ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.988

И.П. РЯЗАНЦЕВА

НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОНОТОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть X — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, X^* — его сопряженное, $A : X \to X^*$ — непрерывный монотонный оператор, $D(A) = X$, уравнение

$$Ax = f \tag{1}$$

имеет в X непустое множество решений N, x^* — нормальное решение (1) (решение, имеющее минимальную норму). При этих предположениях не удается установить непрерывную зависимость решения (1) от возмущений A и f, поэтому следует считать задачу нахождения решения уравнения (1) некорректной и для ее решения применять какой-либо метод регуляризации. В последнее время возрос интерес к непрерывным методам решения некорректных задач, которые сводятся к решению задачи Коши для дифференциального уравнения некоторого порядка. Порядок дифференциального уравнения называется порядком непрерывного метода. Для случая, когда $X = H$ — гильбертово пространство, непрерывные методы изучены достаточно полно [1]–[6]. Для уравнения (1) с монотонным и аккретивным оператором A в банаховом пространстве сходимость непрерывного метода первого порядка изучалась в [7], [8] в предположении дифференцируемости оператора A. Следует отметить, что при исследовании сходимости непрерывного метода в банаховом пространстве существенную роль играют не только свойства оператора A, но и геометрические свойства пространств X и X^*. Цель данной статьи состоит в установлении достаточных условий сходимости непрерывного метода первого порядка в банаховом пространстве без предположения дифференцируемости монотонного оператора A.

Пусть $\delta_X(s)$ — модуль выпуклости пространства X. Предполагаем, что эта функция непрерывна и возрастает на $[0, 2]$, $\delta_X(0) = 0$ ([9], с. 49; [10]). Следовательно, существует обратная к ней функция $\delta_X^{-1}(\varepsilon)$.

Так как пространство X равномерно гладкое, то X^* также равномерно выпукло ([9], с. 34). Пусть $\delta_{X^*}(s)$ — модуль выпуклости X^*. Определим функцию $g_{X^*}(s) = \delta_{X^*}(s)/s$. Известно [10], что эта функция непрерывна и возрастает на $[0, 2]$, $g_{X^*}(0) = 0$. Значит, можно построить функцию $g_{X^*}^{-1}(\varepsilon)$.

Считаем, что оператор дуального отображения $J : X \to X^*$ определен соотношениями ([11], с. 311)

$$\|Jx\| = \|x\|, \quad \langle Jx, x\rangle = \|x\|^2 \ \ \forall x \in X. \tag{2}$$

Свойства этого оператора определяются геометрическими свойствами пространств X и X^*. Отметим, что при сделанных предположениях относительно пространства X оператор J является монотонным ограниченным непрерывным ([11], сс. 313, 330, 331). Кроме того, справедливо неравенство (см. [8], [12])

$$\|Jx - Jy\| \le \overline{c}_2 g_{X^*}^{-1}(2\overline{c}_2 L\|x - y\|), \tag{3}$$

где $\overline{c}_2 = 2\max\{1, \|x\|, \|y\|\}$, L — постоянная Фигеля, $1 < L < 3{,}18$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00807.

Введем функционал [12]

$$V(x,y) = \|Jx\|^2/2 - \langle Jx, y\rangle + \|y\|^2/2 \ \ \forall x, y \in X.$$

Известно [12], [8], что $V(x,y)$ — неотрицательный выпуклый и дифференцируемый по Jx и y функционал, причем

$$\operatorname{grad}_{Jx} V(x,y) = x - y, \quad \operatorname{grad}_y V(x,y) = Jy - Jx. \tag{4}$$

