ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 519.216

А.И. ВОЛОДИН

СХОДИМОСТЬ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА p

1. Введение

Вводится понятие $f\sup$-сходимости случайных элементов, которая сильнее, чем сходимость п. н., и для этой сходимости изучаются законы больших чисел для взвешенных сумм случайных элементов со значениями в банаховом пространстве типа p.

Более сильная, чем п. н. сходимость определяется следующим образом: для возрастающей непрерывной функции $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$, и случайных элементов $(T_n)_1^\infty$ со значениями в банаховом пространстве E последовательность $T_n \to 0$ в смысле $f\sup$, если $\mathbf{E}f(\sup\limits_{k\geq n}\|T_k\|) \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно, $f\sup$-сходимость сильнее как сходимости почти наверное, так и сходимости в пространстве Орлича $L_f(E)$ (если f удовлетворяет Δ_2-условию ([1], теорема 9.4)).

В работе находятся моментные условия для норм случайных элементов со значениями в пространстве типа p, при которых взвешенные суммы этих элементов сходятся к нулю в смысле $f\sup$.

Введем ряд определений и обозначений: E — вещественное сепарабельное банахово пространство, $(X_k)_1^\infty$ — последовательность независимых симметричных случайных элементов со значениями в E, через C будем обозначать любую положительную постоянную, которая может принимать различные значения даже в пределах одной формулы. Скажем, что последовательность случайных элементов (X_k) *стохастически доминируется* положительной случайной величиной ξ (обозначение $(X_k) \prec \xi$), если существует такое $C > 0$, что для всех $t > 0$

$$\sup_{k\geq 1}\mathbf{P}\{\|X_k\| > t\} \leq C\mathbf{P}\{\xi > t\}.$$

Используемые в дальнейшем понятия и свойства радемахеровского и устойчивого типов банахова пространства можно найти в ([2], ch. 3–4). Напомним также

Неравенство Квапеня [3]. *Пусть $(X_k)_1^n$ — независимые симметричные случайные элементы и $(s_k)_1^n \subset \mathbf{R}$. Тогда для всех $t \geq 0$ вероятность*

$$\mathbf{P}\Big\{\Big\|\sum_{k=1}^n s_kX_k\Big\| > t\Big\} \leq 2\mathbf{P}\Big\{\max_{1\leq k\leq n}|s_k|\Big\|\sum_{k=1}^n X_k\Big\| > t\Big\}.$$

Несколько слов об истории вопроса. Исследование сходимости взвешенных сумм является естественным продолжением изучения закона больших чисел Марцинкевича. Закон больших чисел Марцинкевича изучался Т.А. Азларовым и Н.А. Володиным [4], А. де Акостой [5] в банаховом пространстве радемахеровского типа; М. Маркусом и В.А. Войчинским [6] в банаховом пространстве устойчивого типа. Обобщения этих результатов на взвешенные суммы случайных элементов были получены А. Адлером, А. Росальским и Р.Л. Тейлором [7], Т. Микошем и Р. Норвайшей [8], Р.Л. Тейлором [9]. Данная работа продолжает исследования по этой тематике. Ряд результатов этой статьи анонсировался в [10] и [11].

2. Формулировка основного результата и доказательство лемм

Пусть (X_k) — последовательность независимых симметричных случайных элементов со значениями в банаховом пространстве E, $\mathbf{a} = \{a_k(n),\ n \in \mathbf{N},\ 1 \leq k \leq n\}$ — двойная последовательность вещественных чисел, которая в дальнейшем будет называться *взвесью* (естественно, не все $a_k(n) = 0$). Изучается $f\,\sup$-сходимость к нулю взвешенных сумм вида

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n) X_k.$$

.

Обозначим $\varphi(n) = 1/\max\limits_{1\leq k\leq n} |a_k(n)|$, $n \in \mathbf{N}$, и потребуем, чтобы последовательность $\varphi = (\varphi(n))$ возрастала и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Так как мы изучаем закон больших чисел в пространствах типа p, то необходимы некоторые условия роста как функции f (из определения $f\,\sup$-сходимости), так и последовательности φ (соответствующей взвеси $\mathbf{a}$), связанные с величиной p. Введем следующие классы непрерывных функций:

$$\mathbf{I}_p = \{f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+, \quad f(0) = 0, \quad f(\infty) = \infty, \quad f \text{ возрастает и } \int_1^\infty f(t) t^{-p-1} dt < \infty\}$$

и $\mathbf{G}_p$ — класс таких полуаддитивных функций f, что существует $q < p$ для которого $f \in \mathbf{I}_q$. Напомним, что полуаддитивность функции f означает $f(t + s) \leq C(f(t) + f(s))$ для некоторой постоянной C, зависящей только от f, и всех $t > 0$, $s > 0$.

