ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 3 (454)

УДК 517.988.8

*Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ*

# К АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений можно выделить два основных направления. В *общей теории приближенных методов* Л.В. Канторовича [1], [2] и ее модификации, предложенной в [3], основное внимание уделяется условиям, при которых разрешимость аппроксимирующего уравнения следует из разрешимости точного уравнения. Такой подход естественно использовать при теоретическом обосновании численных методов решения интегральных уравнений. Другое направление возникло при исследовании разностных схем для дифференциальных уравнений (напр., [4]), оно основано на понятии устойчивости последовательности операторов, аппроксимирующих заданный оператор. Устойчивость аппроксимирующих операторов используется также как основа общей теории численных методов в [5]. В рамках *абстрактной приближенной схемы* В.А. Треногина ([6], гл. VII) теория разностных схем, приближенные методы типа Галёркина и некоторые другие задачи рассматриваются с единой точки зрения.

В данной статье построена абстрактная теория приближенных методов решения линейных уравнений, позволяющая на общей основе получить и дополнить основные утверждения общей теории приближенных методов и теории абстрактных приближенных схем. Используемые обозначения и терминология наиболее близки к принятым в [6].

## 1. Операторы и пространства. Априорные оценки погрешности

Пусть $X$, $Y$, $\overline{X}$, $\overline{Y}$ — нормированные пространства, $A : X \to Y$, $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y}$ — линейные (определенные на линейных многообразиях, аддитивные и однородные) операторы. Будем рассматривать операторные уравнения

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{1}$$

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{y}, \quad \overline{x} \in \overline{X}, \quad \overline{y} \in \overline{Y}. \tag{2}$$

Оператор $A$ и уравнение (1) будем называть *точными*, а оператор $\overline{A}$ и уравнение (2) — *аппроксимирующими* (аппроксимирующими точные). Пока не предполагается, что операторы $A$ и $\overline{A}$ обратимы или, например, ограничены.

Пусть заданы линейные операторы $T_X : X \to \overline{X}$ и $S_X : \overline{X} \to X$, причем такие, что

$$T_X S_X = I_{\overline{X}}. \tag{3}$$

Это значит, что оператор $S_X$ имеет левый обратный, т.е. $N(S_X) = \{0\}$, и оператор $T_X$ имеет правый обратный, т. е. $R(T_X) = \overline{X}$. Аналогично, пусть заданы операторы $T_Y : Y \to \overline{Y}$ и $S_Y : \overline{Y} \to Y$, причем такие, что

$$T_Y S_Y = I_{\overline{Y}}. \tag{4}$$

Будем называть операторы $T_X$ и $T_Y$ операторами *аппроксимации*, а операторы $S_X$ и $S_Y$ — операторами *интерполяции*. Будем считать, что $D(T_X) = X$, $D(S_X) = \overline{X}$, $D(T_Y) = Y$, $D(S_Y) = \overline{Y}$.

Дополнительные предположения о свойствах операторов аппроксимации и интерполяции будут сделаны ниже.

Для оценки близости элементов $x$ и $\overline{x}$, $y$ и $\overline{y}$, принадлежащих различным пространствам, определим погрешности: $S$*-погрешность* решения $\|x - S_X\overline{x}\|_X$, $T$*-погрешность* решения $\|T_X x - \overline{x}\|_{\overline{X}}$, $S$*-погрешность* правой части $\|y - S_Y\overline{y}\|_Y$ и $T$*-погрешность* правой части $\|T_Y y - \overline{y}\|_{\overline{Y}}$.

**Лемма 1.** а) *Если оператор* $T_X$ *ограничен, то*

$$\|T_X x - \overline{x}\|_{\overline{X}} \le \|T_X\|\,\|x - S_X\overline{x}\|_X; \tag{5}$$

б) *если оператор* $T_Y$ *ограничен, то*

$$\|T_Y y - \overline{y}\|_{\overline{Y}} \le \|T_Y\|\,\|y - S_Y\overline{y}\|_Y; \tag{6}$$

в) *если оператор* $S_X$ *ограничен, то*

$$\|x - S_X\overline{x}\|_X \le \|S_X\|\,\|T_X x - \overline{x}\|_{\overline{X}} + \|(S_X T_X - I)x\|_X; \tag{7}$$

г) *если оператор* $S_Y$ *ограничен, то*

$$\|y - S_Y\overline{y}\|_Y \le \|S_Y\|\,\|T_Y y - \overline{y}\|_{\overline{Y}} + \|(S_Y T_Y - I)y\|_Y. \tag{8}$$

