ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.546

И.А. АЛЕКСАНДРОВ

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ОБЛАСТИ С СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА

В работе устанавливается формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для областей с полигональной границей и симметрией переноса.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, — односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на отрезок длины T, $0 < T < +\infty$. Области с симметрией переноса на отрезок любой длины (напр., полуплоскость) из рассмотрения исключаются. Предположим, что граница $\operatorname{fr} D$ [1] области D состоит из отрезков и лучей и удовлетворяет следующему условию: если $w_0 \in \operatorname{fr} D$, $w_0 \neq \infty$, то дуга $[w_0, w_0 + T)$ границы, начинающаяся в w_0 и оканчивающаяся в $w_0 + T$, состоит из конечного числа отрезков и лучей.

Двигаясь от w_0 к $w_0 + T$ вдоль границы области D в положительном направлении (т. е. в том, при котором область остается слева), обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \dots, A_n^{(0)}$, $A_n^{(0)} \neq A_1^{(0)} + T$ $(n = 1, 2, \dots)$, а углы области D — соответственно через $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$. Если $A_s^{(0)} \in \mathbb{C}$, то $0 < \alpha_s \leq 2$; если же $A_s^{(0)} = \infty$, то $\alpha_s = 0$.

Предположим, что множество

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [w_0 + kT,\, w_0 + (k+1)T]$$

совпадает с границей области D. Видно, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n$.

Обозначим через $w = f(z)$ функцию, однолистно и конформно отображающую верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на D с условиями $f(0) = w_0$, $f(\lambda_1) = w_1$, $f(\infty) = \infty$, где λ_1 — некоторая фиксированная точка, $0 < \lambda_1 < +\infty$. Согласно теореме Римана такая функция существует и единственна. Она непрерывно продолжается на $\overline{\Pi}_+$ и, кроме того, продолженная функция голоморфна на интервалах $(a_s^{(0)}, a_{s+1}^{(0)})$ $(s = 1, \dots, n-1)$ вещественной оси и конгруэнтных им интервалах, получающихся при переносе $(a_s^{(0)}, a_{s+1}^{(0)})$ на kT $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$. Здесь $a_s^{(0)}$ — прообраз $A_s^{(0)}$ при отображении f. Если переменное x возрастает от $a_s^{(0)}$ до $a_{s+1}^{(0)}$, то точка $\omega = f(x)$ пробегает отрезок, соединяющий точки $A_s^{(0)}$, $A_{s+1}^{(0)}$ границы области D. Этот отрезок можно представить параметрическим уравнением вида $\omega = \omega(x) = A_s^{(0)} + \rho(x)e^{i\gamma_s}$, где γ_s — угол, составленный отрезком $[A_s^{(0)}, A_{s+1}^{(0)}]$ с вещественной осью. Отношение $\omega''(x)/\omega'(x) = \rho''(x)/\rho'(x)$ и, значит, отношение $f''(z)/f'(z)$ вещественно на каждом интервале вещественной оси, не содержащем точек $z = a_s^{(0)} + kT$ $(s = 1, \dots, n;\ k \in \mathbb{Z})$.

Пусть $z = \varphi(w)$ — функция, обратная к $f(z)$: $\varphi(f(z)) = z$ в Π^+. Обозначим $\varphi(w_0 + T) = t$. В указанных условиях и обозначениях $f(z + t) = f(z) + T$ для любого $z \in \Pi^+$.

Действительно, функция $f(z) + T$ отображает Π^+ на D и поэтому функция $\varphi(f(z) + T)$, отображающая Π^+ на себя, линейна и имеет вид $\varphi(f(z) + T) = az + b$, где a и b — вещественные

[1] Ее, вообще говоря, следует понимать как границу Каратеодори ([1], с. 137), составленную из носителей (тел) простых концов области D и обычным образом упорядоченных; согласно последующим предположениям границу $\operatorname{fr} D$ можно рассматривать как составленную из точек, кратных в том случае, когда носители (тела) двух или более простых концов совпадают.

