ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.983

А.Б. БУРМИСТРОВА

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ СЮРЪЕКТИВНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

К числу важнейших числовых характеристик линейных операторов, действующих между банаховыми пространствами, относятся коэффициент сюръективности (КС) и модуль инъективности (МИ) ([1], с. 18–19). Как известно ([1], с. 19), положительность МИ означает, что соответствующий линейный оператор инъективен и нормально разрешим, а положительность его КС эквивалентна сюръективности. При этом нетрудно установить, что в первом случае величина, обратная к МИ, является нижней границей норм всех ограниченных операторов, левых обратных к данному оператору, а во втором — величина, обратная к КС, является нижней границей норм всех ограниченных операторов, правых обратных к рассматриваемому оператору. Именно это последнее свойство и обеспечивает возможность использования понятия КС в теории краевых задач. Дело в том, что оператор Грина краевой задачи — правый обратный оператор к оператору, фигурирующему в уравнении, для которого рассматривается краевая задача ([2], с. 49). А при исследовании многих вопросов теории функционально-дифференциальных уравнений (приводимость и параметризация множества решений [3], [4], разрешимость квазилинейных задач [5] и т. д.) возникает следующая задача: получить наиболее точную оценку норм операторов Грина краевых задач для заданного уравнения и (когда это возможно) среди всех краевых задач для данного уравнения найти такую, оператор Грина которой имеет минимальную норму. В работе [6] эта задача решена для случая функционально-дифференциальных уравнений, левая часть которых зависит только от производной искомой функции. Однако понятие оператора Грина предполагает сюръективность и конечномерность ядра оператора, определяющего уравнение, для которого рассматриваются краевые задачи. Для произвольного же функционально-дифференциального уравнения может нарушаться как первое, так и второе условие. Поэтому упомянутая задача получает естественное обобщение, которое в операторной терминологии может быть сформулировано следующим образом: среди всех ограниченных операторов, обобщенно обратных к данному линейному оператору, выбрать оператор с минимальной нормой или получить оценку снизу на нормы всех ограниченных обобщенно обратных операторов. Ниже будет показано, что первая часть поставленной проблемы не всегда имеет решение. Более того, во многих задачах, например, при исследовании разрешимости квазилинейных уравнений важной может оказаться только нижняя оценка норм всех ограниченных операторов, обобщенно обратных к линейной части. При этом, чем точнее эта оценка, тем меньшие ограничения можно наложить на нелинейность при получении условий разрешимости рассматриваемого уравнения. В данной работе рассматривается числовая характеристика линейного оператора, позволяющая получать указанную оценку и являющаяся естественным обобщением КС.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96195, 99-01-01278).

1. Основные определения и обозначения

Всюду ниже X, Y — банаховы пространства, $U_X(r)$ — шар пространства X с центром в нуле радиуса r, а $\overline{U_X(r)}$ — его замыкание, $\Lambda : X \to Y$ — линейный ограниченный ненулевой оператор.

Следуя [7], оператор $\Lambda : X \to Y$ будем называть *топологически нетеровым*, если его ядро $\ker \Lambda$ и образ $R(\Lambda)$ дополняемы в пространствах X и Y соответственно.

Будем придерживаться следующего конструктивного определения оператора, обобщенно обратного к оператору Λ.

Пусть $P : X \to X$ — проектор на $\ker \Lambda$, $X = X_0 + \ker \Lambda$ — разложение в прямую сумму, соответствующее этому проектору. Тогда $\Lambda = i_{R(\Lambda)} \cdot \Lambda_0 \cdot \pi_{P^c}$, где обратимый оператор $\Lambda_0 : X_0 \to R(\Lambda)$ задается формулой $\Lambda_0 x = \Lambda x$ для $x \in X_0$, $i_{R(\Lambda)} : R(\Lambda) \to Y$ — естественное вложение, а $\pi_{P^c} : X \to X_0$ — проекционный оператор, соответствующий проектору $P^c = I - P$. Пусть $Q : Y \to Y$ — проектор на подпространство $R(\Lambda) \subset Y$, $\pi_Q : Y \to R(\Lambda)$ — соответствующий ему проекционный оператор.

Определение 1. Оператор $K_{PQ} : Y \to X$, определенный равенством $K_{PQ} = i_{X_0} \cdot \Lambda_0^{-1} \cdot \pi_Q$, будем называть *обобщенно обратным* к оператору $\Lambda : X \to Y$, *ассоциированным с проекторами* P и Q.

