

УДК 539.3

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПО ВЫСОТЕ ПЛАСТИНОЙ В ГРУНТЕ

*Н.А. Локтева<sup>1</sup>, В.Н. Паймушин<sup>2,3</sup>, Д.О. Сердюк<sup>1</sup>,  
Д.В. Тарлаковский<sup>1,4</sup>*

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*

<sup>2</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

<sup>3</sup>*Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия*

<sup>4</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия*

### Аннотация

Дано решение плоской задачи о взаимодействии гармонической волны с пластиной конечной длины, находящейся в грунте. Механическое поведение пластины описывается по сдвиговой модели С.П. Тимошенко, а окружающего пластину грунта – уравнением линейной теории упругости. Проведено исследование вибропоглощающих свойств пластины в зависимости от частоты падающей на нее гармонической волны. С практической точки зрения рассматриваемая задача связана с защитой сооружений от воздействия вибраций, формирующихся вдали от линии метрополитена движением поездов.

**Ключевые слова:** грунт, пластина, модель Тимошенко, гармоническая волна, частота колебаний, вибропоглощение, виброускорение

### Введение

В настоящее время все чаще появляется необходимость защиты уже существующих зданий и сооружений от негативного техногенного воздействия вследствие внедрений новой инфраструктуры в уже существующую городскую среду. Для жилых и общественных зданий наиболее неблагоприятными внешними являются вибрации. Их источниками являются инженерное оборудование, промышленные установки, а также транспортные средства (метрополитен мелкого залегания, тяжелые грузовые автомобили, железнодорожные поезда, трамваи), создающие при работе большие динамические нагрузки [1]. Одним из вариантов защиты фундаментов от возникающих в грунте вибраций является установка вибропоглощающих преград между источником колебаний и объектом [2, 3].

В настоящей работе исследуются вибропоглощающие свойства пластины, находящейся под воздействием плоской гармонической волны в грунте. С практической точки зрения эта ситуация может соответствовать воздействию вибраций, создаваемых метрополитеном на значительном удалении от препятствия.

### 1. Постановка задачи

В качестве вибропоглощающего препятствия рассматривается упругая однородная пластина, окруженная с двух сторон заполненными грунтом полупространствами “1” и “2” [4]. Используется прямоугольная декартова система координат

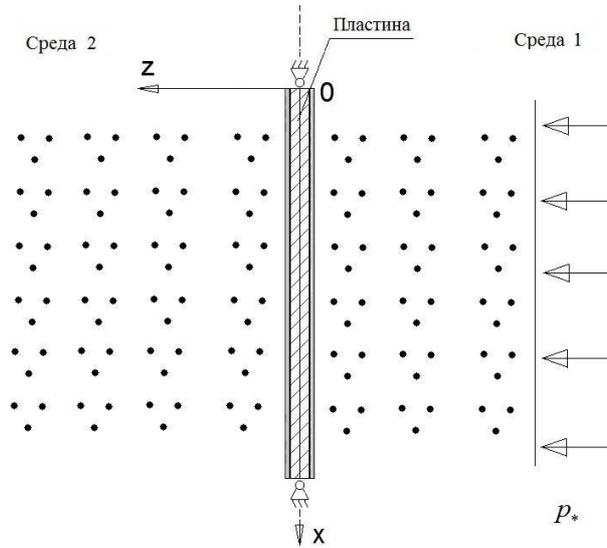


Рис. 1. Модель взаимодействия грунта с пластиной

$Oxyz$  с началом в конце пластины. При этом предполагается, что плоскость  $Oxy$  для пластины является срединной, пластина неограничена вдоль оси  $Oy$  и имеет конечную длину по оси  $Ox$  (рис. 1). Края пластины шарнирно оперты.

Невозмущенное состояние грунта полагается недеформированным. Со стороны отрицательного направления оси  $Oz$  на препятствие набегают плоская гармоническая волна растяжения с амплитудой нормального напряжения на фронте  $p_*$  и частотой  $\omega$ . Нормальный вектор к фронту волны ортогонален плоскости  $Oxy$ . Поэтому компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки и грунта не зависят от координаты  $y$ .