**Доказательство.** а) $T_X x - \overline{x} = T_X x - T_X S_X\overline{x} = T_X(x - S_X\overline{x})$.
в) $x - S_X\overline{x} = x - S_X T_X x + S_X T_X x - S_X\overline{x} = (I - S_X T_X)x + S_X(T_X x - \overline{x})$.
Неравенства (6) и (8) доказываются аналогичным способом. □

Множества $\widetilde{X} = S_X(\overline{X}) \subset X$ и $\widetilde{Y} = S_Y(\overline{Y}) \subset Y$ являются подпространствами пространств $X$ и $Y$, эквивалентными пространствам $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ соответственно (изоморфными, если операторы аппроксимации и интерполяции ограничены). При этом сужения операторов $T_X$ и $T_Y$ на $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ являются двусторонними обратными к операторам $S_X$ и $S_Y$, рассматриваемым как операторы из $\overline{X}$ на $\widetilde{X}$ и из $\overline{Y}$ на $\widetilde{Y}$ соответственно.

Операторы $P_X = S_X T_X$ и $P_Y = S_Y T_Y$ таковы, что в силу (3) и (4) $P_X^2 = P_X$, $P_Y^2 = P_Y$. Таким образом, $P_X$ и $P_Y$ — проекторы из $X$ в $\widetilde{X}$ и из $Y$ в $\widetilde{Y}$ соответственно.

Получим априорные оценки погрешности приближенного решения, не делая пока никаких предположений об обратимости операторов.

**Теорема 1.** *Пусть* $x \in D(A)$, $\overline{x} \in D(\overline{A})$ *и* $y = Ax$, $\overline{y} = \overline{A}\overline{x}$. *Если* $S_X\overline{x} \in D(A)$, $x - S_X\overline{x} \notin N(A)$ *и оператор* $S_Y$ *ограничен, то*

$$\begin{aligned}\exists M > 0 \mid \|x - S_X\overline{x}\|_X \le M\{&\|S_Y\|\,\|T_Y y - \overline{y}\|_{\overline{Y}} + \|S_Y\|\,\|(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}\|_{\overline{Y}} + \\ &+ \|(S_Y T_Y - I)\,A\,(x - S_X\overline{x})\|_Y\}.\end{aligned} \tag{9}$$

**Доказательство.** Так как $0 \in N(A)$, то $x - S_X\overline{x} \ne 0$. Обозначим

$$M = \|x - S_X\overline{x}\|_X \,/\, \|A(x - S_X\overline{x})\|_Y.$$

Тогда $\|x - S_X\overline{x}\|_X = M\|A(x - S_X\overline{x})\|_Y$, при этом $A(x - S_X\overline{x}) = A(x - S_X\overline{x}) - S_Y T_Y A(x - S_X\overline{x}) + S_Y T_Y y - S_Y\overline{y} + S_Y\overline{A}\overline{x} - S_Y T_Y A S_X\overline{x}$.

**Замечание 1.** Неравенство (9) показывает, что элемент $\widetilde{x} = S_X\overline{x}$ будет близким к точному решению $x$, если 1) близки правые части уравнений (1) и (2); 2) близки операторы $A$ и $\overline{A}$; 3) оператор $S_Y T_Y$ близок к тождественному. Здесь под близостью двух элементов в каждом случае подразумевается малость соответствующей нормы из правой части неравенства (9). Если оператор $S_Y T_Y - I$ ограничен (как отмечается в ([3], с. 12), в конкретных случаях это имеет место даже тогда, когда оператор $S_Y T_Y$ неограничен) и $\|S_Y T_Y - I\| < 1$ , то из (9) следует, что

$$\|x - S_X\overline{x}\|_X \le \frac{M\,\|S_Y\|}{1 - \|S_Y T_Y - I\|}\,(\|T_Y y - \overline{y}\|_{\overline{Y}} + \|(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}\|_{\overline{Y}}). \tag{10}$$

**Замечание 2.** Если оператор $A$ имеет ограниченный левый обратный, т. е. $\exists m_0 > 0 \mid \|Ax\| \geq m_0\|x\| \ \forall x \in D(A)$, то можно в (10) заменить $M$ на $1/m_0$. При этом $N(A) = 0$, и условие $x - S_X\overline{x} \notin N(A)$ становится лишним, т. к. при $x - S_X\overline{x} = 0$ неравенство (9) выполняется при любом $M > 0$. Если, кроме того, оператор $A^{-1}$ существует и ограничен, то можно выбрать $m_0 = \|A^{-1}\|$.