Свойства $V(x,y)$ также зависят от геометрических свойств пространства X. Укажем некоторые из них [8]:

$$V(x,y) \geq L^{-1}\delta_X(\|x-y\|/(2\overline{c}_2)) \ \ \forall x, y \in X, \tag{5}$$

$$V(x,y) \leq \langle Jx - Jy, x - y\rangle \ \ \forall x, y \in X. \tag{6}$$

Свойства функции $\delta_X(s)$ позволяют из (5) получить оценку

$$\|x - y\| \leq 2\overline{c}_2\delta_X^{-1}(LV(x,y)). \tag{7}$$

Известно [13], что единственное решение $x_\alpha(\tau)$ операторного уравнения

$$Ax_\alpha(\tau) + \alpha(\tau)Jx_\alpha(\tau) = f \tag{8}$$

стабилизируется при $\tau \to +\infty$ к нормальному решению (1), если $\alpha(\tau)$ $(\tau \geq t_0 \geq 0)$ — положительная функция,

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0. \tag{9}$$

Предположим, что элемент f и оператор A в (1) возмущены, а именно, при $t \geq t_0 \geq 0$ вместо элемента f известны его $\delta(t)$-приближения, т. е.

$$\|f(t) - f\| \leq \delta(t), \tag{10}$$

монотонный оператор A аппроксимируется семейством операторов $\{A(t)\}$, $A(t) : X \to X^*$, $D(A(t)) = X$,

$$\|Ax - A(t)x\| \leq h(t)g(\|x\|) \ \ \forall x \in X, \tag{11}$$

где $h(t)$ и $\delta(t)$ — неотрицательные функции, определенные при $t \geq t_0 \geq 0$, $g(s)$ — неотрицательная ограниченная функция, т. е. переводящая ограниченное множество в ограниченное, $s \geq 0$. Заметим, что монотонность оператора $A(t)$ не предполагается.

Задав произвольный элемент $y_0 \in X$, построим непрерывный метод первого порядка следующего вида (см. [8]):

$$\frac{dJy(t)}{dt} + A(t)y(t) + \alpha(t)Jy(t) = f(t), \tag{12}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{13}$$

При исследовании поведения траекторий задачи (12), (13) при $t \to +\infty$ будем пользоваться методом замороженных коэффициентов ([2], с. 261), поэтому наряду с задачей Коши (12), (13) при каждом фиксированном $\tau \geq t_0$ построим вспомогательную задачу Коши с точными данными

$$\frac{dJz(t,\tau)}{dt} + Az(t,\tau) + \alpha(\tau)Jz(t,\tau) = f, \tag{14}$$

$$z(t_0,\tau) = y_0 \ \ \forall \tau \geq t_0. \tag{15}$$

Теорема. *Пусть X — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, уравнение* (1) *разрешимо, монотонный оператор $A : X \to X^*$ является ограниченно гельдер-непрерывным (ср. с* [14], с. 79), *т. е. существует возрастающая функция $\mu(R)$ на $[0, +\infty)$ такая, что для всех x и y из X выполняется неравенство*

$$\|Ax - Ay\| \le \mu(R)\|x - y\|^\sigma, \tag{16}$$

где $\sigma \in (0, 1]$, $R = \max\{\|x\|, \|y\|\}$; задачи Коши (12), (13) *и* (14), (15) *имеют единственные решения класса $C^1[t_0, +\infty)$ при любом элементе y_0 из X, причем существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|y(t)\| \le c$ при всех $t \ge t_0$; дуальное отображение J на решениях задачи* (14), (15) *обладает свойством*

$$\Big\langle \frac{dJz(t,\tau)}{dt}, \frac{dz(t,\tau)}{dt} \Big\rangle \ge \Psi\Big(\Big\|\frac{dz(t,\tau)}{dt}\Big\|\Big)\Big\|\frac{dz(t,\tau)}{dt}\Big\|, \tag{17}$$

где $\Psi(s)$ — неотрицательная возрастающая непрерывная функция при $s \ge 0$, $\Psi(0) = 0$, возмущения элемента f и оператора A удовлетворяют условиям (10), (11), *$\alpha(t)$ — положительная дифференцируемая выпуклая убывающая функция, определенная при $t \ge t_0 \ge 0$ и обладающая свойством* (9), *а также выполнены следующие предельные равенства*:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\delta(t) + h(t)}{\alpha(t)} = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\int\limits_{t_0}^{\tau} [\gamma(t,\tau) + \Psi^{-1}(\gamma(t,\tau))] \exp(\xi(t))dt}{\exp(\xi(\tau))} = 0, \tag{20}$$