Основной целью настоящей работы является определение суммарного векторного поля ускорений  $\mathbf{a}$ , индуцированных прошедшей и излученной волнами в полупространстве “2”, как функции частоты  $\omega$  и пространственных координат  $x$  и  $z$  в зависимости от параметров пластины. Компоненты  $a_x$  и  $a_z$  и модуль  $a$  векторного поля ускорений определяются по следующим формулам:

$$a_x = -\omega^2 u^{(2)}, \quad a_z = -\omega^2 w^{(2)}, \tag{1}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2}, \tag{2}$$

где  $u$  и  $w$  – перемещения вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  соответственно.

Математическая постановка задачи включает в себя модель набегающей волны, уравнения движения грунта и пластины, условия на бесконечности, а также условия контакта грунта с препятствием. Таковыми принимаются условия свободного проскальзывания.

## 2. Уравнения движения грунта

В качестве модели грунта используется однородная упругая изотропная среда [5, 6]. Замкнутая система уравнений, описывающая ее плоское движение, включает в себя уравнения движения, соотношения Коши, физический закон [7]:

$$\rho \ddot{u} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z}, \quad \rho \ddot{w} = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z}; \tag{3}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (4)$$

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $\theta$  – коэффициент объемного расширения;  $\rho$  и  $\lambda$ ,  $\mu$  – плотность и упругие постоянные Ламе грунта; точками здесь и далее обозначены производные по времени  $t$ . Система уравнений (3)–(5) эквивалентна уравнениям Ламе

$$\rho\ddot{u} = (\lambda + \mu) \frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u,$$

$$\rho\ddot{w} = (\lambda + \mu) \frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

которые сводятся к системе двух волновых уравнений относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и ненулевой компоненты  $\psi$  векторного потенциала

$$\ddot{\varphi} = c_1^2 \Delta\psi, \quad \ddot{\psi} = c_2^2 \Delta\psi, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (6)$$

где  $c_j$  – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига.

Компоненты вектора перемещений связаны с упругими потенциалами следующим образом:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Далее рассматриваются только гармонические волны с частотой  $\omega$ . При этом все заданные и искомые функции представляются в виде

$$\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}, \quad \psi = \psi_a e^{i\omega t}, \quad u = u_a e^{i\omega t}, \quad \dots$$

где буквой “ $a$ ” обозначены соответствующие амплитудные значения, в дальнейшем при отсутствии разночтений этот индекс опускается.

Тогда уравнения движения (6) запишутся следующим образом:

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k_2^2\psi = 0, \quad k_j = \omega/c_j, \quad (8)$$

где  $k_j$  – волновые числа.

Поскольку занимаемая грунтом область неограниченна, потенциалы как решения уравнений (8) должны удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} + ik_1\varphi = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} + ik_2\psi = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

где  $r$  – длина радиуса-вектора.

### 3. Набегающая волна

Для описания плоской гармонической волны рассматривается плоская одномерная волна растяжения-сжатия ( $\psi \equiv 0$ ) [7], распространяющаяся вдоль положительного направления оси  $Oz$  с амплитудой нормального давления  $p_*$ . В этом случае в первом из уравнений (8) полагаем  $\varphi = \varphi(z)$ . В результате приходим к уравнению относительно амплитуды потенциала, решение которого удовлетворяет условиям (9).

Подставляя его в (4), (5) и (7), получаем перемещения, деформации и напряжения в плоской волне:

$$\begin{aligned} u &\equiv 0, \quad w = -ik_1 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1t)}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{13} \equiv 0, \quad \varepsilon_{33} = \theta = -k_1^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1t)}, \\ \sigma_{33} &= -(\lambda + 2\mu) k_1^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1t)} = -\rho\omega^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1t)}, \\ \sigma_{11} &= -\lambda k_1^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1t)} = -\kappa\rho\omega^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1t)}, \quad \sigma_{13} \equiv 0, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \end{aligned}$$

где  $A_\varphi$  – произвольная постоянная.