Определение 2. Неотрицательное число $q(\Lambda) = \sup\{r \geq 0 \mid \Lambda(\overline{U_X(1)}) \supset r \cdot \overline{U_Y(1)}\}$ называется *коэффициентом сюръективности* (КС) *оператора* Λ.

По лемме B.3.5 ([1], с. 19) для оператора $\Lambda : X \to Y$ справедливо равенство

$$q(\Lambda) = \sup\{r \geq 0 \mid \overline{\Lambda(\overline{U_X(1)})} \supset r \cdot \overline{U_Y(1)}\}. \tag{1}$$

Определение 3. Неотрицательное число $m(\Lambda) = \sup\{r \geq 0 \mid \|\Lambda x\|_Y \geq r \cdot \|x\|_Y\}$ называется *модулем инъективности* (МИ) *оператора* Λ.

Введем следующее обобщение понятия КС.

Определение 4. Пусть $\Lambda : X \to Y$ — нормально разрешимый оператор, $\widehat{\Lambda} : X \to R(\Lambda)$ — линейный ограниченный сюръективный оператор, определяемый равенством $\widehat{\Lambda}x = \Lambda x$. *Относительным коэффициентом сюръективности* (ОКС) *оператора* Λ будем называть число $q_0(\Lambda) = q(\widehat{\Lambda})$.

Таким образом, если $R(\Lambda) = Y$, то ОКС совпадает с КС этого оператора.

Подобно тому, как понятие КС позволило ввести понятие ОКС, двойственная к КС числовая характеристика МИ линейных операторов дает возможность ввести числовую характеристику, принимающую ненулевые значения для произвольного линейного ограниченного оператора. Перед определением числовой характеристики, обобщающей понятие МИ, введем следующее понятие.

Определение 5. Отображение $\widetilde{\Lambda}$, действующее из фактор-пространства $X/\ker \Lambda$ в пространство Y по правилу $\widetilde{\Lambda}\xi = \Lambda x$, где $x \in \xi$, будем называть *фактор-отображением для* Λ.

Определение 6. Пусть $\widetilde{\Lambda} : X/\ker \Lambda \to Y$ — фактор-отображение для оператора $\Lambda : X \to Y$. *Относительным модулем инъективности* (ОМИ) *оператора* Λ будем называть число $m_0(\Lambda) = m(\widetilde{\Lambda})$.

Таким образом, если $\Lambda : X \to Y$ — инъективный оператор, то ОМИ совпадает с МИ этого оператора.

2. Связь и свойства относительных коэффициента сюръективности и модуля инъективности

Непосредственно из определения получаем

$$m(\Lambda) = \inf_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda x\|}{\|x\|} = \inf_{\|x\|=1} \|\Lambda x\|. \tag{2}$$

Следовательно,

$$m_0(\Lambda) = \inf_{\xi \neq 0} \frac{\|\widetilde{\Lambda}\xi\|}{\|\xi\|} = \inf_{\|\xi\|=1} \|\widetilde{\Lambda}\xi\|, \quad \xi \in X/\ker\Lambda. \tag{3}$$

Вычисление же КС и ОКС по определению весьма затруднительно. Но в силу утверждения B.3.8 из ([1], с. 20) $q(\Lambda) = m(\Lambda^*)$, где $\Lambda^* : Y^* \to X^*$ — сопряженный к $\Lambda : X \to Y$ оператор. Таким образом, по формуле (2)

$$q(\Lambda) = \inf_{\omega \neq 0} \frac{\|\Lambda^*\omega\|}{\|\omega\|} = \inf_{\|\omega\|=1} \|\Lambda^*\omega\|, \quad \omega \in Y^*. \tag{4}$$

Тогда

$$q_0(\Lambda) = \inf_{\omega \neq 0} \frac{\|\widehat{\Lambda}^*\omega\|}{\|\omega\|} = \inf_{\|\omega\|=1} \|\widehat{\Lambda}^*\omega\|, \quad \omega \in (R(\Lambda))^*. \tag{5}$$

Формула (4) позволяет получить следующее двойное неравенство, необходимое нам в дальнейшем,

$$q(\Lambda_1)q(\Lambda_2) \leq q(\Lambda_1\Lambda_2) \leq q(\Lambda_2)\|\Lambda_1\|. \tag{6}$$

Кроме этого, $q(\Lambda) = \|\Lambda^{-1}\|^{-1}$, если $\Lambda : X \to Y$ — изоморфизм.