Скажем, что взвесь $\mathbf{a} \in F_p$, если соответствующая последовательность φ является правильно меняющейся последовательностью с параметром $1/p$, $1 < p < 2$, т.е. $\varphi(n) = n^{1/p} L(n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} L(mn)/L(n) = 1$ для всех $m \in \mathbf{N}$ ([12]).

Основной результат статьи составляет

Теорема 1. *Если банахово пространство* E *имеет устойчивый тип p, $1 < p < 2$, взвесь $\mathbf{a} \in F_p$, функция $f \in \mathbf{G}_p$, (X_k) — независимые симметричные случайные элементы и $(X_k) \prec \xi$, то из $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi > \varphi(k)\} < \infty$ следует $T_n \to 0$ в $f\,\sup$ при $n \to \infty$.*

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм. Первая лемма является простым обобщением известного классического результата (см. [13], с. 127–128; [14], лемма 2.2), поэтому приводится без доказательства.

Лемма 1. *Пусть $(X_k) \prec \xi$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi > \varphi(k)\} < \infty$.*

1) *Если для некоторого $r > 0$ $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varphi^{-r}(k) = O(n\varphi^{-r}(n))$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-r}(n) \mathbf{E}\|X_n\|^r I\{\|X_n\| < \varphi(n)\} < \infty.$$

2) *Если для некоторого $q > 0$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi^{-q}(k) = O(n\varphi^{-q}(n))$, и существует такое $C > 0$, что $\varphi(k + 1) \leq C\varphi(k)$ для всех $k \in \mathbf{N}$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-q}(n) \mathbf{E}\|X_n\|^q I\{\|X_n\| \geq \varphi(n)\} < \infty.$$

Лемма 2. *Если (X_k) — независимые симметричные случайные элементы, то $\mathbf{E} f(\sup\limits_{n\geq k} \|T_n\|) \leq 4\mathbf{E} f(\sup\limits_{n\geq k} \|S_n\|/\varphi(n))$ для любого $k \geq 1$; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.*

Доказательство. По неравенству Леви для всех $k \le m$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\{\sup_{k\le n\le m} \|T_n\| > \varepsilon\} \le 2\mathbf{P}\{\|T_m\| > \varepsilon\}.$$

Тогда по неравенству Квапеня

$$\mathbf{Q} \le 4\mathbf{P}\{\|S_m\|/\varphi(m) > \varepsilon\} \le 4\mathbf{P}\{\sup_{k\le n\le m} \|S_n\|/\varphi(n) > \varepsilon\}.$$

Следовательно, $\mathbf{P}\{\sup\limits_{n\ge k} \|T_n\| > \varepsilon\} \le 4\mathbf{P}\{\sup\limits_{n\ge k} \|S_n\|/\varphi(n) > \varepsilon\}$. Пусть $g(t)$ — обратная к $f(t)$ функция: $f(g(t)) = t$. Тогда

$$\mathbf{E}f(\sup_{n\ge k}\|T_n\|) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{f(\sup_{n\ge 1}\|T_n\|) > t\}dt = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\sup_{n\ge 1}\|T_n\| > g(t)\}dt \le$$

$$\le 4\int_0^\infty \mathbf{P}\{\sup_{n\ge 1}\|S_n\|/\varphi(n) > g(t)\}dt = 4\mathbf{E}f(\sup_{n\ge k}\|S_n\|/\varphi(n)). \quad \square$$

Третья лемма есть аналог результата В.Д. Чои и С.Х. Санга ([14], теорема 2.1). Существенно новым является рассмотрение случая банахова пространства и нормировки общего вида.

Лемма 3. *Пусть E имеет радемахеровский тип p, $1 < p < 2$. Если (X_k) — такие независимые симметричные случайные элементы, что*

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\|X_k\|^p/\varphi^p(k) < \infty,$$

то для любой функции $f \in \mathbf{I}_p$ среднее $\mathbf{E}f(\sup\limits_{n\ge 1}\|S_n\|/\varphi(n)) < \infty$.