Учитывая, что  $\sigma_{33}|_{t=0, z=0} = p_*$ , для перемещений и напряжений в набегающей волне получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} u = u_* &\equiv 0, \quad w = w_* = \frac{ik_1 p_*}{\rho\omega^2} e^{-ik_1 z} = \frac{ip_*}{\rho c_1 \omega} e^{-ik_1 z}, \quad A_\varphi = -\frac{p_*}{\rho\omega^2}, \\ \sigma_{11} = \sigma_{11*} &= \kappa p_* e^{-ik_1 z}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{33*} = p_* e^{-ik_1 z}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{13*} \equiv 0. \end{aligned} \quad (10)$$

где  $u_*$  и  $w_*$  – перемещения вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  в набегающей волне.

#### 4. Уравнения движения пластины

В качестве модели пластины используем однородную изотропную пластину типа С.П. Тимошенко. Ее движение описывается следующей замкнутой системой уравнений, включающей в себя уравнения движения, физические и кинематические соотношения [8]:

$$\begin{aligned} \rho_0 h \omega^2 w_0 + \mu_0 h k^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + p &= 0, \\ \rho_0 I \omega^2 \chi + I (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \mu_0 h k^2 \left( \chi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $w_0$  и  $p$  – прогиб и давление (положительное направление совпадает с положительным направлением оси  $Oz$ );  $\chi$  – угол отклонения ортогонального к срединной поверхности до деформации материального волокна и нормального к деформированной срединной поверхности вектора  $\mathbf{n}_*$  от нормального вектора  $\mathbf{n}$  в недеформированном состоянии;  $Q$  и  $M$  – перерезывающая сила и изгибающий момент;  $h$  – толщина пластины;  $\rho_0$  и  $\lambda_0, \mu_0$  – плотность и упругие постоянные материала пластины соответственно;  $p = p_1 + p_2$ ,  $p_1$  и  $p_2$  – амплитуды давления волн в средах “1” и “2” соответственно.

Шарнирному опиранию соответствуют граничные условия

$$w_0|_{x=0,l} = 0, \quad M|_{x=0,l} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \Big|_{x=0,l} = 0. \quad (12)$$

#### 5. Определение перемещений

Замкнутая система уравнений для задачи о взаимодействии пластины с грунтом включает в себя соотношения (4), (5), (8), (7), в которых искомым функциям присваивается верхний индекс “(i)”, соответствующий номеру среды, а также уравнения (11). Условия контакта препятствия и упругих сред имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 = \left( \sigma_{33}^{(1)} + \sigma_{33*} \right) \Big|_{z=0}, \quad p_2 = -\sigma_{33}^{(2)} \Big|_{z=0}, \\ \left( w^{(1)} + w_* \right) \Big|_{z=0} = w^{(2)} \Big|_{z=0} = w_0, \quad \sigma_{13}^{(1)} \Big|_{z=0} = \sigma_{13}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для нахождения решения все функции разложим в тригонометрические ряды Фурье [9]. При этом при разложении в ряды кинематических параметров пластины необходимо учитывать граничные условия (12)

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin \lambda_n x, Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cos \lambda_n x, \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \\
X &= \left[ w_0(x, \omega), w_*, \sigma_{33*}, p(x, \omega), p_k(x, \omega), \varphi^{(i)}(x, z, \omega), \varepsilon_{11}^{(i)}(x, z, \omega), \right. \\
&\quad \left. \varepsilon_{33}^{(i)}(x, z, \omega), \theta^{(i)}(x, z, \omega), \sigma_{11}^{(i)}(x, z, \omega), \sigma_{33}^{(i)}(x, z, \omega) \right]^T, \\
X_n &= \left[ w_{0n}(\omega), w_{*n}, \sigma_{33*n}, p_n(\omega), p_{kn}(\omega), \varphi_n^{(i)}(z, \omega), \varepsilon_{11n}^{(i)}(z, \omega), \right. \\
&\quad \left. \varepsilon_{33n}^{(i)}(z, \omega), \theta_n^{(i)}(z, \omega), \sigma_{11n}^{(i)}(z, \omega), \sigma_{33n}^{(i)}(z, \omega) \right]^T, \\
Y &= \left[ \chi(x, \omega), \psi^{(k)}(x, z, \omega), u^{(k)}(x, z, \omega), \varepsilon_{13}^{(k)}(x, z, \omega), \sigma_{13}^{(k)}(x, z, \omega) \right]^T, \\
Y_n &= \left[ \chi_n(\omega), \psi_n^{(k)}(z, \omega), u_n^{(k)}(z, \omega), \varepsilon_{13n}^{(k)}(z, \omega), \sigma_{13n}^{(k)}(z, \omega) \right]^T,
\end{aligned} \tag{14}$$