Положительная величина ОКС определена только для нормально разрешимых операторов. В определении же ОМИ нормальной разрешимости оператора, для которого он вычисляется, вообще говоря, не требуется. Тем не менее справедлив следующий критерий невырожденности ОМИ.

Теорема 1. *Для ОМИ линейного ограниченного оператора $\Lambda : X \to Y$ неравенство $m_0(\Lambda) > 0$ имеет место, если и только если оператор Λ нормально разрешим.*

Доказательство. В силу определения ОМИ, инъективности фактор-отображения $\widetilde{\Lambda}$ и свойства невырожденности МИ неравенство $m_0(\Lambda) > 0$ эквивалентно нормальной разрешимости фактор-оператора $\widetilde{\Lambda} : X/\ker\Lambda \to Y$. Но по определению $R(\Lambda) = R(\widetilde{\Lambda})$. $\square$

Значит, если $\Lambda : X \to Y$ — линейный ограниченный нормально разрешимый оператор, то его ОКС и ОМИ неотрицательны. Более того, эти величины совпадают. Поэтому вычислять их можно друг через друга в зависимости от того, что проще: описывать пространство $(R(\Lambda))^*$ или фактор-оператор $\widetilde{\Lambda} : X/\ker\Lambda \to Y$.

Теорема 2. *Пусть $\Lambda : X \to Y$ — нормально разрешимый оператор. Тогда*

$$m_0(\Lambda) = q_0(\Lambda) > 0. \tag{7}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 $m_0(\Lambda) > 0$. По определению $q_0(\Lambda)$ также положителен. Для доказательства равенства (7) покажем сначала справедливость неравенства $m_0(\Lambda) \geq q_0(\Lambda)$, а потом — обратного неравенства.

Пусть $0 < \tau < m_0(\Lambda)$. По определению для любого $\xi \in X/\ker\Lambda$ справедливо неравенство

$$\|\widetilde{\Lambda}\xi\|_Y \geq \tau\|\xi\|_{X/\ker\Lambda}. \tag{8}$$

Покажем, что для натурального n имеет место вложение

$$\tau(1-1/n)\overline{U_{R(\Lambda)}(1)} \subset \widehat{\Lambda}(\overline{U_X(1)}) = \Lambda(\overline{U_X(1)}), \tag{9}$$

где $\widehat{\Lambda} : X \to R(\Lambda)$ — оператор, фигурирующий в определении ОКС. Пусть $y \in \tau(1-1/n)\overline{U_{R(\Lambda)}(1)}$, т. е. $\|y\|_Y \leq \tau(1-1/n) < \tau$ и $y \in R(\Lambda)$. В силу последнего включения найдется элемент $\xi \in X/\ker\Lambda$ такой, что $y = \widetilde{\Lambda}\xi$. При этом получаем $\tau > \|y\|_Y = \|\widetilde{\Lambda}\xi\|_Y \geq \tau\|\xi\|_{X/\ker\Lambda}$. Следовательно, $1 > \|\xi\|_{X/\ker\Lambda} = \inf\limits_{x\in\xi}\|x\|_X$. По определению инфимума найдется элемент $x_0 \in X$, удовлетворяющий неравенству $\|x_0\|_X < 1$ и включению $x_0 \in \xi$, т. е. по определению фактор-отображения $y = \Lambda x_0$. Таким образом, вложение (9) имеет место. Отсюда получаем вложение $\tau\overline{U_{R(\Lambda)}(1)} \subset \overline{\Lambda(\overline{U_X(1)})} = \overline{\widehat{\Lambda}(\overline{U_X(1)})}$. Значит, по определению ОКС и по формуле (1) получаем $q_0(\Lambda) \leq m_0(\Lambda)$.