Доказательство. Пусть $g(t)$ — обратная к f функция: $f(g(t)) = t$, $t \ge 0$. Для любого натурального $k \ge 0$ положим $m_k = \min\{n : \varphi(n) \ge 2^k\}$ и $N_k = \{n : m_k \le n < m_{k+1}\}$. Тогда в силу неравенства Леви

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\{f(\sup_{n\ge 1}\|S_n\|/\varphi(n)) > t\} = \mathbf{P}\{\sup_{k\ge 0}\max_{n\in N_k}\|S_n\|/\varphi(n) > g(t)\} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}\{\max_{n\in N_k}\|S_n\|/\varphi(n) > g(t)\} \le \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}\{\max_{n\in N_k}\|S_n\| > 2^k g(t)\} \le 2\sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}\{\|S_{m_{k+1}-1}\| > 2^k g(t)\}.$$

Теперь применим неравенство Чебышева и воспользуемся тем, что пространство E имеет тип p ([2], ch. 3):

$$\mathbf{Q} \le 8g^{-p}(t)\sum_{k=0}^\infty 2^{-kp}\mathbf{E}\|S_{m_{k+1}-1}\|^p \le Cg^{-p}(t)\sum_{k=0}^\infty 2^{-kp}\sum_{i=1}^{m_{k+1}-1}\mathbf{E}\|X_i\|^p.$$

Поменяв порядок суммирования, получим

$$\mathbf{Q} \le Cg^{-p}(t)\sum_{i=1}^\infty \mathbf{E}\|X_i\|\sum_{k\ge k_i} 2^{-kp},$$

где $k_i = \min\{k : m_{k+1}-1 \ge i\}$. Для этого k_i справедливы неравенства $m_{k_i+1}-1 \ge i$ и $\varphi(m_{k_i+1}-1) > 2^{k_i+1}$.

Оценим сумму

$$\sum_{k\ge k_i} 2^{-kp} = \frac{2^p}{1-2^{-p}}2^{-(k_i+1)p} \le C(\varphi(m_{k_i+1}-1))^{-p} \le C\varphi^{-p}(i).$$

Итак, $\mathbf{Q} \le Cg^{-p}(t)\sum\limits_{i=1}^\infty \mathbf{E}\|X_i\|^p/\varphi^p(i)$.

Сделав замену переменных $t = f(s)$ в интеграле $\int\limits_1^\infty f(s)ds^{-p}$, который сходится по условию, и проинтегрировав по частям, получим $\int\limits_1^\infty g^{-p}(t)dt < \infty$. Но тогда

$$\mathbf{E}f(\sup_{n\geq 1}\|S_n\|/\varphi(n)) \leq 1+\int_1^\infty \mathbf{P}\{f(\sup_{n\geq 1}\|S_n\|/\varphi(n) > t\}dt \leq 1+C\sum_{i=1}^\infty \mathbf{E}\|X_i\|^p/\varphi^p \int_1^\infty g^{-p}(t)dt < \infty. \quad \square$$

3. Основные результаты

Следующее предложение может рассматриваться как закон больших чисел Чжуна ([15], теорема 3.1) относительно $f\sup$-сходимости для взвешенных сумм.

Предложение. *Пусть заданы взвесь* $\mathbf{a}$ *и соответствующая последовательность* φ *и пространство* E *имеет радемахеровский тип* p, $1 < p < 2$. *Если* (X_k) — *такие независимые симметричные случайные элементы, что* $\sum\limits_{k=1}^\infty \mathbf{E}\|X_k\|^p/\varphi^p(k) < \infty$, *то для любого* $f \in \mathbf{I}_p$ *последовательность* $T_n \to 0$ *в* $f\sup$.

Доказательство. Так как пространство E имеет тип p ([2], ch. 3), то

$$\mathbf{E}\Big\|\sum_{k=1}^\infty X_k/\varphi(k)\Big\|^p \leq C\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\|X_k\|^p/\varphi^p(k),$$

т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty X_k/\varphi(k)$ сходится в $L^p(\mathrm{E})$. Но тогда он сходится п. н. ([9], § 4.5). По лемме Кронекера $\frac{1}{\varphi(n)}\sum\limits_{k=1}^n X_k \to 0$ п. н. при $n \to \infty$.