где  $l$  – длина пластины.

Коэффициенты рядов в (14) связаны между собой в соответствии с (4), (5) и (7). Коэффициенты рядов для нормальных перемещений и напряжений в набегающей волне определяются согласно (10) следующим образом:

$$\begin{aligned}
w_{*n} &= \frac{2ik_1 p_*}{\rho l \omega^2} e^{-ik_1 z} \int_0^l \sin \lambda_n x dx = \frac{2ip_*}{\rho \omega c_1 \pi n} e^{-ik_1 z} [1 - (-1)^n], \\
\sigma_{33*n} &= \frac{2p_*}{l} e^{-ik_1 z} \int_0^l \sigma_{33*} \sin \lambda_n x dx = \frac{2p_*}{\pi n} e^{-ik_1 z} [1 - (-1)^n].
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя кинематические параметры пластины и давления, разложенные в ряды (14), в уравнения (11), приходим к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов  $w_{0n}$  и  $\chi_n$ .

Решение системы уравнений (11) определяется как

$$\begin{aligned}
w_{0n} &= \frac{Q_1(\lambda_n^2, \omega^2)}{P_{2n}(\omega^2)} \frac{p_{1n} + p_{2n}}{\rho_0 h}, \quad \chi_n = \frac{c_{20}^2 \lambda_n}{P_{2n}(\omega^2)} \frac{p_{1n} + p_{2n}}{\rho_0 h}, \\
P_{2n}(\omega^2) &= P_2(-\lambda_n^2, -\omega^2).
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
P_2(\lambda_n, \omega) &= P_1(\lambda_n, \omega) Q_1(\lambda_n, \omega) - c_{20}^4 \lambda_n = \\
&= r^2 (c_{20}^2 \lambda_n - \omega) (c_{10}^2 \lambda_n - \omega) - c_{20}^2 \omega = a_{20} \lambda_n^2 - a_{21} \lambda_n \omega + a_{22}(\omega), \\
a_{20} &= r^2 c_{10}^2 c_{20}^2, \quad a_{21} = r^2 (c_{10}^2 + c_{20}^2), \quad a_{22}(\omega) = \omega (r^2 \omega - c_{20}^2). \\
P_1(\lambda_n, \omega) &= c_{20}^2 \lambda_n - \omega, \quad Q_1(\lambda_n, \omega) = r^2 (c_{10}^2 \lambda_n - \omega) + c_{20}^2, \\
c_{10}^2 &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}, \quad c_{20}^2 = \frac{k\mu_0}{\rho_0}, \quad r^2 = \frac{h^2}{12}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая теперь (13), преобразуем формулу (16)

$$w_{0n}(\lambda_n, \omega) = \frac{Q_1(\lambda_n^2, \omega^2)}{\rho_0 h P_2(\lambda_n^2, \omega^2)} \left[ \sigma_{33n}^{(1)}(\lambda_n, \omega) - \sigma_{33n}^{(2)}(\lambda_n, \omega) + \sigma_{33*n}(\lambda_n, \omega) \right] \Big|_{z=0}.$$