**Теорема 2.** *Пусть $x \in D(A)$, $\overline{x} \in D(\overline{A})$ и $y = Ax$, $\overline{y} = \overline{A}\overline{x}$. Если $T_X x \in D(\overline{A})$, $T_X x - \overline{x} \notin N(\overline{A})$ и оператор $T_Y$ ограничен, то*

$$\exists M > 0 \mid \|T_X x - \overline{x}\|_{\overline{X}} \leq M\{\|T_Y y - \overline{y}\|_{\overline{Y}} + \|T_Y\| \, \|(A - S_Y\overline{A}T_X)x\|_Y\}. \tag{11}$$

**Доказательство.** Пусть $M = \frac{\|T_X x - \overline{x}\|_{\overline{X}}}{\|\overline{A}(T_X x - \overline{x})\|_{\overline{Y}}}$. Тогда $\|T_X x - \overline{x}\|_{\overline{X}} = M\|\overline{A}(T_X x - \overline{x})\|_{\overline{Y}}$, при этом $\overline{A}(T_X x - \overline{x}) = T_Y S_Y \overline{A} T_X x - T_Y A x + T_Y y - \overline{y}$ . Если оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный обратный, то можно выбрать $M = 1/\|\overline{A}^{-1}\|$ . При этом нет необходимости предполагать, что $T_X x - \overline{x} \notin N(\overline{A})$.

Хотя постоянная $M$ в неравенствах (9) и (11) в общем случае зависит от $x$ и $\overline{x}$, правые части этих неравенств показывают, какие величины определяют близость решений уравнений (1) и (2).

## 2. Условия обратимости операторов. Оценка невязки

Исследуем условия, при которых из единственности решения одного из уравнений (1) и (2) следует единственность решения другого. При оценках снизу норм элементов будут часто использоваться два простых неравенства: $\|x\| \geq \|y\| - \|x - y\|$ и $\|x\| \geq \|Ax\|/\|A\|$ ($\|A\| \neq 0$).

**Теорема 3.** *Пусть $S_X\overline{x} \in D(A) \ \forall \overline{x} \in D(\overline{A})$, операторы $S_Y$ и $T_X$ ограничены. Пусть оператор $A$ имеет ограниченный левый обратный, т. е.*

$$\exists m_0 > 0 \mid \|Ax\| \geq m_0\|x\| \quad \forall x \in D(A), \tag{12}$$

*и выполняются условия*

$$\|(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}\|_{\overline{Y}} \leq m_1\|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}), \tag{13}$$

$$\|(S_Y T_Y - I) A S_X \overline{x}\|_Y \leq m_2\|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}), \tag{14}$$

*причем постоянные $m_1$ и $m_2$ не зависят от $\overline{x}$. Если*

$$(m_1\|S_Y\| + m_2)\,\|T_X\| < m_0,$$

*то оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный левый обратный.*

**Доказательство.** Пусть $\overline{x} \in D(\overline{A})$. Оценим $\|\overline{A}\overline{x}\|_{\overline{Y}} \geq \|T_Y A S_X \overline{x}\|_{\overline{Y}} - \|(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}\|_{\overline{Y}}$; здесь

$$\|T_Y A S_X \overline{x}\|_{\overline{Y}} \geq \frac{1}{\|S_Y\|}\|S_Y T_Y A S_X \overline{x}\|_Y \geq \frac{1}{\|S_Y\|}(\|A S_X \overline{x}\|_Y - \|(S_Y T_Y - I) A S_X \overline{x}\|_Y)$$

и

$$\|A S_X \overline{x}\|_Y \geq m_0\|S_X\overline{x}\|_{\overline{X}} \geq \frac{m_0}{\|T_X\|}\|T_X S_X \overline{x}\|_{\overline{X}} = \frac{m_0}{\|T_X\|}\|\overline{x}\|.$$

Окончательно имеем

$$\|\overline{A}\overline{x}\|_{\overline{Y}} \geq \left(\frac{1}{\|S_Y\|}\left(\frac{m_0}{\|T_X\|} - m_2\right) - m_1\right)\|\overline{x}\|_{\overline{X}} = m\|\overline{x}\|,$$

где

$$m = \frac{m_0 - (m_1\|S_Y\| + m_2)\,\|T_X\|}{\|S_Y\|\,\|T_X\|} > 0. \quad \square$$

**Замечание.** Если область определения оператора $B : X \to Y$ не совпадает с $X$ или не является плотным в $X$ множеством, то из неравенства $\|Bx\| \le \text{const}\,\|x\|\ \forall x \in D(B)$ не следует, что норма оператора $B$ ограничена (хотя бы потому, что эта норма может и не быть определена). По этой причине условия (13) и (14) теоремы 3 сформулированы именно в такой форме. Стоящие в их левых частях выражения содержатся в правой части неравенства (9).