Применив неравенство Квапеня, находим

$$\mathbf{P}\{\|T_m\| > t\} \leq 2\mathbf{P}\Big\{\frac{1}{\varphi(n)}\Big\|\sum_{k=1}^n X_k\Big\| > t\Big\} \to 0.$$

т. е. $T_n \to 0$ по вероятности при $n \to \infty$. Но тогда существует такая подпоследовательность $(n_m)_{m=1}^\infty$, что $T_{n_m} \to 0$ п. н. при $m \to \infty$. По лемме 2 среднее $\mathbf{E}f(\sup\limits_{n\geq 1}\|T_n\|) < \infty$, откуда в силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости $\mathbf{E}f(\sup\limits_{k\geq n_m}\|T_k\|) \to 0$ при $m \to \infty$. Итак, $\mathbf{E}f(\sup\limits_{k\geq n}\|T_k\|) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Следствие. Пусть заданы взвесь $\mathbf{a}$ и соответствующая последовательность φ и пространство E имеет радемахеровский тип p, $1 < p < 2$. Если (X_k) — такие независимые симметричные случайные элементы, что $\sum\limits_{k=1}^\infty \mathbf{E}\|X_k\|^p/\varphi^p(k) < \infty$, то $T_n \to 0$ п. н.

Теперь, используя лемму 1 и предложение, осуществим

Доказательство теоремы 1. Так как φ есть правильно меняющаяся последовательность с показателем $1/p$, то выполняются условия леммы 1 для всех $r > p$ и $q < p$ ([12], упражнение 2.1 и теорема 2.8). Обозначим

$$X'_k = X_k I\{\|X_k\| < \varphi(k)\}, \quad X''_k = X_k I\{\|X_k\| \geq \varphi(k)\},$$
$$T'_n = \sum_{k=1}^n a_k(n)X'_k, \quad T''_n = \sum_{k=1}^n a_k(n)X''_k.$$

Тогда $X_k = X'_k + X''_k$ и

$$\mathbf{E}f(\sup_{n\geq k}\|T_n\|) = \mathbf{E}f(\sup_{n\geq k}\|T'_n + T''_n\|) \leq \mathrm{C}\mathbf{E}f(\sup_{n\geq k}\|T'_n\|) + \mathrm{C}\mathbf{E}f(\sup_{n\geq k}\|T''_n\|),$$

т. к. функция f полуаддитивна.

Пространство E имеет устойчивый тип $p < 2$, значит, оно имеет радемахеровский тип r для некоторого $r > p$ ([2], ch. 4) и по лемме 1(1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\|X'_k\|^r / \varphi^r(k) < \infty.$$

Следовательно, по предложению $T'_n \to 0$ в $f\sup$.

Так как $f \in \mathbf{G}_p$, то существует такое $q < p$, что $f \in \mathbf{I}_q$. По лемме 1(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\|X''_n\|^q/\varphi^q(k) < \infty$. Следовательно, по предложению $T_n \to 0$ в $f\sup$. $\square$

4. Применения

Теорема 1 связана с некоторыми задачами планирования оптимального момента останов-ки, а именно, с вопросом об ограниченности $\mathbf{E}\sup\limits_{n\geq 1}\Big(\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\Big|/\varphi(n)\Big)^r$ для некоторых $\varphi(n)$ и $r > 0$ (напр., $\varphi(n) = n^q$ [15], [14]) и независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин ξ_k. Приведем один результат такого рода для случайных элементов со значениями в банаховом пространстве.

Теорема 2. *Пусть банахово пространство* E *имеет устойчивый тип* p, $1 < p < 2$ *последовательность* $\varphi = (\varphi(n))$ *правильно меняется с показателем* $1/p$, *функция* $f \in \mathbf{G}_p$, (X_k) — *последовательность независимых симметричных случайных элементов с одинаково распределенными нормами. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\|X_1\| > \varphi(k)\} < \infty$,
(2) $S_n/\varphi(n) \to 0$ *в* $f\sup$ *при* $n \to \infty$,
(3) $\mathbf{E}f(\sup\limits_{n\geq 1}\|S_n\|/\varphi(n)) < \infty$,
(4) $\mathbf{E}f(\sup\limits_{n\geq 1}\|X_n\|/\varphi(n)) < \infty$.