Для определения коэффициентов рядов, соответствующих возмущенному напряженно-деформированному состоянию в окружающих средах, подставляем ряды (15) в уравнения (8). В результате получаем, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n^{(l)}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_1 - \lambda_n) \kappa_{1n}^2(\omega^2) \varphi_n^{(l)} &= 0 \quad (n \geq 1), \\ \frac{\partial^2 \psi_n^{(l)}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_2 - \lambda_n) \kappa_{2n}^2(\omega^2) \psi_n^{(l)} &= 0 \quad (n \geq 0), \quad \kappa_{jn}(\omega^2) = \kappa_j(\lambda_n^2, \omega^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Решения уравнений (18) при  $|q| < k_j$  должны удовлетворять условию излучения (9), а при  $|q| > k_j$  – условию ограниченности. Таковыми являются следующие функции:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{11}(q, \omega) \left[ e^{i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\ \psi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{21}(q, \omega) \left[ e^{i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right], \\ \varphi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{12}(q, \omega) \left[ e^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{-\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\ \psi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{22}(q, \omega) \left[ e^{-i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{-\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right], \end{aligned}$$

где  $H(x)$  – разрывная функция Хевисайда;  $C_{11}(q, \omega)$ ,  $C_{21}(q, \omega)$ ,  $C_{12}(q, \omega)$  и  $C_{22}(q, \omega)$  – постоянные интегрирования.

Далее аналогичным образом подставляя разложенные в ряды (15) функции в (3), (4) и (7), получаем выражения для коэффициентов рядов разложений для перемещений, деформаций и напряжений, соответствующих возмущенным напряженно-деформированным состояниям в окружающих средах.

Постоянные интегрирования  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{22}$  определяются из граничных условий (12) с учетом (17). Подставляя полученные значения констант в выражения для перемещений, получаем коэффициенты разложений в ряды перемещений в среде “2”:

$$\begin{aligned} u_n^{(2)}(z, \omega) &= -\frac{\lambda_n D_{2n}(\omega)}{k_2^2 \kappa_{1n}(\omega^2) D_n(\omega)} \times \\ &\quad \times \left\{ (k_2^2 - 2\lambda_n^2) \left[ e^{-i\kappa_{1n}(\omega^2)z} H(k_1 - \lambda_n) + e^{-\kappa_{1n}(\omega^2)z} H(\lambda_n - k_1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon_{1n}(k_1) \kappa_{1n}(\omega^2) \kappa_{2n}(\omega^2) \left[ i e^{-i\kappa_{2n}(\omega^2)z} H(k_2 - \lambda_n) + e^{-\kappa_{2n}(\omega^2)z} H(\lambda_n - k_2) \right] \right\}, \\ w_n^{(2)}(z, \omega) &= \frac{D_{2n}(\omega)}{k_2^2 \kappa_{1n}(\omega^2) D_n(\omega)} \times \\ &\quad \times \left\{ 2\varepsilon_{1n}(k_1) \lambda_n^2 \kappa_{1n}(\omega^2) \left[ e^{-i\kappa_{2n}(\omega^2)z} H(k_2 - \lambda_n) + e^{-\kappa_{2n}(\omega^2)z} H(\lambda_n - k_2) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \kappa_{1n}(\omega^2) (k_2^2 - 2\lambda_n^2) \left[ i e^{-i\kappa_{1n}(\omega^2)z} H(k_1 - \lambda_n) + e^{-\kappa_{1n}(\omega^2)z} H(\lambda_n - k_1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