где $\xi(s) = \int\limits_{t_0}^{s} \alpha(t)dt$, $\beta(t,\tau) = \exp[-\alpha(\tau)(t - t_0)]$,

$$\gamma(t,\tau) = [\delta_X^{-1}(c_4\beta(t,\tau))]^\sigma + \alpha(\tau)g_{X^*}^{-1}(c_3\delta_X^{-1}(c_4\beta(t,\tau))),$$

$c_2 = 2\max\{1, c_1, d\}$, $c_3 = (2c_2)^2L$, $c_4 = d_1L$, $1 < L < 3{,}18$, *d, d_1, c_1 — положительные постоянные, удовлетворяющие неравенствам*

$$\|x_\alpha(\tau)\| \le d, \quad V(y_0, x_\alpha(\tau)) \le d_1, \quad \|z(t,\tau)\| \le c_1 \tag{21}$$

при всех $t \ge t_0$, $\tau \ge t_0$, причем d_1 и c_1 в общем случае могут зависеть от y_0. Тогда решение задачи (12), (13) *при любом элементе $y_0 \in X$ стабилизируется при $t \to +\infty$ к нормальному решению уравнения* (1).

Доказательство. Прежде всего установим существование постоянных d, d_1 и c_1, обеспечивающих выполнение неравенств (21). Из сходимости $x_\alpha(\tau)$ к x^* при $t \to +\infty$ следует существование положительной постоянной d. Кроме того, нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$0 \le V(y_0, x_\alpha(\tau)) \le \|y_0\|^2/2 + \|y_0\|\,\|x_\alpha(\tau)\| + \|x_\alpha(\tau)\|^2/2.$$

Следовательно, за постоянную d_1 можно принять величину $d_1 = d_1(y_0) = (\|y_0\|+d)^2/2$. Построим функцию

$$r(t,\tau) = V(z(t,\tau), x_\alpha(\tau)) = \|Jz(t,\tau)\|^2/2 - \langle Jz(t,\tau), x_\alpha(\tau)\rangle + \|x_\alpha(\tau)\|^2/2, \tag{22}$$

для которой (см. (4))

$$\frac{dr(t,\tau)}{dt} = \Big\langle \frac{dJz(t,\tau)}{dt}, z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\Big\rangle. \tag{23}$$

Вычитая из (14) равенство (8) и вычислив значение функционалов, стоящих в правой и левой частях полученного равенства, на элементе $z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)$, имеем

$$\Big\langle \frac{dJz(t,\tau)}{dt}, z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\Big\rangle + \langle Az(t,\tau) - Ax_\alpha(\tau), z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle + \\ + \alpha(\tau)\langle Jz(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau), z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle = 0. \quad (24)$$

Свойство (6) функционала V дает

$$\langle Jz(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau), z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle \geq r(t,\tau). \quad (25)$$

Теперь, учитывая в (24) соотношения (23), (25) и монотонность оператора A, приходим к неравенству $dr(t,\tau)/dt \leq -\alpha(\tau)r(t,\tau)$, отсюда легко установить оценку

$$r(t,\tau) \leq r(t_0,\tau)\beta(t,\tau), \quad (26)$$

где $r(t_0,\tau) = V(y_0, x_\alpha(\tau))$. Так как установлено, что $V(y_0, x_\alpha(\tau)) \leq d_1$, то оценка (26) дает

$$r(t,\tau) \leq d_1\beta(t,\tau). \quad (27)$$

Поскольку $\alpha(\tau) > 0$, $t \geq t_0$, то установлено, что

$$0 \leq r(t,\tau) \leq d_1. \quad (28)$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенства (см. [8])

$$(\|x\| - \|y\|)^2/2 \leq V(x,y) \ \ \forall x, y \in X,$$

которое из (28) позволяет вывести оценку

$$\|z(t,\tau)\| \leq \sqrt{2d_1} + d,$$

т. е. в (21) $c_1 = \sqrt{2d_1} + d$. Значит, неравенства (21) доказаны.