Докажем, что имеет место и обратное неравенство. Пусть $0 < \tau < q_0(\Lambda)$. Тогда по определению имеет место вложение

$$\tau\overline{U_{R(\Lambda)}(1)} \subset \widehat{\Lambda}(\overline{U_X(1)}) = \Lambda(\overline{U_X(1)}), \tag{10}$$

т. е. для любого $y \in R(\Lambda)$ такого, что $\|y\|_Y \leq \tau$, существует $x \in X$, удовлетворяющий неравенству $\|x\|_X \leq 1$ и равенству $y = \Lambda x$. Достаточно показать, что для любого $\xi \in X/\ker\Lambda$ справедливо неравенство (7). Обосновывать это неравенство будем от противного. Пусть для некоторого $\xi_0 \in X/\ker\Lambda$ справедливо неравенство $\|\widetilde{\Lambda}\xi_0\|_Y < \tau\|\xi_0\|_{X/\ker\Lambda}$. Тогда для элемента $\xi_1 = \frac{\xi_0}{\|\xi_0\|_{X/\ker\Lambda}} \in X/\ker\Lambda$ верно неравенство $\|\widetilde{\Lambda}\xi_1\|_Y < \tau$. При этом

$$1 = \|\xi_1\|_{X/\ker\Lambda} = \inf_{x\in\xi_1}\|x\|_X. \tag{11}$$

Рассмотрим элемент $y_1 = \frac{\tau}{\tau_1}\widetilde{\Lambda}\xi_1$, где $\tau_1 = \|\widetilde{\Lambda}\xi_1\|_Y$. Тогда $\|y_1\|_Y = \tau$, и в силу вложения (10) существует элемент $x_1 \in \overline{U_X(1)}$ такой, что $\Lambda x_1 = y_1$. Поэтому $\Lambda\left(\frac{t_1}{t}x_1\right) = \widetilde{\Lambda}x_1$, и, значит, по определению фактор-отображения $\frac{\tau_1}{\tau}x_1 \in \xi_1 \subset X$. Но $\left\|\frac{\tau_1}{\tau}x_1\right\|_X = \frac{\tau_1}{\tau}\|x_1\|_X \leq \frac{\tau_1}{\tau} < 1$, что противоречит равенству (11). Полученное противоречие доказывает неравенство (8), а значит, и неравенство $m_0(\Lambda) \leq q_0(\Lambda)$. □

3. Об инфимуме норм ограниченных операторов, обобщенно обратных к линейному оператору

Отметим, что в силу теоремы 1 работы [7] только у топологически нетеровых операторов существуют ограниченные обобщенно обратные к нему операторы. Более того, из теорем 4.2 и 4.4 работы [8] следует, что обобщенно обратный $K_{PQ} : Y \to X$ к топологически нетерову оператору $\Lambda : X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда ограниченными являются проекторы $P : X \to X$ на ядро и $Q : Y \to Y$ на образ оператора Λ. Наконец, по определению топологически нетеров оператор нормально разрешим, и, следовательно, для него определен положительный ОКС, который в силу теоремы 2 совпадает с ОМИ. Таким образом, обоснована корректность следующего утверждения.

Теорема 3. *Если $\Lambda : X \to Y$ — топологически нетеров оператор, то величина $1/m_0(\Lambda) = 1/q_0(\Lambda)$ — нижняя граница норм всех ограниченных операторов, обобщенно обратных к Λ, т. е.*

$$\frac{1}{m_0(\Lambda)} = \frac{1}{q_0(\Lambda)} \leq \|K_{PQ}\|, \tag{12}$$

где $P : X \to X$ и $Q : Y \to Y$ — произвольные линейные ограниченные проекторы на $\ker\Lambda$ и $R(\Lambda)$ соответственно, а $K_{PQ} : Y \to X$ — обобщенно обратный к Λ оператор, ассоциированный с этими проекторами.

Доказательство. Отметим, что $q_0(\Lambda) = q(\widehat{\Lambda})$, и оператор $K_P : R(\Lambda) \to X$, определенный равенством $K_P = i_{X_0}\Lambda_0^{-1}$, правый обратный к оператору $\widehat{\Lambda} : X \to R(\Lambda)$. Тогда, применяя правую часть неравенства (6), с учетом того, что коэффициент сюръективности тождественного оператора I равен единице, получаем $1 = q(I) = q(\widehat{\Lambda}K_P) \le q(\widehat{\Lambda})\|K_P\|$, т. е. $1/q_0(\Lambda) \le \|K_P\|$. Из равенства $K_{PQ} = K_P\pi_Q$ получаем, что $K_P = K_{PQ}i_{R(\Lambda)}$, и, следовательно,

$$\|K_P\| \le \|K_{PQ}\|\,\|i_{R(\Lambda)}\| = \|K_{PQ}\|. \tag{13}$$

Поэтому выражение (12) будет иметь место. □

Таким образом, величина $1/q_0(\Lambda)$ является нижней границей норм всех ограниченных обобщенно обратных к оператору $\Lambda : X \to Y$. Следующее утверждение предоставляет условия, при выполнении которых эта величина является точной нижней границей.