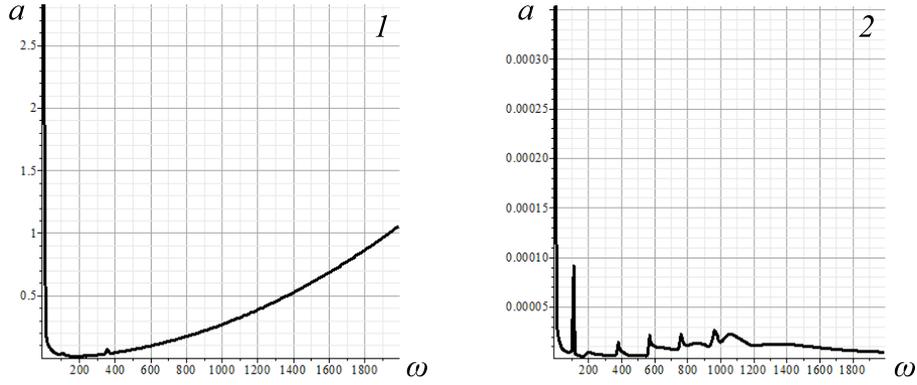


Рис. 2. Зависимость модуля поля виброускорения  $a$  от частоты набегающей волны  $\omega$ : 1 – на поверхности пластины при  $z = 0$  м; 2 – в грунте при  $z = 10$  м

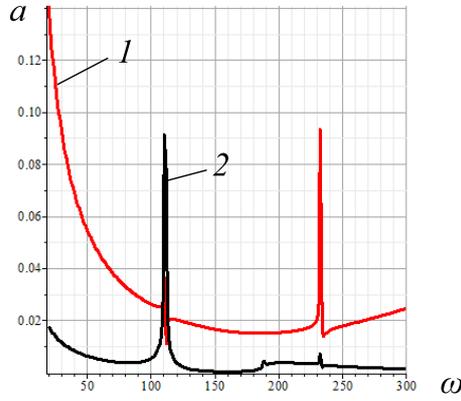


Рис. 3. Зависимость модуля поля виброускорения  $a$  при  $\omega = 20 \div 300$  Гц: 1 – на поверхности пластины при  $z = 0$  м; 2 –  $a \times 10^3$  в грунте при  $z = 10$  м

Здесь

$$D_n(\omega) = a_n(\omega) + b_n(\omega),$$

$$D_{1n}(\omega) = k_2^2 \kappa_{1n}(\omega^2) Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) \sigma_{33*n}(\omega)|_{z=0} + \varepsilon_n(k_1) b_n(\omega) w_{*n}(\omega)|_{z=0},$$

$$D_{2n}(\omega) = k_2^2 \kappa_{1n}(\omega^2) Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) \sigma_{33*n}(\omega)|_{z=0} - \varepsilon_n(k_1) a_n(\omega) w_{*n}(\omega)|_{z=0},$$

$$a_n(\omega) = S_{1n}(\omega) Q_1(\lambda_n^2, \omega^2),$$

$$b_n(\omega) = \rho_0 h P_{2n}(\omega^2) \varepsilon_{1n}(k_1) \kappa_{1n}(\omega^2) k_2^2 + (\lambda k_1^2 + \rho \omega^2) (k_2^2 - 2\lambda_n^2) Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) + a_n(\omega),$$

$$S_{1n}(\omega) = -\rho \omega^2 (k_2^2 - 2\lambda_n^2) - 4\mu \varepsilon_{1n}(k_1) \varepsilon_{1n}(k_2) \lambda_n^2 \kappa_{1n}(\omega^2) \kappa_{2n}(\omega^2),$$

$$\varepsilon_{1n}(k_j, \lambda_n) = \begin{cases} i, & \lambda_n < k_j, \\ 1, & \lambda_n > k_j. \end{cases}$$

Тогда на основании формул (1) и (2) становится возможным определить модуль виброускорения и его компоненты.

В качестве примера рассмотрим пластину, имеющую размеры  $l = 5$  м,  $h = 0.1$  м, изготовленную из стали Ст0 с плотностью  $\rho_0 = 7859$  кг/м<sup>3</sup>, модулем Юнга  $E_0 = 2 \cdot 10^5$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu_0 = 0.28$ . Материалом сред

“1” и “2” принимается насыпной уплотненный со степенью влажности 0.5 грунт с модулем Юнга  $E = 10^2$  МПа, плотностью  $\rho = 1600$  кг/м<sup>3</sup> [10].

Результаты расчетов модуля поля виброускорения в различных точках грунта представлены на рис. 2. Из рисунка видно, что значительное уменьшение величины модуля виброускорения происходит по мере удаления от границы пластины. Для более детального анализа на рис. 3 приведены совместные графики виброускорений в различных точках грунта.