Далее, из (27) при $t = \tau$ имеем

$$r(\tau,\tau) \leq d_1 \exp[-\alpha(\tau)(\tau - t_0)]. \quad (29)$$

Используя правило Лопиталя, нетрудно проверить, что при условии (19) аргумент экспоненты в неравенстве (29) стремится к $-\infty$ при $\tau \to +\infty$. Тем самым установлено, что $r(\tau,\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$. Теперь свойства функции $\delta_X(s)$ и неравенство

$$L^{-1}\delta_X(\|z(\tau,\tau) - x_\alpha(\tau)\|/(2c_2)) \leq V(Jz(\tau,\tau), x_\alpha(\tau)) = r(\tau,\tau),$$

записанное на основании свойства (5) функционала V, позволяют утверждать, что $\|z(\tau,\tau) - x_\alpha(\tau)\| \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Определим новую величину

$$\rho(t,\tau) = V(y(t), z(t,\tau)) = \|Jy(t)\|^2/2 - \langle Jy(t), z(t,\tau)\rangle + \|z(t,\tau)\|^2/2.$$

Приняв во внимание равенства (4), найдем

$$\frac{d\rho(t,\tau)}{dt} = \Big\langle \frac{dJy(t)}{dt}, y(t) - z(t,\tau)\Big\rangle + \Big\langle Jz(t,\tau) - Jy(t), \frac{dz(t,\tau)}{dt}\Big\rangle. \quad (30)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что в силу начальных условий (13) и (15) и определения дуального отображения (2) справедливо равенство

$$\rho(t_0,\tau) = 0 \ \ \forall \tau \geq t_0. \quad (31)$$

Далее, из (12) и (14) с помощью тех же действий, что и при выводе равенства (24), получим

$$\Big\langle \frac{dJy(t)}{dt} - \frac{dJz(t,\tau)}{dt}, y(t) - z(t,\tau)\Big\rangle + \langle A(t)y(t) - Az(t,\tau), y(t) - z(t,\tau)\rangle +$$
$$+ \alpha(t)\langle Jy(t) - Jz(t,\tau), y(t) - z(t,\tau)\rangle + [\alpha(t) - \alpha(\tau)]\langle Jz(t,\tau), y(t) - z(t,\tau)\rangle = \langle f(t) - f, y(t) - z(t,\tau)\rangle. \tag{32}$$

Монотонность оператора A и условие (11) дают неравенства

$$\langle A(t)y(t) - Az(t,\tau), y(t) - z(t,\tau)\rangle = \langle Ay(t) - Az(t,\tau), y(t) - z(t,\tau)\rangle +$$
$$+ \langle A(t)y(t) - Ay(t), y(t) - z(t,\tau)\rangle \geq \langle A(t)y(t) - Ay(t), y(t) - z(t,\tau)\rangle \geq -h(t)g(\|y(t)\|)\|y(t) - z(t,\tau)\|. \tag{33}$$

Учитывая (6), (10), (30), (33) и ограниченность траекторий $z(t,\tau)$, $y(t)$ при всех $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$, от (32) придем к неравенству

$$\frac{d\rho(t,\tau)}{dt} \leq -\alpha(t)\rho(t,\tau) + M_1[|\alpha(t) - \alpha(\tau)| + h(t) + \delta(t)] + \eta(t,\tau), \tag{34}$$

где $M_1 > 0$,

$$\eta(t,\tau) = \Big\langle \frac{dJz(t,\tau)}{dt}, y(t) - z(t,\tau)\Big\rangle + \Big\langle Jz(t,\tau) - Jy(t), \frac{dz(t,\tau)}{dt}\Big\rangle.$$

Приняв во внимание равенство (см. [8])

$$\Big\langle \frac{dJz(t,\tau)}{dt}, z(t,\tau)\Big\rangle = \Big\langle Jz(t,\tau), \frac{dz(t,\tau)}{dt}\Big\rangle,$$