**Следствие.** Если условия теоремы 3 выполнены и имеют смысл нормы операторов $A^{-1}$ и $\overline{A}^{-1}$, то

$$\|\overline{A}^{-1}\| \le \frac{\|S_Y\|\,\|T_X\|\,\|A^{-1}\|}{1-(m_1\|S_Y\|+m_2)\,\|T_X\|\,\|A^{-1}\|}.$$

**Теорема 4.** *Пусть* $T_X x \in D(\overline{A})\ \forall x \in D(A)$, *операторы* $S_X$ *и* $T_Y$ *ограничены. Пусть оператор* $\overline{A}$ *имеет ограниченный левый обратный, т. е.*

$$\exists m_0 > 0 \ \mid\ \|\overline{A}\overline{x}\| \ge m_0\|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}),$$

*и выполняются условия*

$$\|(A - S_Y\overline{A}T_X)x\|_Y \le m_1\|x\| \quad \forall x \in D(A),$$
$$\|(S_XT_X - I)x\|_X \le m_2\|x\| \quad \forall x \in D(A),$$

*причем постоянные* $m_1$ *и* $m_2$ *не зависят от* $x$. *Если*

$$m_1\|S_X\|\,\|T_Y\| < m_0(1-m_2),$$

*то оператор* $A$ *имеет ограниченный левый обратный.*

**Доказательство.** Пусть $x \in D(A)$. Оценим $\|Ax\|_Y \ge \|S_Y\overline{A}T_Xx\|_Y - \|(A - S_Y\overline{A}T_X)x\|_Y$; здесь

$$\|S_Y\overline{A}T_Xx\|_Y \ge \frac{1}{\|T_Y\|}\|\overline{A}T_Xx\|_Y \ge \frac{m_0}{\|T_Y\|}\|T_Xx\|_{\overline{X}} \ge \frac{m_0}{\|T_Y\|\,\|S_X\|}\|S_XT_Xx\|_X$$

и $\|S_XT_Xx\|_X \ge \|x\| - \|(I - S_XT_X)x\|_X$. Окончательно получим

$$\|Ax\|_Y \ge \left(\frac{m_0}{\|T_Y\|\,\|S_X\|}(1-m_2) - m_1\right)\|x\| = m\|x\|,$$

где

$$m = \frac{m_0(1-m_2) - m_1\|T_Y\|\,\|S_X\|}{\|T_Y\|\,\|S_X\|} > 0. \quad \square$$

**Следствие.** Если условия теоремы 4 выполнены и имеют смысл нормы операторов $A^{-1}$ и $\overline{A}^{-1}$, то

$$\|A^{-1}\| \le \frac{\|T_Y\|\,\|S_X\|\,\|\overline{A}^{-1}\|}{1-m_2-m_1\|T_Y\|\,\|S_X\|\,\|\overline{A}^{-1}\|}.$$

**Замечание.** Утверждения теорем 2 и 4 можно было бы получить из утверждений теорем 1 и 3, если переставить местами точные и аппроксимирующие пространства и их элементы, точный и аппроксимирующий оператор, а также операторы аппроксимации и интерполяции. Некоторые отличия в оценках норм связаны с тем, что операторы аппроксимации и интерполяции не коммутируют.

Рассмотрим приближенный метод решения уравнения (1):
1) по $y \in R(A) \subset Y$ находим $\overline{y} = T_Yy \in \overline{Y}$;
2) решая уравнение (2), находим $\overline{x} \in \overline{X}$;
3) по $\overline{x}$ находим $\widetilde{x} = S_X\overline{x} \in X$.
Будем называть $\widetilde{x} = S_X\overline{x}$ *приближенным* решением уравнения (1).