Как известно, наибольшую опасность для фундаментов зданий и сооружений представляют низкие частоты. В соответствии с [10, 11] оценка вибрации проводится в октавных полосах со среднегеометрическими частотами 16, 31.5 и 63 Гц. На рис. 3 приведена зависимость модуля поля виброускорения в грунте на поверхности пластины при  $z = 0$  м и на расстоянии  $z = 10$  м в диапазоне частот от 20 до 300 Гц. Как видно из графиков, значения модуля виброускорения на расстоянии  $z = 10$  м от преграды становятся меньше в 1000 раз по сравнению со значениями при  $z = 0$  м. При этом первое максимальное значение модуля виброускорения, соответствующее собственным частотам пластины, возникает при частоте более 100 Гц, что исключает совпадения с указанными выше опасными частотами.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-38-50025 мол\_нр).

#### Литература

1. *Utek A.* Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves: PhD Thesis. – Illinois: Ill. Inst. Technol., 1973.
2. *Костров Б.В.* Движение жесткой массивной полосы, впаивной в упругую среду, под действием плоской волны // Прикл. матем. и механика. – 1964. – Т. 28, № 1. – С. 99–110.
3. *Рылько М.А.* О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1977. – № 1. – С. 158–164.
4. *Вялов С.С.* Вопросы теории деформируемости связных грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1966. – Вып. 3. – С. 1–4.
5. *Рахматулин Х.А., Сунчалиева Л.М.* Упругие и упругопластические свойства грунта при динамических нагрузках на фундамент. – Деп. в ВИНТИ 1983. № 4149-83.
6. *Бережной Д.В., Коноплев Ю.Г., Паймушин В.Н., Секаева Л.Р.* Исследование взаимодействия бетонного коллектора с сухими и водонасыщенными грунтами // Труды Всерос. науч. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара: СамГТУ, 2004. – Ч. 1: Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. – С. 37–39.
7. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
8. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
10. Свод правил по проектированию и строительству СП 23-105-2004 «Оценка вибрации при проектировании и строительстве и эксплуатации объектов метрополитена». – М.: Госстрой России, 2004. – 50 с.

11. Хекл М., Мюллер Г. Справочник по технической акустике. – Л.: Судостроение, 1980. – 440 с.

Поступила в редакцию  
28.12.16

---

**Локтева Наталья Александровна**, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия

E-mail: *nlok@rambler.ru*

**Паймушин Виталий Николаевич**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник; профессор кафедры прочности конструкций

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

**Сердюк Дмитрий Олегович**, ассистент кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия

E-mail: *d.serduk55@gmail.com*

**Тарлаковский Дмитрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия

E-mail: *tdvhome@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 1, pp. 64–74

### The Interaction between the Plane Wave and the Plate with Limited Height in Soil

*N.A. Lokteva<sup>a\*</sup>, V.N. Paimushin<sup>b,c\*\*</sup>, D.O. Serdyuk<sup>a\*\*\*</sup>, D.V. Tarlakovskii<sup>d\*\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

<sup>b</sup>*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

<sup>c</sup>*Tupolev Kazan National Research Technological University, Kazan, 420111 Russia*