получаемое путем дифференцирования по t равенства $\|Jz(t,\tau)\|^2 = \|z(t,\tau)\|^2$ (см. (2)), из (34) получим

$$\frac{d\rho(t,\tau)}{dt} \leq -\alpha(t)\rho(t,\tau) + M_1[|\alpha(t) - \alpha(\tau)| + h(t) + \delta(t)] + c\left(\left\|\frac{dJz(t,\tau)}{dt}\right\| + \left\|\frac{dz(t,\tau)}{dt}\right\|\right). \tag{35}$$

Оценим сверху величины $\|dJz(t,\tau)/dt\|$ и $\|dz(t,\tau)/dt\|$. Из уравнения (14) выводим неравенство

$$\left\|\frac{dJz(t,\tau)}{dt}\right\| \leq \|Az(t,\tau) - Ax_\alpha(\tau)\| + \alpha(\tau)\|Jz(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau)\|. \tag{36}$$

Используя (3), (7), свойства функций $g_{X^*}^{-1}(\varepsilon)$ и определение (22) величины $r(t,\tau)$, имеем

$$\|Jz(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau)\| \leq c_2 g_{X^*}^{-1}(2c_2L\|z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\|) \leq c_2 g_{X^*}^{-1}(c_3\delta_X^{-1}(Lr(t,\tau))). \tag{37}$$

Кроме того, свойство (16) оператора A и (7) дают следующую оценку:

$$\|Az(t,\tau) - Ax_\alpha(\tau)\| \leq \mu(d_2)\|z(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\|^\sigma \leq \mu(d_2)[2c_2\delta_X^{-1}(Lr(t,\tau))]^\sigma, \quad d_2 = \max\{d, c_1\}. \tag{38}$$

Теперь (37) и (38) позволяют от (36) перейти к неравенству

$$\left\|\frac{dJz(t,\tau)}{dt}\right\| \leq M_2\{[\delta_X^{-1}(Lr(t,\tau))]^\sigma + \alpha(\tau)g_{X^*}^{-1}(c_3\delta_X^{-1}(Lr(t,\tau)))\}, \quad M_2 > 0.$$

Поскольку функции $\delta_X^{-1}(\varepsilon)$, $g_{X^*}^{-1}(\varepsilon)$ возрастают, то, приняв во внимание (27), из последнего неравенства имеем

$$\left\|\frac{dJz(t,\tau)}{dt}\right\| \leq M_2\{[\delta_X^{-1}(c_4\beta(t,\tau))]^\sigma + \alpha(\tau)g_{X^*}^{-1}(c_3\delta_X^{-1}(c_4\beta(t,\tau)))\} = M_2\gamma(t,\tau). \tag{39}$$

Обратившись к условию (17) теоремы и учитывая оценку (39), получим

$$\Psi\left(\left\|\frac{dz(t,\tau)}{dt}\right\|\right) \leq \left\|\frac{dJz(t,\tau)}{dt}\right\| \leq M_2\gamma(t,\tau),$$

т. е.

$$\left\| \frac{dz(t,\tau)}{dt} \right\| \le \Psi^{-1}(M_2\gamma(t,\tau)). \tag{40}$$

Свойства функции $\alpha(t)$ позволяют записать неравенство (см. [2], с. 266)

$$0 \le \alpha(t) - \alpha(\tau) \le (t-\tau)\alpha'(t), \quad t \le \tau. \tag{41}$$

Принимая во внимание (39)–(41), из (35) выводим оценку

$$\frac{d\rho(t,\tau)}{dt} \le -\alpha(t)\rho(t,\tau) + M_3[(t-\tau)\alpha'(t) + h(t) + \delta(t) + \gamma(t,\tau) + \Psi^{-1}(M_2\gamma(t,\tau))],$$

где $M_3 > 0$, $t \ge t_0$, $\tau \ge t_0$, $t \le \tau$. Отсюда по лемме из ([2], с. 264), приняв во внимание (31), получим оценку сверху для функции $\rho(t,\tau)$, которая при $t = \tau$ принимает вид

$$\rho(\tau,\tau) \le M_3 \int_{t_0}^{\tau} [(t-\tau)\alpha'(t) + h(t) + \delta(t) + \gamma(t,\tau) + \Psi^{-1}(M_2\gamma(t,\tau))] \exp\left(-\int_t^{\tau} \alpha(s)ds \right) dt,$$