постоянные, $a > 0$, $b \neq 0$. Полагая $z = 0$, находим $b = t$. Значит, $\varphi(f(z) + T) = a\varphi(f(z)) + t$. Отсюда

$$\varphi(f(z) + 2T) = \varphi(f(z) + T + T) = a\varphi(f(z) + T) + t =$$

$$= a[a\varphi(f(z)) + t] + t = a^2 z + (a+1)t = a^2 z + \frac{a^2 - 1}{a - 1} t$$

и, как легко установить по индукции,

$$\varphi(f(z) + kT) = a^k z + \frac{a^k - 1}{a - 1} t \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{1}$$

Из равенства

$$z = \varphi(f(z) - T + T) = a\varphi(f(z) - T) + t$$

следует, что $\varphi(f(z) - T) = \frac{1}{a}(z - t)$. Поэтому

$$\frac{1}{a}(z - t) = \varphi(f(z) - T) = \varphi(f(z) - 2T + T) = a\varphi(f(z) - 2T) + t$$

и $\varphi(f(z) - 2T) = \frac{1}{a^2} z - \frac{1}{a}(\frac{1}{a} + 1)t$. Продолжая этот процесс, устанавливаем по индукции, что

$$\varphi(f(z) - kT) = \frac{1}{a^k} z - \frac{1}{a^k} \frac{1 - a^k}{1 - a} t \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{2}$$

При любом фиксированном $z \in \Pi^+$ последовательность точек $f(z) + \varepsilon kT$ $(k = 0, 1, \dots)$, $\varepsilon = \pm 1$, сходится к ∞ и в соответствии с нормировкой функции f имеем $\varphi(f(z) + kT) \to \infty$ при $k \to \infty$, что находится в противоречии с (1) при $0 < a < 1$ и — с (2) при $1 < a < \infty$. Таким образом, $a = 1$ и $f(z + t) = f(z) + T$.

Видно, что функция $f' : \Pi^+ \to \mathbb{C}$ периодическая с периодом t, а $\varphi'(w)$ периодическая в D с периодом T.

Переходим к выводу формулы для $f(z)$. Как обычно (напр., [2], с. 676–704), доказывается, что функция $f''(z)/f'(z)$ имеет в точке $a_s^{(0)} + kt$ $(s = 1, \dots, n;\ k = 0, \pm 1, \dots)$ простой полюс с вычетом, равным $\alpha_s - 1$, т. е. что в окрестности точки $a_s^{(0)}$ имеет место разложение

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\alpha_s - 1}{z - a_s^{(0)}} + g_{s,0}(z),$$

а в окрестности точки $a_s^{(0)} + kT$ $(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ —

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\alpha_s - 1}{z - (a_s^{(0)} + kt)} + \frac{\alpha_s - 1}{kt} + g_{s,k}(z),$$

где $g_{s,k}(z)$ $(s = 1, \dots, n;\ k \in \mathbb{Z})$ — некоторая голоморфная функция. В точках, отличных от $a_s^{(0)} + kt$ $(s = 1, \dots, n;\ k \in \mathbb{Z})$, функция $f''(z)/f'(z)$ голоморфна. Ряд

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\alpha_s - 1}{z - a_s^{(0)}} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{\alpha_s - 1}{z - (a_s^{(0)} + kt)} + \frac{\alpha_s - 1}{kt} \right] \tag{3}$$

равномерно сходится на любом замкнутом ограниченном множестве, не содержащем точек $a_s^{(0)} + kt$ $(s = 1, \dots, n;\ k \in \mathbb{Z})$. Обозначим сумму ряда (3) через $F(z)$. Она представляет собой потенциальную функцию для n систем диполей. Диполи одной из систем расположены в точках $a_s^{(0)}, a_s^{(0)} \pm t, a_s^{(0)} \pm 2t, \dots$; момент $\alpha_s - 1$ таких диполей положителен, если угол с вершиной $A_s^{(0)}$ многоугольника D больше развернутого угла $(1 < \alpha_s \leq 2)$, и отрицателен, если угол $A_s^{(0)}$ меньше развернутого угла $(0 < \alpha_s < 1)$. Очевидно, $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$ и, значит, $F(z)$ имеет вещественные значения на действительной оси с исключенными точками $a_s^{(0)} + kt$ $(s = 1, \dots, n;\ k \in \mathbb{Z})$.