Теорема 4. *Пусть $\Lambda : X \to Y$ — топологически нетеров оператор, причем подпространства $\ker\Lambda \subset X$ и $R(\Lambda) \subset Y$ таковы, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют проекторы $P_\varepsilon : X \to X$ на $\ker\Lambda$ и $Q_\varepsilon : Y \to Y$ на $R(\Lambda)$, удовлетворяющие неравенствам $\|P_\varepsilon^c\| < 1 + \varepsilon$ и $\|Q_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon$. Тогда величина $1/m_0(\Lambda) = 1/q_0(\Lambda)$ — точная нижняя грань для норм всех ограниченных обобщенно обратных к Λ операторов, т. е. имеет место равенство*

$$\frac{1}{m_0(\Lambda)} = \frac{1}{q_0(\Lambda)} = \inf_{P,Q}\|K_{PQ}\|, \tag{14}$$

где $K_{PQ} : Y \to X$ — обобщенно обратный к Λ, ассоциированный с проекторами $P : X \to X$ на $\ker\Lambda$ и $Q : Y \to Y$ на $R(\Lambda)$.

Доказательство. Сначала покажем, что в условиях теоремы имеет место равенство

$$\frac{1}{q_0(\Lambda)} = \inf_P\|K_P\|, \tag{15}$$

где оператор $K_P : R(\Lambda) \to X$ определен формулой $K_P = i_{X_0}\Lambda_0^{-1}$. Для этого оператора имеем $\|K_P\| = \sup\limits_{\|y\|=1}\|(i_{X_0}\Lambda_0^{-1})y\| = \sup\limits_{\|y\|=1}\|\Lambda_0^{-1}y\| = \|\Lambda_0^{-1}\| = 1/q(\Lambda_0)$, т. к. по теореме Банаха об обратном операторе $\Lambda_0 : \ker P \to R(\Lambda)$ — изоморфизм. С другой стороны, применив к мультипликативному представлению $\widehat{\Lambda} = \Lambda_0\pi_{P^c}$ оператора $\widehat{\Lambda} : X \to R(\Lambda)$ неравенство (6), получаем $q(\widehat{\Lambda}) = q(\Lambda_0\pi_{P^c}) \le q(\Lambda_0)\|\pi_{P^c}\|$, т. е. $1/q(\Lambda_0) \le \|\pi_{P^c}\|/q(\widehat{\Lambda})$.

Таким образом, с учетом неравенств из доказательства теоремы 3 получаем, что при любом линейном ограниченном проекторе $P : X \to X$ на $\ker\Lambda$ имеет место двойное неравенство

$$\frac{1}{q_0(\Lambda)} \le \|K_P\| \le \frac{\|\pi_{P^c}\|}{q_0(\Lambda)}. \tag{16}$$

А так как $\|\pi_{P^c}\| = \|P^c\|$, то из условия теоремы получаем: для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $P_\varepsilon : X \to X$ такой, что $1/q_0(\Lambda) \le \|K_{P_\varepsilon}\| \le (1+\varepsilon)/q_0(\Lambda)$. Отсюда непосредственно по определению инфимума получаем равенство (15).

Докажем теперь справедливость равенства (14). То, что $1/q_0(\Lambda)$ — нижняя граница норм всех ограниченных обобщенно обратных к Λ, доказано в теореме 3. Остается доказать точность этой границы в условиях теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу равенства (14) существует проектор $P : X \to X$ на $\ker\Lambda$ такой, что $\|K_P\| < 1/q_0(\Lambda) + \varepsilon/(2 + \varepsilon q_0(\Lambda))$. Среди всех ограниченных проекторов на подпространство $R(\Lambda) \subset Y$ возьмем $Q : Y \to Y$, удовлетворяющий условию $\|Q\| < 1 + \varepsilon q_0(\Lambda)/2$, что возможно в силу положительности числа $q_0(\Lambda)$ и условий теоремы. Тогда из неравенства

$$\|K_{PQ}\| \le \|K_P\|\,\|Q\|, \tag{17}$$

получаемого из равенства $K_{PQ} = K_P \pi_Q$, имеем

$$\|K_{PQ}\| < \left(\frac{1}{q_0(\Lambda)} + \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon q_0(\Lambda)}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon q_0(\Lambda)}{2}\right) = \frac{1}{q_0(\Lambda)} + \varepsilon,$$