т.е.

$$\rho(\tau,\tau) \le M_3 \frac{\int\limits_{t_0}^{\tau} [(t-\tau)\alpha'(t) + h(t) + \delta(t) + \gamma(t,\tau) + \Psi^{-1}(M_2\gamma(t,\tau))] \exp(\xi(t))dt}{\exp(\xi(\tau))}.$$

Используя правило Лопиталя, нетрудно проверить, что условия (18) и (19) теоремы обеспечивают предельное соотношение

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\int\limits_{t_0}^{\tau} [(t-\tau)\alpha'(t) + h(t) + \delta(t)] \exp(\xi(t))dt}{\exp(\xi(\tau))} = 0.$$

Условие (20) гарантирует сходимость $\rho(\tau,\tau)$ к нулю при $\tau \to +\infty$, а свойство (5) функционала V позволяет заключить, что $\|y(\tau) - z(\tau,\tau)\| \to 0$ при $\tau \to +\infty$. Утверждение теоремы следует из неравенства

$$\|y(\tau) - x^*\| \le \|y(\tau) - z(\tau,\tau)\| + \|z(\tau,\tau) - x_\alpha(\tau)\| + \|x_\alpha(\tau) - x^*\|$$

и доказанной сходимости к нулю всех слагаемых, стоящих в его правой части.

Замечание 1. Условие (20) накладывает некоторые требования на функции $\delta_X^{-1}(\varepsilon)$, $g_{X^*}^{-1}(\varepsilon)$ (т. е. на геометрию пространства X) и на параметрическую функцию $\alpha(t)$. Покажем, что класс пространств, в которых для некоторых функций $\alpha(t)$ можно добиться справедливости (20), непуст.

Пусть $\alpha(t) = t^{-\alpha}$, тогда $\xi(s) = (s^{1-\alpha} - t_0^{1-\alpha})/(1-\alpha)$. Из условий (9) и (19) следует, что $\alpha \in (0,1)$. Предположим, что $\delta_X(s) \ge O(s^{\beta_1})$, $\delta_{X^*}(s) \ge O(s^{\beta_2})$, $\Psi(s) \ge O(s^{\beta_3})$, $\beta_1 > 1$, $\beta_2 > 1$, $\beta_3 > 0$. Тогда

$$\gamma(t,\tau) \le O\left(\exp\left[-\frac{\sigma}{\beta_1}\alpha(\tau)t \right] + \alpha(\tau)\exp\left[-\frac{1}{\beta_1(\beta_2-1)}\alpha(\tau)t \right] \right).$$

Применив правило Лопиталя, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$I = \lim_{\tau\to\infty} \int_{t_0}^{\tau} \exp[-\lambda\alpha(\tau)t] \exp(\xi(t))dt / \exp(\xi(\tau)) \le \alpha\lambda I.$$

Отсюда легко видеть, что если $\alpha\lambda < 1$, то $I = 0$. Значит, для справедливости (20) достаточно выполнения неравенств

$$\tau_1 = \frac{\sigma\alpha}{\beta_1} < 1, \quad \tau_2 = \frac{\alpha}{\beta_1(\beta_2-1)} < 1, \quad \frac{\tau_1}{\beta_3} < 1, \quad \frac{\tau_2}{\beta_3} < 1. \tag{42}$$

Пусть $X = L^p[a,b]$ или $X = l^p$. Известно, что при $1 < p < 2$ имеем $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = q$, $1/p + 1/q = 1$, т. е. $\beta_2 = p/(p-1)$ (см. [9], с. 57; [12]). Дуальное отображение в этом случае обладает свойством [12], [15]

$$\langle Jx - Jy, x - y\rangle \geq m\|x-y\|^2, \quad m > 0, \quad \forall x, y \in X,$$