Разность $f''(z)/f'(z)-F(z)$ не имеет особенностей в $\mathbb{C}$ и представляет собой некоторую целую периодическую функцию с периодом t. Обозначим ее через $g(z)$. Функция $g(z)$ вещественнозначна на действительной оси. Интегрируя уравнение

$$\frac{d}{dz}\ln f'(z) = F(z) + g(z)$$

вдоль простой дуги, соединяющей в Π^+ точку z с фиксированной точкой z_0 из замыкания Π^+, из которого исключены точки $a_s^{(0)}+kt$ $(s=1,\ldots,n;\ k\in\mathbb{Z})$, если $\alpha_s=0$, получим, воспользовавшись представлением $\sin z$ в виде бесконечного произведения (напр., [2], с. 529),

$$\ln\frac{f'(z)}{f'(z_0)} = \int_{z_0}^{z} g(\zeta)d\zeta + \ln\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{z-a_s^{(0)}}{z_0-a_s^{(0)}}\right)^{\alpha_s-1} + \ln\prod_{s=1}^{n}\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\left[\frac{\left(1-\dfrac{z-a_s^{(0)}}{kt}\right)e^{\frac{z-a_s^{(0)}}{kt}}}{\left(1-\dfrac{z_0-a_s^{(0)}}{kt}\right)e^{\frac{z_0-a_s^{(0)}}{kt}}}\right]^{\alpha_s-1} =$$

$$= g_1(z) + \ln\prod_{s=1}^{n}\left(\frac{z-a_s^{(0)}}{z_0-a_s^{(0)}}\right)^{\alpha_s-1} + \ln\prod_{s=1}^{n}\left[\frac{(z_0-a_s^{(0)})\sin\frac{\pi}{t}(z-a_s^{(0)})}{(z-a_s^{(0)})\sin\frac{\pi}{t}(z_0-a_s^{(0)})}\right]^{\alpha_s-1}.$$

Здесь $g_1(z)$ — целая функция. После потенцирования и повторного интегрирования имеем

$$f(z) = f'(z_0)\int_{z_0}^{z} G(\zeta)\prod_{s=1}^{n}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{t}(\zeta-a_s^{(0)})}{\sin\frac{\pi}{t}(z_0-a_s^{(0)})}\right]^{\alpha_s-1} d\zeta + f(z_0),$$

где $G(z)=\exp g_1(z)$ — некоторая целая функция, не обращающаяся в нуль. Если z_0 и $G(z_0)$ вещественны, то функция $G(z)$ имеет вещественные значения на действительной оси.

Функция $f(z)$ принадлежит семейству функций вида

$$f(z) = C\int_{z_0}^{z} G(\zeta)\prod_{s=1}^{n}\left[\sin\frac{\pi}{t}(\zeta-a_s^{(0)})\right]^{\alpha_s-1} d\zeta + C_0, \tag{4}$$

где z_0, C, C_0 — постоянные. Вывод формулы для $f(z)$ окончен.

Функция $G(z)$, постоянные C, C_0, t, $a_1^{(0)},\ldots,a_n^{(0)}$ в (4) подлежат определению из условий конкретной задачи. Заметим, что прообразы двух вершин области D могут быть взяты заранее.

Остановимся на простейших примерах применения формулы (4) с $G(z)=\mathrm{const}$ (ср. [3], задачи 368, 372).