что и требовалось показать. $\square$

Непосредственно из теоремы 4 получаем следующее утверждение, позволяющее не только гарантировать равенство (14), но и строить обобщенно обратные операторы, на которых это равенство достигается.

Следствие 1. Пусть $\Lambda : X \to Y$ — топологически нетеров оператор, причем подпространства $\ker \Lambda \subset X$ и $R(\Lambda) \subset Y$ таковы, что существуют проекторы $P : X \to X$ на $\ker \Lambda$ и $Q : Y \to Y$ на $R(\Lambda)$, удовлетворяющие равенствам $\|P^c\| = 1$ и $\|Q\| = 1$. Тогда $1/m_0(\Lambda) = 1/q_0(\Lambda) = \|K_{PQ}\|$, где $K_{PQ} : Y \to X$ — обобщенно обратный к Λ оператор, ассоциированный с проекторами P и Q.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $P_\varepsilon = P$ и $Q_\varepsilon = Q$. Тогда все условия теоремы 4 будут выполнены, и будет иметь место равенство (14). Более того, для проектора P имеет место двойное неравенство (16), из которого с учетом равенств $\|\pi_{P^c}\| = \|P^c\| = 1$ получаем $\|K_P\| = 1/q_0(\Lambda)$, где $K_P : R(\Lambda) \to X$ — оператор, фигурирующий в доказательстве теоремы 4. С другой стороны, из неравенств (13) и (17) получаем двойное неравенство

$$\frac{\|K_{PQ}\|}{\|Q\|} \le \|K_P\| \le \|K_{PQ}\|.$$

Отсюда с учетом равенства $\|Q\| = 1$ получим, что для проекторов P и Q, удовлетворяющих условиям доказываемого утверждения, справедливы равенства $\|K_{PQ}\| = \|K_P\| = 1/q_0(\Lambda) = 1/m_0(\Lambda)$. $\square$

Поскольку в гильбертовом пространстве существует проектор единичной нормы на любое замкнутое подпространство (ортогональный проектор на это подпространство), и проектор, дополнительный к ортопроектору, также имеет единичную норму, то следствие 1 позволяет полностью решить задачу об обобщенно обратном операторе с минимальной нормой в случае гильбертовых пространств. Более точно, имеет место

Следствие 2. Пусть X, Y — гильбертовы пространства; $\Lambda : X \to Y$ — линейный ограниченный нормально разрешимый оператор; $P : X \to X$ и $Q : Y \to Y$ — ортогональные проекторы на $\ker \Lambda$ и $R(\Lambda)$ соответственно. Тогда норма обобщенно обратного к Λ, ассоциированного с этими проекторами, минимальна и равна $1/m_0(\Lambda) = 1/q_0(\Lambda)$.

В силу леммы 1 работы [7] для обобщенно обратного проектора K_{PQ}, ассоциированного с проекторами P и Q, справедливы равенства $\Lambda K_{PQ} = Q$ и $K_{PQ}\Lambda = P^c$. Поэтому проверка минимальности нормы данного оператора, обобщенно обратного к оператору $\Lambda : X \to Y$, может быть сведена к проверке единичности норм операторов $\Lambda K_{PQ} : Y \to Y$ и $K_{PQ}\Lambda : X \to X$.

Итак, единичность норм проекторов $P^c : X \to X$ (где $P : X \to X$ — проектор на $\ker \Lambda$) и $Q : Y \to Y$ на $R(\Lambda)$ — достаточное условие минимальности нормы соответствующего обобщенно обратного к Λ оператора. Следующий пример показывает, что эти условия не являются необходимыми.