Проблема состоит в том, что в общем случае из $y \in R(A)$ не следует $\overline{y} = T_Y y \in R(\overline{A})$, т. е. из того, что существует решение точного уравнения с правой частью $y$ не следует, что существует решение аппроксимирующего уравнения с правой частью $T_Y y$.

Если же пространства $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ конечномерные и имеют одну и ту же размерность (см. условие A ([3], с. 8)), то из единственности решения аппроксимирующего уравнения (2) следует его существование. Именно такой случай наиболее часто встречается на практике. В бесконечномерном случае аналогичное утверждение также справедливо, если $\overline{A}$ — оператор Фредгольма или оператор, для которого выполняется хотя бы только альтернатива Фредгольма.

Заметим, что в реальных условиях уравнение (2) будет решаться численно. Тогда в качестве $\overline{x}$ будет найдено не само решение аппроксимирующего уравнения, а только близкий к нему элемент пространства $\overline{X}$.

Оценка невязки уравнения (1) на приближенном решении позволяет рассматривать аппроксимирующее уравнение как некорректную задачу.

**Лемма 2.** а) *Если* $x \in D(A)$, $\overline{x} = T_X x \in D(\overline{A})$, $\overline{y} = T_Y y$ *и оператор* $S_Y$ *ограничен, то*

$$\|Ax - y\|_Y \le \|(A - S_Y \overline{A} T_X)x\|_Y + \|S_Y\| \, \|\overline{A}\overline{x} - \overline{y}\|_{\overline{Y}} + \|(S_Y T_Y - I)y\|_Y; \tag{15}$$

б) *если* $\overline{x} \in D(\overline{A})$, $x = S_X \overline{x} \in D(A)$, $\overline{y} = T_Y y$ *и оператор* $T_X$ *ограничен, то*

$$\|\overline{A}\overline{x} - \overline{y}\|_{\overline{Y}} \le \|(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}\|_{\overline{Y}} + \|T_Y\| \, \|A(S_X T_X - I)x\|_Y + \|T_Y\| \, \|Ax - y\|_Y.$$

Доказательство этих неравенств сводится к простому преобразованию разностей $Ax - y$ и $\overline{A}\overline{x} - \overline{y}$.

Предположим, что достаточно близки операторы $\overline{A}$ и $A$ и проектор $S_Y T_Y$ достаточно близок к тождественному оператору (в смысле замечания 1 к теореме 1). Запишем неравенство (15) при $x = S_X \overline{x}$. Тогда невязка точного уравнения будет мала, если только мала невязка аппроксимирующего уравнения. Следовательно, можно в качестве элемента $\overline{x}$, через который определяется приближенное решение $\widetilde{x} = S_X \overline{x}$ уравнения (1), взять квазирешение уравнения (2). При этом в правых частях неравенств (9) или (11) также будет присутствовать невязка аппроксимирующего уравнения. Неравенство (15) можно использовать и в том случае, когда само уравнение (1) является некорректно поставленной задачей.

При достаточно жестких условиях из существования решения точного уравнения следует существование решения аппроксимирующего уравнения.

**Теорема 5.** *Пусть* $D(A) = X$, $D(\overline{A}) = \overline{X}$ *и оператор* $A$ *непрерывно обратим. Если*

$$\|S_Y \overline{A} T_X - A\| < 1/\|A^{-1}\|, \tag{16}$$

*то оператор* $\overline{A}$ *также непрерывно обратим.*

**Доказательство.** Из (16) следует, что оператор $S_Y \overline{A} T_X$ непрерывно обратим ([6], п. 12.5, с. 142, следствие к теореме).

Пусть $\overline{y} \in \overline{Y}$. Так как $R(T_Y) = \overline{Y}$, то $\exists y \in Y \mid T_Y y = \overline{y}$. Поскольку $R(S_Y \overline{A} T_X) = Y$, то $\exists x \in X \mid S_Y \overline{A} T_X x = y$ или $\overline{A}\overline{x} = \overline{y}$, где $\overline{x} = T_X x$. Следовательно, $R(\overline{A}) = \overline{Y}$.