<sup>d</sup>*Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

E-mail: <sup>\*</sup>*nlok@rambler.ru*, <sup>\*\*</sup>*vpajmushin@mail.ru*,

<sup>\*\*\*</sup>*d.serduk55@gmail.com*, <sup>\*\*\*\*</sup>*tdvhome@mail.ru*

Received December 28, 2016

#### Abstract

A solution of the two-dimensional task on interaction between the harmonic wave and the plate with the limited height in soil has been provided. The plate surrounded on both sides with the half-spaces filled with soil medium has been used as a vibro-absorbing obstacle. The mechanical behavior of the plate has been described by S.P. Timoshenko's shift model and the mechanical behavior of soil by a linear elasticity theory equation. The main purpose of the paper is to determine the total acceleration vector field induced by the penetrated and radiated waves in the second half-space. The mathematical formulation of the task includes a model of upcoming wave, soil medium and plate movement equation, infinity conditions, and conditions of soil contact with obstacle. Conditions of free slip have been taken as the contact conditions between the soil and the obstacle. We have considered a closed system of equations, which includes wave equations for scalar and vector potentials, elasticity theory equations for soil mediums, Koshi's relations, physical law, and plate movement equation. The boundary conditions for the plate correspond to a hinged support. To solve this task, all functions have been expanded in trigonometric series that allowed to obtain potential values in the coefficients of the series. To define the integrations constants, the contact conditions between the obstacle and soil have been used. On the basis of the revealed potentials, we have defined displacements on the boundary between the plate and soil and in other points of the second half-space. The vibro-absorbing properties of the plate have been investigated depending on the frequency of the harmonic wave falling on the plate. From the practical point of view, this task is related to protection of buildings from vibrations formed at a distance from underground railways.

**Keywords:** soil, plate, S.P. Timoshenko's model, harmonic wave, oscillation frequency, vibration absorption, vibration acceleration

**Acknowledgments.** This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-38-50025 mol\_nr).

#### Figure Captions

Fig. 1. A model of interaction between the plate and soil.

Fig. 2. The dependence of the vibration acceleration field module: 1 – on the plate surface at  $z = 0$  m; 2 – in the soil at  $z = 10$  m.

Fig. 3. The dependence of the vibration acceleration field module at  $\omega = 20 \div 300$  Hz: 1 – on the plate surface at  $z = 0$  m; 2 –  $a \times 10^3$  in the soil at  $z = 10$  m.

## References

1. Umek A. Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves. *PhD Thesis*. Illinois, Ill. Inst. Technol., 1973.
2. Kostrov B.V. Motion of a rigid massive wedge inserted into an elastic medium under the effect of plane wave. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1964, vol. 28, no. 1, pp. 99–110. (In Russian)
3. Ryl'ko M.A. On the motion of a rigid rectangular insertion under the effect of plane wave. *Mekh. Tverd. Tela*, 1977, no. 1, p. 158–164. (In Russian)
4. Vyalov S.S. Problems in the theory of deformability of cohesive soils. *Osn., Fundam. Mekh. Gruntov*, 1966, no. 3, pp. 1–4. (In Russian)
5. Rakhmatulin Kh.A., Sunchalieva L.M. Elastic and elastoplastic properties of the ground upon dynamic loads on the foundation. Dep. in VINITI, 1983, no. 4149-83. (In Russian)
6. Berezhnoi D.V., Konoplev Yu.G., Paimushin V.N., Sekaeva L.R. Investigation of the interaction between concrete collector and dry and waterlogged grounds. *Trudy Vseros. nauch. konf. "Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi"* [Proc. All-Russ. Sci. Conf. "Mathematical Simulation and Boundary Value Problems"]. Part 1. Mathematical Models of Mechanics, Strength and Reliability of Structures. Samara, SamGTU, 2004, pp. 37–39. (In Russian)
7. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. Waves in Continuum Media. Moscow, FIZMATLIT, 2004. 472 p. (In Russian)
8. Timoshenko S.P., Goodier J. Theory of Elasticity. Moscow, Nauka, 1975. 576 p. (In Russian)
9. Sheddon I. Fourier Transforms. New York, McGraw Hill, 1951. 542 p.
10. Set of Regulations on Design and Construction. SR no. 23-105-2004. Assessing Vibration during Design and Construction and Exploitation of Underground Objects. Moscow, Gosstroj Ross., 2004. 50 p. (In Russian)
11. Taschenbuch der Technischen Akustik. Müller, G., Heckl, M. (Hrsg.). Berlin, Heidelberg, New York, Springer. 1975. 329 S. (In German)

---

⟨ **Для цитирования:** Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В. Взаимодействие плоской гармонической волны с ограниченной по высоте пластиной в грунте // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 64–74. ⟩

⟨ **For citation:** Lokteva N.A., Paimushin V.N., Serdyuk D.O., Tarlakovskii D.V. The interaction between the plane wave and the plate with limited height in soil. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 64–74. (In Russian) ⟩