ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.544

Н.Р. АБУБАКИРОВ

ОДНОЛИСТНОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ПАРАМЕТРАМ x, y

В статье [1] было построено решение внешней обратной краевой задачи (ОКЗ) по параметрам x, y. Целью данной работы является получение достаточных условий однолистности, однако для этого придется несколько изменить постановку задачи по сравнению с [1].

Требуется найти в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ контур $\partial D_z=L_z=L_z^1\cup L_z^2$ и функцию $w(z)$, аналитическую в области D_z, $\infty\in D_z$, по краевому условию

$$\begin{aligned} &w=\varphi_1(x)+i\psi_1(x), \quad 0\le x\le l, \quad \text{на} \ \ L_z^1,\\ &w=\varphi_2(y)+i\psi_2(y), \quad 0\le y\le l, \quad \text{на} \ \ L_z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Будем считать, что заданные однозначные функции определяют в плоскости w замкнутый жордановый контур L_w, являющийся границей односвязной конечной области $D_w=w(D_z)$, $\partial D_w=L_w=L_w^1\cup L_w^2$. Предполагаем также, что точка $w_0=w(\infty)$ фиксируется заранее ([2], с. 17). После отображения D_w на единичный круг $E=\{|\zeta|<1\}$, которое переводит w_0 в 0, а точки стыка дуг L_w^1 и L_w^2 — в точки $e^{i\gamma_A}$ и $e^{i\gamma_B}$, причем $0<\gamma_A<\pi$, $\gamma_B=2\pi-\gamma_A$, для нахождения функции $z(\zeta)$, аналитической в E за исключением полюса в нуле, получаем краевую задачу Гильберта

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} z(e^{i\gamma})=x(\gamma), \quad \gamma_A\le\gamma\le\gamma_B,\\ &\operatorname{Im} z(e^{i\gamma})=y(\gamma), \quad 0\le\gamma\le\gamma_A, \quad \gamma_B\le\gamma\le 2\pi, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x(\gamma)$, $y(\gamma)$ — известные монотонные функции, которые считаем гёльдеровыми. Обозначим класс всех функций φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2, удовлетворяющих всем перечисленным условиям, через K. Здесь возможны два случая: $x(\gamma)$ убывает, $y(\gamma)$ возрастает или наоборот. Для определенности будем считать, что имеет место первый случай.

Аналогично [1] определяется решение задачи (2) в виде

$$z(\zeta)=-iF_0(\zeta)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\,\frac{e^{i\sigma}+\zeta}{e^{i\sigma}-\zeta}d\sigma+iB_0+C\zeta-\frac{\overline{C}}{\zeta}\Big), \tag{3}$$

где $C=A+iB$ — неопределенная константа,

$$B_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}d\sigma-2B,$$

$$c(\gamma)=\begin{cases}-y(\gamma), & \gamma\in[0,\gamma_A];\\ -x(\gamma), & \gamma\in(\gamma_A,\gamma_B);\\ \ \ y(\gamma), & \gamma\in[\gamma_B,2\pi],\end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00914.

$$F_0(\zeta) = -i\frac{(\zeta - e^{i\gamma_A})^{1/2}(\zeta - e^{i\gamma_B})^{1/2}}{\zeta - 1}$$

— решение однородной задачи (2). Если ввести обозначение

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|}\operatorname{ctg}\frac{\sigma - \gamma}{2}d\sigma,$$

то после перехода к пределу при $\zeta \to e^{i\gamma}$ формула (3) примет вид

$$z(e^{i\gamma}) = -iF_0(e^{i\gamma})\Big(\frac{c(\gamma)}{|F_0(e^{i\gamma})|} - i(I(\gamma) - I(0)) + i(2A\sin\gamma + 2B(\cos\gamma - 1))\Big). \tag{4}$$

Достаточным условием однолистности функции $z(\zeta)$ является выполнение следующих неравенств:

$$\operatorname{Im} z(e^{i\gamma}) \ge \operatorname{Re} z(e^{i\gamma}), \quad \gamma \in [0, \gamma_A) \cup (\gamma_B, 2\pi), \tag{5}$$

$$\operatorname{Im} z(e^{i\gamma}) \le \operatorname{Re} z(e^{i\gamma}), \quad \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B). \tag{6}$$

Это равносильно тому, что в плоскости z дуга L_z^1 лежит ниже прямой $y = x$, а дуга L_z^2 — выше этой прямой. Следовательно, эти дуги не пересекаются, кроме того L_z^1 и L_z^2 не имеют самопересечений в силу монотонности функций $x(\gamma)$ и $y(\gamma)$.