Пусть $\overline{x} \in \overline{X}$. Так как $R(T_X) = \overline{X}$, то $\exists x \in X \mid T_X x = \overline{x}$, причем $x \in D(A) = X$ и $\|\overline{x}\| \le \|T_X\| \, \|x\|$. Тогда

$$\|\overline{A}\overline{x}\|_{\overline{Y}} \ge \frac{1}{\|S_Y\|} \|S_Y \overline{A} T_X x\|_Y \ge \frac{1}{\|S_Y\|} (\|Ax\|_Y - \|(S_Y \overline{A} T_X - A)x\|_Y) \ge$$
$$\ge \frac{1}{\|S_Y\|} \left( \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|S_Y \overline{A} T_X - A\| \right) \|x\| \ge m \, \|\overline{x}\|,$$

где

$$m = \left( \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|S_Y \overline{A} T_X - A\| \right) \frac{1}{\|S_Y\| \, \|T_X\|} > 0. \quad \square$$

**Замечание 1.** Из $R(S_Y\overline{A}T_X) = Y$ следует, что $R(S_Y) = Y$. Тогда имеет место взаимнооднозначное соответствие между элементами пространств $Y$ и $\overline{Y}$, и элементы $\overline{Y}$ уже фактически не аппроксимируют элементы $Y$.

**Замечание 2.** Утверждение о том, что из разрешимости аппроксимирующего уравнения при любой правой части следует разрешимость точного уравнения при любой правой части, также не может быть справедливым, пока пространство $\overline{Y}$ эквивалентно не всему пространству $Y$, а только его части $\widetilde{Y}$.

## 3. Сходимость приближенной схемы

Чтобы исследовать сходимость приближенного метода и оценить скорость сходимости, построим последовательность приближенных решений операторного уравнения.

Пусть заданы последовательности аппроксимирующих пространств $\overline{X}^{(n)}$, $\overline{Y}^{(n)}$, операторов $\overline{A}^{(n)} : \overline{X}^{(n)} \to \overline{Y}^{(n)}$, аппроксимирующих уравнений

$$\overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)} = \overline{y}^{(n)}, \quad \overline{x}^{(n)} \in \overline{X}^{(n)}, \quad \overline{y}^{(n)} \in \overline{Y}^{(n)}, \tag{17}$$

операторов аппроксимации $S_X^{(n)}$, $S_Y^{(n)}$ и операторов интерполяции $T_X^{(n)}$, $T_Y^{(n)}$. Следуя ([6], гл. VII), последовательность уравнений (17) назовем *приближенной схемой*.

Из теоремы 3 непосредственно следует

**Теорема 6.** *Пусть* $S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)} \in D(A)$ $\forall\,\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$, $\forall n \ge n_0$, *операторы* $S_Y^{(n)}$ *и* $T_X^{(n)}$ *ограничены в совокупности. Пусть оператор* $A$ *имеет ограниченный левый обратный, т. е. выполняется условие* (12), *и*

$$\|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)}AS_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\|_{\overline{Y}^{(n)}} \le m_1^{(n)}\|\overline{x}^{(n)}\| \quad \forall\,\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}),$$
$$\|(S_Y^{(n)}T_Y^{(n)} - I)AS_X^{(n)}\overline{x}^{(n)}\|_Y \le m_2^{(n)}\|\overline{x}^{(n)}\| \quad \forall\,\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}).$$

*Если*

$$(m_1^{(n)}\,\|S_Y^{(n)}\| + m_2^{(n)})\,\|T_X^{(n)}\| < m_0, \quad n \ge n_0, \tag{18}$$

*то* $\forall n \ge n_0$ *операторы* $\overline{A}^{(n)}$ *имеют ограниченные левые обратные.*

**Замечание.** Если $\lim_{n\to\infty} m_1^{(n)} = 0$, $\lim_{n\to\infty} m_2^{(n)} = 0$, то выполняется условие (18).

Последовательность операторов $\overline{A}^{(n)}$ называется *устойчивой*, если $\exists m > 0 \quad | \quad \forall n \ge n_0$ $\|\overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}\| \ge m\|\overline{x}^{(n)}\|$ $\forall\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$. Из условия устойчивости следует, что, начиная с некоторого номера $n_0$, операторы $\overline{A}^{(n)}$ имеют ограниченные левые обратные. Тогда при $n \ge n_0$ любое аппроксимирующее уравнение может иметь только единственное решение.

**Следствие.** Если выполнены условия теоремы 6 и, кроме того,

$$\exists\varepsilon > 0 \;\;|\;\; (m_1^{(n)}\,\|S_Y^{(n)}\| + m_2^{(n)})\,\|T_X^{(n)}\| \le m_0 - \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$$

и последовательности $\|S_Y^{(n)}\|$, $\|T_X^{(n)}\|$ ограничены снизу, то последовательность операторов $\overline{A}^{(n)}$ устойчива.