Доказательство. Импликация (1)$\Longrightarrow$(2) установлена в теореме 1, а (2)$\Longrightarrow$(3) тривиально. Покажем, что (3)$\Longrightarrow$(4). Так как функция f полуаддитивна и $\varphi(n)$ возрастает, то

$$\mathbf{E}f(\sup_{n\geq 1}\|X_n\|/\varphi(n)) = \mathbf{E}f(\sup_{n\geq 1}\Big\|S_n/\varphi(n) - \frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)}S_{n-1}/\varphi(n)\Big\| \leq$$
$$\leq C\mathbf{E}f(\sup_{n\geq 1}\|S_n\|/\varphi(n)) + C\mathbf{E}f(\sup_{n\geq 1}\|S_{n-1}\|/\varphi(n-1)) \leq 2C\mathbf{E}f(\sup_{n\geq 1}\|S_n\|/\varphi(n)).$$

Наконец, докажем от противного, что (4)$\Longrightarrow$(1). Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\|X_1\| > \varphi(k)\} = \infty.$$

Тогда для всех $M \in \mathbf{N}$

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\|X_1\| > \varphi(Mk)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\|X_1\| > C\varphi(M)\varphi(k)\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\|X_1\|/\varphi(k) > C\varphi(M)\},$$

где в предпоследнем неравенстве использовалось условие правильной меняемости φ. По лемме Бореля-Кантелли $\sup\limits_{n\geq 1}\|X_n\|/\varphi(n) > \varphi(M)$ п. н., т. е. $\sup\limits_{n\geq 1}\|X_n\|/\varphi(n) = \infty$ п. н. Следовательно, $\mathbf{E}f(\sup\limits_{n\geq 1}\|X_n\|/\varphi(n)) = \infty$, что противоречит (4). $\square$

В заключение выражаю признательность рецензенту моей статьи, профессору Т. Микошу (Цюрих, Швейцария), профессору А. Адлеру (Чикаго, США) и профессору Д. Шиналю (Люблин, Польша) за полезные замечания.

Литература

1. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* – М.: ГИФМЛ, 1958. – 271 с.
2. Pisier G. *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces* // Lect. Notes. Math. – 1986. – № 1206. – P. 167–241.
3. Sztencel R. *On boundedness and convergence of some Banach space valued random variables* // Probab. and Math. Stat. – 1981. – V. 2. – P. 83–88.
4. Азларов Т.А., Володин Н.А. *Законы больших чисел для одинаково распределенных банаховозначных величин.* – Теория вероятн. и ее примен. – 1981. – Т. XXVI. – № 3. – С. 573–580.
5. Acosta A. de. *Inequalities for B-valued random vectors and applications to the strong law of large numbers* // Ann. Probab. – 1981. – V. 9. – P. 157–161.
6. Marcus M., Woyczynsky W. *Stable measures and central limit theorem in spaces of stable type* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – V. 271. – P. 71–102.
7. Adler A., Rosalsky A., Taylor R. *Strong laws of large numbers for weighted sums of random elements in normed linear spaces* // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1989. – V. 12. – P. 509–530.
8. Mikosh T., Norvaisa R. *Strong laws of large numbers for fields of Banach space valued random variables* // Probab. Th. Rel. Fields. – 1987. – V. 74. – P. 241–253.
9. Taylor R. *Stochastic convergence of weighted sums of random elements in linear spaces.* – Lect. Notes. Math. – 1976. – № 672. – 270 p.
10. Володин А.И. *Сходимость взвешенных сумм случайных элементов в пространствах типа p* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 65-67.
11. Volodin A.I. *On the law of large numbers for weighted sums of random elements in p-type spaces* // V Int. Vilnius Conf. on Probab. Th. and Math. Stat. Abstracts of Commun. – 1989. – V. II. – P. 216–217.
12. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* – М.: Наука, 1985. – 142 с.
13. Stout W. *Almost sure convergence.* – New York: Acad. Press. – 1974.
14. Choi B.D., Sung S.H. *On moment conditions for the supremum of normed sums.* – Stochast. Proc. and Appl. – 1987. – V. 26. – P. 99–106.
15. Hoffmann-Jorgensen J., Pisier G. *The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces* // Ann. Probab. – 1976. – V. 4. – P. 587–599.
16. Gut A. *Moments of the maximum of normed partial sums of random variables with multidimensional indices* – Zeitsch. Wahrsch. – theorie Verw. DDR Gebiete. – 1979. – Bd. 46. – S. 205–220.

Казанский государственный университет

Поступила
24.02.1995