отсюда имеем

$$\Big\langle \frac{Jz(t+\Delta t,\tau) - Jz(t,\tau)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta t,\tau) - z(t,\tau)}{\Delta t}\Big\rangle \geq m\Big\|\frac{z(t+\Delta t,\tau) - z(t,\tau)}{\Delta t}\Big\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta t \to 0$, получим неравенство

$$\Big\langle \frac{dJz(t,\tau)}{dt}, \frac{dz(t,\tau)}{dt}\Big\rangle \geq m\Big\|\frac{dz(t,\tau)}{dt}\Big\|^2,$$

т. е. $\Psi(t) = t$ и $\beta_3 = 1$ (см. также [8]). Поэтому условия (42) примут вид

$$\frac{\sigma\alpha}{2} < 1, \quad \frac{\alpha(p-1)}{2} < 1, \quad \sigma \in (0,1], \quad \alpha \in (0,1), \quad 1 < p < 2,$$

т. е. выполнение (20) обеспечено. Пусть $p > 2$, тогда $\beta_1 = p$, $\beta_2 = 2$ (см. [9], с. 57; [12], [15]), и требования (42) сводятся к соотношениям

$$\tau_1 = \frac{\sigma\alpha}{p} < 1, \quad \tau_2 = \frac{\alpha}{p} < 1, \quad \frac{\tau_1}{\beta_3} < 1, \quad \frac{\tau_2}{\beta_3} < 1.$$

Вид функции $\Psi(t)$ для пространств $L^p[a,b]$, l^p при $p > 2$ в общем случае найти не удается.

Замечание 2. Если $X = H$ — гильбертово пространство, то $J = E$ — единичный оператор, $\Psi(s) = s$, $\delta_X(s) \geq O(s^2)$, $g_{X^*}(s) \geq O(s)$ ([9], с. 51), $\eta(t,\tau) = 0$, и оценка (34) примет вид

$$\frac{d\rho(t,\tau)}{dt} \leq -\alpha(t)\rho(t,\tau) + M_1[|\alpha(t) - \alpha(\tau)| + h(t) + \delta(t)]. \tag{43}$$

Поэтому утверждение теоремы будет верно без условий (16) и (20). Заметим, если траектории $z(t,\tau)$ и $y(t)$ таковы, что $\langle dJz(t,\tau)/dt, y(t)\rangle - \langle Jy(t), dz(t,\tau)/dt\rangle \leq 0$, то неравенство (43) остается справедливым, и стабилизация $y(t)$ к x^* при $t \to \infty$ имеет место без предположений (16) и (20).

Приведем условия существования единственного ограниченного решения задачи Коши вида

$$\frac{dJu(t)}{dt} + Au(t) + \alpha(t)Ju(t) = f, \tag{44}$$

$$u(t_0) = u_0, \tag{45}$$

определенного при всех $t \geq t_0$.

Пусть операторы A и J удовлетворяют условию Липшица, тогда существует единственное решение задачи (44), (45) на $[t_0, \widetilde{t})$, где $\widetilde{t} \leq +\infty$. Предположим также, что найдется число $r_0 > 0$, для которого

$$\langle Ax - f, x\rangle \geq 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geq r_0, \quad x \in X. \tag{46}$$

Докажем, что тогда $\widetilde{t} = +\infty$. Доказательство ведем от противного: пусть $\widetilde{t} < +\infty$ и $u(t) \notin B(0,r_0) = \{x \mid \|x\| \leq r_0\}$ при $t_1 < t \leq t_2 < \widetilde{t}$, $\|u(t_1)\| = r_0$. Из (44) имеем

$$\Big\langle \frac{dJu(t)}{dt}, u(t)\Big\rangle + \langle Au(t) - f, u(t)\rangle + \alpha(t)\|Ju(t)\|^2 = 0. \tag{47}$$

Легко проверить справедливость равенств

$$\Big\langle \frac{dJu(t)}{dt}, u(t)\Big\rangle = \frac{1}{2}\frac{d\|Ju(t)\|^2}{dt} = \|Ju(t)\|\frac{d\|Ju(t)\|}{dt}.$$