Действительно, утверждение о существовании левых обратных операторов к операторам $\overline{A}^{(n)}$ основано (см. доказательство теоремы 3) на неравенствах $\|\overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}\|_{\overline{Y}^{(n)}} \ge m^{(n)}\|\overline{x}^{(n)}\|$ $\forall\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$, где $m^{(n)} = \frac{m_0 - (m_1^{(n)}\,\|S_Y^{(n)}\| + m_2^{(n)})\,\|T_X^{(n)}\|}{\|S_Y^{(n)}\|\,\|T_X^{(n)}\|}$. Существование $m = \inf m^{(n)} > 0$ обеспечивают дополнительные предположения.

Перенос утверждения теоремы 4 на рассматриваемый случай не представляет особого интереса: если хотя бы при одном фиксированном $n$ условия теоремы 4 выполнены, то оператор $A$ имеет ограниченный левый обратный.

Будем говорить, что последовательность элементов $\overline{x}^{(n)} \in \overline{X}^{(n)}$ *$S$-сходится* к элементу $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|x - S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)}\|_X = 0,$$

или последовательность $\overline{x}^{(n)}$ *$T$-сходится* к $x$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|T_X^{(n)}x - \overline{x}^{(n)}\|_{\overline{X}^{(n)}} = 0.$$

Аналогично вводятся понятия $S$- и $T$-сходимости последовательностей элементов $\overline{y}^{(n)} \in \overline{Y}^{(n)}$ к элементу $y \in Y$. Отметим, что последовательности $\overline{x}^{(n)}$ и $\overline{y}^{(n)}$ составлены из элементов, принадлежащих различным пространствам.

**Лемма 3.** а) *Если операторы $T_X^{(n)}$ ограничены в совокупности, то из $S$-сходимости последовательности $\overline{x}^{(n)}$ к $x$ следует ее $T$-сходимость к $x$;*

б) *если операторы $S_X^{(n)}$ ограничены в совокупности и*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_x^{(n)}T_X^{(n)}x - x\| = 0, \tag{19}$$

*то из $T$-сходимости последовательности $\overline{x}^{(n)}$ к $x$ следует ее $S$-сходимость к $x$. Аналогичные утверждения имеют место для последовательности $\overline{y}^{(n)}$.*

Для доказательства достаточно воспользоваться неравенствами (5)–(8). Условие (19) выполняется, если последовательность операторов $S_X^{(n)}T_X^{(n)}$ сильно сходится к тождественному оператору.

**Замечание.** Если одновременно ограничены в совокупности операторы $T_X^{(n)}$ и $S_X^{(n)}$ и выполнено условие (19) равномерно относительно $x \in X$, то можно говорить просто о сходимости последовательности $\overline{x}^{(n)}$ к $x$, подразумевая под этим как $T$-сходимость, так и $S$-сходимость. Ограниченность в совокупности операторов $T_X^{(n)}$ следует из условия согласования норм [6].

Будем говорить, что последовательность операторов $\overline{A}^{(n)}$ *сильно $ST$-сходится* к оператору $A$, если последовательность операторов $S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)}$ сильно сходится к оператору $A$, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)})x\|_Y = 0 \quad \forall x \in D(A). \tag{20}$$

Аналогично, последовательность $\overline{A}^{(n)}$ *сильно $TS$-сходится* к оператору $A$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)}AS_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\|_{\overline{Y}^{(n)}} = 0 \quad \forall \overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)}). \tag{21}$$

Если в любом из двух рассмотренных случаев стремление к пределу равномерно (скорость сходимости не зависит от $x$ в (20) или от выбора последовательности $\overline{x}^{(n)}$ в (21)), то будем говорить о *равномерной $ST$- или $TS$-сходимости.*

Априорные оценки погрешности приближенного решения, полученные в теоремах 1 и 2, позволяют получить условия, при которых из сходимости последовательности правых частей аппроксимирующих уравнений к правой части точного уравнения следует сходимость последовательности решений аппроксимирующих уравнений к точному решению.