Пусть D — верхняя полуплоскость плоскости w с исключенными вертикальными отрезками

$$[(2k+1)\pi/2,\ (2k+1)\pi/2+ia],\quad k\in\mathbb{Z},$$

длины a, $0<a<+\infty$; очевидно, $T=\pi$. Отображение $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f(\pi/2)=\pi/2+ia$, $f(\infty)=\infty$, полуплоскости Π^+ на D дается формулой

$$f(z) = C\int_0^z \frac{\sin(\zeta-\pi/2)}{\sqrt{\sin(\zeta-\pi/2+\lambda)\sin(\zeta-\pi/2-\lambda)}}d\zeta = -C\int_0^z \frac{d\sin\zeta}{\sqrt{\cos^2\lambda-\sin^2\zeta}} = -C\arcsin\frac{\sin z}{\cos\lambda},$$

где $\pi/2-\lambda$, $\pi/2+\lambda$ — прообразы двойной угловой точки $\pi/2$. Из условия $f(\pi/2-\lambda)=\pi/2$ находим $C=-1$. Так как $f(\pi/2)=\pi/2+ia$, то $\sin(\pi/2+ia)=1/\cos\lambda$, откуда $1/\cos\lambda=\operatorname{ch} a$. В итоге имеем функцию

$$f(z) = \arcsin[\operatorname{ch} a\sin z],$$

дающую конформное отображение Π^+ на D с указанным соответствием граничных точек.

Пусть D — плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами ее нижней полуплоскости $\{w:\operatorname{Im} w<0\}$ по вертикальным лучам, выходящим из точек $w=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Отображение $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f(\frac{\pi}{2})=\infty$,

$f(\infty) = \infty$, полуплоскости Π^+ на D дается формулой (4) с $a_1^{(0)} = 0$, $a_2^{(0)} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $t = \pi$

$$f(z) = C\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}d\zeta = -c\ln\cos z.$$

Полагая $C = -i$, убеждаемся, опираясь на теорему о соответствии границ, в том, что функция $f(z) = i\ln\cos z$ реализует отображение Π^+ на D.

Функция $\psi(z) = if(z)$ однолистно и конформно отображает Π^+ на плоскость с разрезами по лучу $l_0 = \{w : 0 \leq \operatorname{Re} w < +\infty,\ \operatorname{Im} w = 0\}$ и лучам l_k, получающимся сдвигом l_0 на $ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Интеграл

$$L(x) = \int_0^x \psi(x)dx = -\int_0^x \ln\cos x\,dx, \quad -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2},$$

известен как функция Лобачевского ([4], с. 184; [5], с. 328). Она продолжается на Π^+ в виде интеграла

$$L(z) = -\int_0^z \ln\cos z\,dz,$$

взятого по жордановой дуге, соединяющей 0 и z, а также с использованием принципа симметрии — на всю комплексную плоскость. Отметим, что ([5], формула 3.615(7))

$$L(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\pi}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{2}G = 0,086414022\ldots,$$

где $G = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0,915965594\ldots$ — постоянная Каталана.

Пусть D — плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами ее нижней полуплоскости по параллельным лучам, выходящим из точек $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, и наклоненным к вещественной оси на угол γ, отличный от $\pi/2$. Тогда отображение $w = f_\gamma(z)$, $f_\gamma(0) = 0$, $f_\gamma(\frac{\pi}{2}) = \infty$, $f_\gamma(\infty) = \infty$, полуплоскости Π^+ на D дается формулой

$$f_\gamma(z) = \int_0^z G_\gamma(\zeta)\frac{\sin\zeta}{\sin\frac{\pi}{t}(\zeta - \frac{\pi}{2})}d\zeta,$$

где число $t = t(\gamma)$ и целая функция $G_\gamma(z)$ подлежат определению.

Благодарю профессора Л.А. Аксентьева за обсуждение работы.

Литература

1. Александров И.А., Соболев В.В. *Аналитические функции комплексного переменного.* – М.: Высш. школа, 1984. – 192 с.
2. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 704 с.
3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* – М.: Физматгиз, 1961. – 367 с.
4. Лобачевский Н.И. *Полное собрание сочинений.* – Т. 3. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 524 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 464 с.

Томский государственный университет

Поступила 10.01.1997