M.T., Shoen R. *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature* // Ann. Math. – 1985. – V. 121. – № 3. – P. 429–461.
5. Murata M. *Structure of positive solutions to* $(-\Delta + v)u = 0$ *in* R^n // Duke Math. J. – 1986. – V. 53. – № 4. – P. 869–943.
6. Ландис Е.М., Надирашвили Н.С. *Положительные решения эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях* // Матем. сб. – 1985. – Т. 126. – № 1. – С. 133–139.
7. Григорьян А.А., Надирашвили Н.С. *Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 25–33.
8. Лосев А.Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 12. – С. 15–24.
9. Berger M., Gauduchon P., Mazet E. *Le spectre d'une variete riemannienne* // Lect. Notes Math. – 1971. – V. 194. – №. VII. – 454 p.
10. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Волгоградский государственный университет

Поступила 18.06.1997