Кроме того, из (46) и предположения относительно траектории $u(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$ имеем неотрицательность второго слагаемого в левой части (47). Значит, из (47) вытекает неравенство

$$\frac{d\|Ju(t)\|}{dt} \le -\alpha(t)\|Ju(t)\|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Отсюда $\|Ju(t)\| \le \|Ju(t_1)\| = r_0$. Таким образом, $\|u(t)\| \le r_0$ при всех $t \in [t_1, \widetilde{t}\,)$. Теперь из (44) заключаем, что существует число $K = \sup\{\|dJu(t)/dt\| \mid t \in [t_1, \widetilde{t}\,)\} < \infty$. Выбрав две произвольные точки t' и t'' из $[t_1, \widetilde{t}\,)$, запишем неравенство

$$\|Ju(t') - Ju(t'')\| \le K|t' - t''|. \tag{48}$$

Далее, из (5), (6) имеем

$$L^{-1}\delta_X(\|u(t') - u(t'')\|/(2K_2)) \le \|Ju(t') - Ju(t'')\|\,\|u(t') - u(t'')\|,$$

где $K_2 = 2\max\{1, r_0\}$. Отсюда, приняв во внимание (48), получим

$$g_X(\|u(t') - u(t'')\|/(2K_2)) \le K_3|t' - t''|, \quad K_3 = 2LK_2K,$$

что позволяет сделать вывод о существовании

$$\lim_{t\to\widetilde{t}} u(t) = \widetilde{u}_0 \in X.$$

Таким образом, к дифференциальному уравнению (44) с начальным условием $u(\widetilde{t}) = \widetilde{u}_0$ вновь применима теорема существования и единственности решения, т. е. траектория $u(t)$ определена и при $t > \widetilde{t}$. Полученное противоречие доказывает существование решения уравнения (44) при $t \in [t_0, +\infty)$.

Отметим, что в пространствах Лебега $L^P[a, b]$, l^p при $p > 2$ дуальное отображение удовлетворяет условию Липшица (см. [12], [15]). Приведенные рассуждения позволяют указать достаточные условия существования единственных ограниченных решений задач (12), (13) и (14), (15) на $[t_0, +\infty)$.

Литература

1. Альбер Я.И., Рязанцева И.П. *Минимизация выпуклых функционалов*// Тез. докл. Всес. конф. по экстремальным задачам и их приложениям. Таллин: 1973. – С. 18–19.
2. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
3. Васильев Ф.П., Амочкина Т.В., Недич А. *Об одном регуляризованном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка* // Вестн. МГУ, Серия 15. – 1995. – № 3. – С. 39–46.
4. Васильев Ф.П., Недич А. *Непрерывный регуляризованный метод проекции градиента третьего порядка* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 12. – С. 2033–2042.
5. Рязанцева И.П., Дунцева Е.А. *Об одном непрерывном методе решения выпуклых задач минимизации* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 4. – С. 480–485.
6. Рязанцева И.П. *Непрерывный метод решения задач условной минимизации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 5. – С. 734–742.
7. Альбер Я.И. *О решении методом регуляризации операторных уравнений* I *рода с аккретивными операторами в банаховом пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 12. – С. 2242–2248.
8. Alber Ya.I. *A new approach to the investigation of evolution differential equations in Banach spaces* // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Applications. – 1994. – V. 23. – № 9. – P. 1115–1134.
9. Дистель Д. *Геометрия банаховых пространств.* – Киев: Вища школа, 1980. – 215 с.
10. Figel T. *On the moduli of convexity and smoothness* // Studia Math. – 1976. – V. 56. – № 2. – P. 121–155.

11. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
12. Альбер Я.И. *Методы решения нелинейных операторных уравнений и вариационных неравенств в банаховых пространствах*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Горький, 1986. – 314 с.
13. Альбер Я.И., Рязанцева И.П. *О решении нелинейных задач с монотонными разрывными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 2. – С. 331–342.
14. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
15. Юргелас В.В. *Методы приближенного решения уравнений с монотонными операторами*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Воронеж, 1983. – 118 с.

Нижегородский государственный технический университет

Поступила 02.03.2004