Пример 1. Пусть $X = Y = R^3$ со скалярным произведением, задаваемым равенством

$$\langle \{x_1, y_1, z_1\},\ \{x_2, y_2, z_2\} \rangle = 4x_1x_2 + \tfrac{1}{2}(y_1 + z_1)(y_2 + z_2) + 8(y_1 - z_1)(y_2 - z_2).$$

Рассмотрим оператор $\Lambda : X \to Y$, определенный формулой $\Lambda\{x, y, z\} = \left\{x,\ \frac{17^2}{64}y,\ \frac{17 \cdot 15}{64}y\right\}$.

Пространство $X/\ker \Lambda$ изометрично пространству $Z = R^2$ со скалярным произведением $\langle \{x_1, y_1\},\ \{x_2, y_2\} \rangle = 4x_1x_2 + \frac{32}{17}y_1y_2$. Так как изометрия, очевидно, не влияет на величину МИ, то с учетом определения ОМИ получаем $m_0(\Lambda) = m(\Lambda_1)$, где оператор $\Lambda_1 : Z \to Y$ задается равенством $\Lambda_1\{x,y\} = \Big\{x,\ \frac{17^2}{64}y,\ \frac{17\cdot 15}{64}y\Big\}$.

Покажем, что $m(\Lambda_1) = 1$. Действительно, для любой пары $\{x,y\} \neq \{0,0\}$ имеет место оценка $\frac{\|\Lambda_1\{x,y\}\|_Y}{\|\{x,y\}\|_Z} = \sqrt{\frac{4x^2+\frac{17^3}{2^7}y^2}{4x^2+\frac{32}{17}y^2}} \geq 1$. При этом полученное неравенство обращается в равенство на элементах $\{x,y\} = \{x,0\} \neq \{0,0\}$. Таким образом, $m_0(\Lambda) = m(\Lambda_1) = \inf\limits_{\{x,y\}\neq\{0,0\}} \frac{\|\Lambda_1\{x,y\}\|_Y}{\|\{x,y\}\|_Z} = 1$.

Рассмотрим проектор $Q : Y \to Y$ на $R(\Lambda)$, задаваемый формулой $Q\{x,y,z\} = \Big\{x,\ \frac{17^2}{64}y - \frac{15\cdot 17}{64}z,\ \frac{15\cdot 17}{64}y - \frac{15^2}{64}z\Big\}$. Для элемента $\Big\{0,\ \sqrt{\frac{2}{17}},\ 0\Big\} \in Y$ имеем $\Big\|\Big\{0,\ \sqrt{\frac{2}{17}},\ 0\Big\}\Big\|_Y = 1$, но $\Big\|Q\Big\{0,\ \sqrt{\frac{2}{17}},\ 0\Big\}\Big\|_Y = 2,25 > 1$, т. е. $\|Q\| > 1$. В качестве проектора $P : X \to X$ на подпространство $\ker\Lambda = \{\{x,y,z\} \in R^3 \mid x = y = 0\}$ возьмем оператор, задаваемый формулой $P\{x,y,z\} = \{0,0,z\}$. Тогда $P^c\{x,y,z\} = \{x,y,0\}$. Для элемента $\Big\{0,\ \frac{1}{\sqrt2},\ \frac{1}{\sqrt2}\Big\}$ имеем $\Big\|\Big\{0,\ \frac{1}{\sqrt2},\ \frac{1}{\sqrt2}\Big\}\Big\|_X = 1$, но $\Big\|P^c\Big\{0,\ \frac{1}{\sqrt2},\ \frac{1}{\sqrt2}\Big\}\Big\|_X = \sqrt{4,25}$, т. е. $\|P^c\| > 1$. Обобщенно обратный оператор $K : Y \to X$ к оператору Λ, ассоциированный с указанными проекторами P и Q, задается формулой $K\{x,y,z\} = \Big\{x,\ y - \frac{15}{17}z,\ 0\Big\}$. Нетрудно проверить, что $\|K\| = 1 = 1/q_0(\Lambda)$. Рассмотрение примера завершено.

В силу теоремы 2 ОКС нормально разрешимого оператора можно вычислять как по формуле (3), так и при помощи формулы (5) в зависимости от того, что проще: описывать пространство $(R(\Lambda))^*$ или фактор-оператор $\widetilde{\Lambda} : X/\ker\Lambda \to Y$. А так как величина, обратная к ОКС, является нижней границей для норм всех ограниченных операторов, обобщенно обратных к топологически нетерову оператору, то факт, что полученная таким образом нижняя граница является точной, можно установить, приведя пример обобщенно обратного оператора, норма которого совпадает с этой величиной.