**Теорема 7.** *Пусть $x \in D(A)$, $\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$ и $y = Ax$, $\overline{y}^{(n)} = \overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}$, причем $S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)} \in D(A)$ $\forall n$. Если*

1) *оператор $A$ имеет ограниченный левый обратный;*
2) *хотя бы начиная с некоторого номера, решения $\overline{x}^{(n)}$ аппроксимирующих уравнений единственны;*

3) *последовательность* $\overline{y}^{(n)}$ $T$*-сходится к* $y$;

4) *последовательность* $\overline{A}^{(n)}$ *сильно* $TS$*-сходится к* $A$;

5) *последовательность* $S_Y^{(n)}T_Y^{(n)}$ *равномерно сходится к* $I_Y$;

6) *операторы* $S_Y^{(n)}$ *ограничены в совокупности,*

*то последовательность* $\overline{x}^{(n)}$ $S$*-сходится к* $x$.

**Доказательство.** Запишем неравенство (9) при произвольном $n$ (может быть, начиная с некоторого номера)

$$\|x - S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)}\|_X \le \frac{1}{m_0}\{\|S_Y^{(n)}\|\,\|T_Y^{(n)}y - \overline{y}^{(n)}\|_{\overline{Y}^{(n)}} + \\ + \|S_Y^{(n)}\|\,\|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)}AS_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\|_{\overline{Y}^{(n)}} + \|(S_Y^{(n)}T_Y^{(n)} - I)A(x - S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)})\|_Y\}$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$ (здесь $m_0$ — постоянная из неравенства (12)).

**Замечание.** Было бы достаточно вместо 4) и 5) предполагать, что только при рассматриваемых $x$ и $\overline{x}^{(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \|(\overline{A}^{(n)} - T_Y^{(n)}AS_X^{(n)})\overline{x}^{(n)}\|_{\overline{Y}^{(n)}} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \|(S_Y^{(n)}T_Y^{(n)} - I)A(x - S_X^{(n)}\overline{x}^{(n)})\|_Y = 0.$$

Если допустить, что аппроксимирующие уравнения разрешимы, но не однозначно, возможна ситуация, когда не выполняется неравенство (9).

**Теорема 8.** *Пусть* $x \in D(A)$, $\overline{x}^{(n)} \in D(\overline{A}^{(n)})$ *и* $y = Ax$, $\overline{Y}^{(n)} = \overline{A}^{(n)}\overline{x}^{(n)}$, *причем* $T_X^{(n)}x \in D(\overline{A}^{(n)})$ $\forall n$. *Если*

1) *последовательность операторов* $\overline{A}^{(n)}$ *устойчива*;

2) *последовательность* $\overline{y}^{(n)}$ $T$*-сходится к* $y$;

3) *последовательность* $\overline{A}^{(n)}$ *сильно* $TS$*-сходится к* $A$;

4) *операторы* $T_Y^{(n)}$ *ограничены в совокупности,*

*то последовательность* $\overline{x}^{(n)}$ $T$*-сходится к* $x$.

**Доказательство.** Запишем неравенство (11) при произвольном $n$ (может быть, начиная с некоторого номера)

$$\|T_X^{(n)}x - \overline{x}^{(n)}\|_{\overline{X}^{(n)}} \le M^{(n)}\{\|\overline{y}^{(n)} - T_Y^{(n)}y\|_{\overline{Y}^{(n)}} + \|T_Y^{(n)}\|\,\|(A - S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)})x\|_Y\}$$

и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Из условия устойчивости следует, что

$$\sup_n M^{(n)} = \sup_n \sup \frac{\|T_X^{(n)}x - \overline{x}^{(n)}\|_{\overline{X}^{(n)}}}{\|\overline{A}^{(n)}(T_X^{(n)}x - \overline{x}^{(n)})\|_{\overline{Y}^{(n)}}} = m.$$

Вместо 3) достаточно предполагать, что при рассматриваемом $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - S_Y^{(n)}\overline{A}^{(n)}T_X^{(n)})x\| = 0.$$

Полученные утверждения уточняют и дополняют известные результаты. Формулировки лемм 1 и 3 частично совпадают с соответствующими утверждениями из ([6], гл. VII). Теоремы 1 и 3 являются аналогами теорем 6 и 1 из ([3], гл. 1). Условия сходимости приближенного метода также близки к полученным в теории абстрактных приближенных схем.

## Литература


1. Канторович Л.В. *К общей теории приближенных методов анализа* // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60. – № 6. – С. 17–20.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
4. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем.* – М.: Наука, 1971. – 552 с.
5. Prössdorf S., Silbermann B. *Numerical analysis for integral and related operator equations.* – Berlin: Akad. Verlag, 1991. – 324 p.
6. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 486 с.



*Казанский государственный университет*



*Поступила*
30.10.1997