С использованием формулы (4) условия (5), (6) можно записать в следующем виде (считаем для простоты $F_0(e^{i\gamma}) = F_0(\gamma)$):

$$\begin{gathered} 2AF_0(\gamma)\sin\gamma + 2BF_0(\gamma)(\cos\gamma - 1) + F_0(\gamma)(I(0) - I(\gamma)) - y(\gamma) \le 0, \\ \gamma \in [0, \gamma_A) \cup (\gamma_B, 2\pi), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} 2AF_0(\gamma)\sin\gamma + 2BF_0(\gamma)(\cos\gamma - 1) + F_0(\gamma)(I(0) - I(\gamma)) - x(\gamma) \le 0, \\ \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B). \end{gathered} \tag{8}$$

Для исследования полученных условий воспользуемся методом, предложенным в [3]. Введем обозначения

$$M_1(\gamma) = F_0(\gamma)(I(0) - I(\gamma)) - y(\gamma), \quad M_2(\gamma) = F_0(\gamma)(I(0) - I(\gamma)) - x(\gamma)$$

и заметим, что $M_1(\gamma_A) = M_2(\gamma_A) = -l$, $M_1(\gamma_B) = M_2(\gamma_B) = 0$. Соотношение

$$2AF_0(\gamma)\sin\gamma + 2BF_0(\gamma)(\cos\gamma - 1) + M_1(\gamma) = 0$$

при фиксированном γ представляет собой уравнение прямой в плоскости OAB. Приведем его к нормальному уравнению прямой, разделив на

$$2|F_0(\gamma)|\sqrt{\sin^2\gamma + (\cos\gamma - 1)^2} = 4|F_0(\gamma)|\sin\gamma/2$$

и заметив, что $F_0(\gamma) < 0$ при $\gamma \in (0, \gamma_A)$, а $F_0(\gamma) > 0$ при $\gamma \in (\gamma_B, 2\pi)$. Тогда получим

$$-A\cos\frac{\gamma}{2} + B\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{M_1(\gamma)}{4|F_0(\gamma)|\sin\gamma/2} = 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_A),$$

$$A\cos\frac{\gamma}{2} - B\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{M_1(\gamma)}{4|F_0(\gamma)|\sin\gamma/2} = 0, \quad \gamma \in [\gamma_B, 2\pi).$$

Следовательно, область P_1 точек (A, B), удовлетворяющих неравенству (7), лежит внутри угла, образованного прямыми $-A\cos\frac{\gamma_A}{2} + B\sin\frac{\gamma_A}{2} - l_1 = 0$ и $A\cos\frac{\gamma_B}{2} - B\sin\frac{\gamma_B}{2} = 0$ и содержащего положительную полуось OA, $l_1 = l/(4|F_0(\gamma_A)|\sin\gamma_A/2) > 0$. При этом часть границы области P_1 лежит на указанных прямых.

Аналогичное исследование неравенства (8) приводит к тому, что область P_2 точек (A, B), удовлетворяющих условию (7), лежит внутри угла, образованного прямыми $A\cos\frac{\gamma_A}{2} - B\sin\frac{\gamma_A}{2} - l_1 = 0$ и $A\cos\frac{\gamma_B}{2} - B\sin\frac{\gamma_B}{2} = 0$ и содержащего положительную полуось OB. При этом часть границы области P_2 лежит на указанных прямых.

Следовательно, пересечение областей P_1 и P_2 непусто и представляет собой множество P, лежащее между прямыми $-A\cos\frac{\gamma_A}{2} + B\sin\frac{\gamma_A}{2} - l_1 = 0$ и $A\cos\frac{\gamma_B}{2} - B\sin\frac{\gamma_B}{2} - l_1 = 0$. Приведенная схема рассуждений показывает, что верна

Теорема. *Решение* (3) *внешней ОКЗ* (1) *при любых функциях* φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 *из класса* K *будет однолистным, если* $C = A + iB$ *лежит в области* P.

Отметим, что из этого результата можно получить утверждение статьи [3], где рассматривалась внешняя ОКЗ по параметру $x = \operatorname{Re} z$. Хотя в [3] в качестве вспомогательной области в плоскости ζ взята внешность единичного круга, на исследование однолистности решения это не влияет.

К ОКЗ (1) приводятся некоторые задачи механики, поэтому полученный результат может оказаться полезным для однолистной разрешимости этих задач.

В заключение автор выражает благодарность проф. Л.А. Аксентьеву за полезные замечания и внимание к работе.

Литература

1. Абубакиров Н.Р., Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Внешняя обратная краевая задача при комбинировании двух параметров из декартовых координат и полярного угла* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 10. – С. 3–10.
2. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.
3. Салимов Р.Б. *Внешние обратные краевые задачи для случая, когда граничные значения заданы в функции декартовой координаты x* // Учен. зап. Казанск. ун-та. - Казань, 1957. – Т. 117. – № 9. – С. 60–64.

Казанский государственный университет

Поступила
24.06.2002