Пример 2. Рассмотрим на пространстве X имеющих абсолютно непрерывную производную функций $x : [0,1] \to R^1$, чья вторая производная абсолютно суммируема, двухточечную краевую задачу

$$\ddot{x} = f, \quad x(0) - x(1) = \alpha_1, \quad \dot{x}(0) - \dot{x}(1) = \alpha_2,$$

где функция $f : [0,1] \to R^1$ абсолютно суммируема, α_1 и α_2 — действительные числа. Введем на пространстве X норму равенством $\|x\|_X = |x(0)| + |\dot{x}(0)| + \int\limits_0^1 |\ddot{x}(s)|ds$. Запишем эту краевую задачу в виде одного операторного уравнения

$$\Lambda x = \{f, \alpha_1, \alpha_2\},$$

где $\{f,\alpha_1,\alpha_2\}$ — элемент банахова пространства Y с нормой $\|\{f,\alpha_1,\alpha_2\}\|_Y = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \int\limits_0^1 |f(s)|ds$, и оператор $\Lambda : X \to Y$ задается равенством $\Lambda x = \{\ddot{x},\ x(0) - x(1),\ \dot{x}(0) - \dot{x}(1)\}$.

Оператор Λ фредгольмов, и его ядро состоит из констант. ОКС этого оператора будем искать при помощи теоремы 2 и формулы (3). Заметим, что пространство $X/\ker\Lambda$ изометрично пространству Z абсолютно суммируемых функций с нормой $\|z\|_Z = |z(0| + \int\limits_0^1 |\dot{z}(s)|ds$. Изометрия задается правилом: каждому $z \in Z$ ставится в соответствие класс смежности — элемент пространства $X/\ker\Lambda$, содержащий функцию $x(t) = \int\limits_0^t z(s)ds$. Таким образом, $q_0(\Lambda) = m_0(\Lambda) = m(\Lambda_1)$, где инъективный нормально разрешимый оператор $\Lambda_1 : Z \to Y$ задается равенством $\Lambda_1 z = \Big\{\dot{z},\ -\int\limits_0^1 z(s)ds,\ z(0) - z(1)\Big\}$. Непосредственные вычисления по формуле (2) дают равенство $m(\Lambda_1) = 1/2$.

С другой стороны, обобщенно обратный оператор $K_{PQ} : Y \to X$ к оператору Λ, соответствующий проекторам $P : X \to X$ и $Q : Y \to Y$ на $\ker \Lambda$ и $R(\Lambda)$ соответственно, задаваемым равенствами $Px = x(0)$ и $Q\{f, \alpha_1, \alpha_2\} = \Big\{f,\ \alpha_1,\ -\int\limits_0^1 f(s)ds\Big\}$, действует по правилу

$$K_{PQ}\{f, \alpha_1, \alpha_2\} = \int_0^t (t-s)f(s)ds + t\left(\int_0^1 (s-1)f(s)ds - \alpha_1\right),$$

и его норма равна 2.

Таким образом, для данного примера ОКС — наименьшая из нижних границ норм операторов, обобщенно обратных к оператору Λ, причем достижимая.

Литература

1. Пич А. *Операторные идеалы.* – 1-е изд. – М.: Мир, 1982. – 536 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
3. Абдуллаев А.Р. *О разрешимости и параметризации множества решений нелинейного операторного уравнения.* – Пермск. политехн. ин-т.– Пермь, 1983. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 03.05.83, № 2338-83.
4. Азбелев Н.В. *Пермский семинар и функционально-дифференциальные уравнения* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1990. – С. 3–18.
5. Азбелев Н.В., Максимов В.П. *Априорные оценки решений задачи Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 10. – С. 1731–1747.
6. Абдуллаев А.Р. *Об операторе Грина с минимальной нормой* // Краев. задачи. – Пермь, 1991. – С. 3–6.
7. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. *Топологические нетеровы операторы: обобщенная обратимость и аддитивное представление* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 3–7.
8. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. *Элементы теории топологически нетеровых операторов.* – Челябинск: ЧелГУ, 1994. – 93 с.

Пермский государственный
технический университет

Поступила
15.04.1997