ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 517.956

В.Б. ЛЕВЕНШТАМ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПО ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе [1] изложен один способ асимптотического интегрирования квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами, который восходит к работам И.Б. Симоненко [2], [3] и состоит в построении с помощью метода Ньютона–Канторовича и идей метода усреднения [4] рекуррентной последовательности линейных задач, решения которых являются старшими приближениями решения исходной задачи, и последующем асимптотическом интегрировании этих линейных задач методом пограничного слоя [5]. В данной работе обоснован более естественный и удобный, нежели в [1], алгоритм. Он состоит в применении метода пограничного слоя непосредственно к исходной квазилинейной задаче и интегрировании возникающих при этом задач путем выделения в их решениях плавной и осциллирующей составляющих. Этот способ позволил построить асимптотическое разложение решения исходной задачи, коэффициенты которого эффективно вычисляются, с указанием точной оценки асимптотической близости решения и частичных сумм разложения. Ранее указанным способом была построена формальная асимптотика в случае параболических уравнений второго порядка [6]. Аналогичный алгоритм обоснован [7] для задачи конвекции жидкости в поле быстро осциллирующих сил. Отметим, что данная работа, как и [7], примыкает к исследованиям (напр., [4], § 27–28), посвященным развитию классической конечномерной теории метода усреднения для уравнений в частных производных.

1. Пусть k, m и s — натуральные числа; Ω — ограниченная область евклидова пространства R^m с C^∞-гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в цилиндре $(x,t) \in Q = \overline{\Omega} \times R^1$ с боковой поверхностью $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^1$ задачу о $2\pi\omega^{-1}$-периодических по t решениях уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha u + \sum_{l=-s}^{s} f_l(x, \delta^{2k-1}u) \exp(il\omega t) \tag{1}$$

с краевыми условиями Дирихле

$$u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = \cdots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}\Big|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс, $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$, n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$, $\delta^{2k-1}u$ — вектор-функция, составленная из функции u и ее всевозможных производных по x до порядка $2k-1$ включительно, ω — большой параметр. Обозначим через p число компонент вектор-функции $\delta^{2k-1}u$. Предполагается, что функции $a_\alpha : \Omega \to R$ и $f_l : \Omega \times R^p \to C^1$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 98-01-00136).

$f_l = f^*_{-l}$, бесконечно гладкие и для уравнения (1) выполнено условие параболичности, т. е. при всех $x \in \overline{\Omega}$ и ненулевых векторах $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \in R^m$ справедливо неравенство

$$(-1)^{k+1} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x)\sigma^\alpha > 0.$$

Предположим еще, что усредненная задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha v + f_0(x, \delta^{2k-1} v),$$
$$v|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_\Gamma = \dots = \frac{\partial^{k-1} v}{\partial n^{k-1}}\bigg|_\Gamma = 0$$

имеет стационарное решение $\overset{0}{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (условие $\overset{0}{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ в силу известных шаудеровских оценок равносильно условию $\overset{0}{v} \in C^{2k-1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha > 0$), и это решение невырожденное. Последнее означает, что линеаризованная на $\overset{0}{v}$ стационарная однородная задача $Av = 0$ не имеет отличных от нуля решений. Здесь оператор A задан на функциях $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (2), равенством

$$Av = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha v + [(D_e f_0)(x, \delta^{2k-1}\overset{0}{v})](\delta^{2k-1} v),$$

где

$$[(D_e f_0)(x, \overset{0}{e})](e) = \left[\frac{\partial f_0(x, \overset{0}{e})}{\partial e_1}\right] e_1 + \dots + \left[\frac{\partial f_0(x, \overset{0}{e})}{\partial e_p}\right] e_p, \quad \overset{0}{e}, e \in R^p,$$

— частный дифференциал $f_0(x, e)$ по группе переменных e.

2. При сделанных в п. 1 предположениях согласно [8] существуют такие положительные числа ω_0 и r_0, что при $\omega > \omega_0$ задача (1), (2) имеет единственное в шаре $\|u - \overset{0}{v}\|_{C(R, W_q^{2k}(\Omega))} \le r_0$, $q > m$, $2\pi\omega^{-1}$-периодическое по t решение u_ω, причем

$$\lim_{\omega \to \infty} \|u_\omega - \overset{0}{v}\|_{C(R, W_q^{2k}(\Omega))} = 0.$$

Здесь $C(R, W_q^{2k}(\Omega))$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $u : R \to W_q^{2k}(\Omega)$ с обычной супремум-нормой.

Данная работа посвящена построению полной асимптотики решения u_ω по параметру $\omega \gg 1$ в сколь угодно сильных гёльдеровских нормах $C^{l, l/2k}(Q)$, $l > 0$. Напомним ([9], с. 81), что пространство $C^{l, l/2k}(Q)$ состоит из функций, заданных в Q и имеющих конечную норму

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{l,l/2k}(Q)} = \sum_{j=0}^{[l]} \sum_{2k\mu+|v|=j} \sup_Q |D_t^\mu D_x^v u(x,t)| + \\ + \delta_l \Bigg(\sum_{2k\mu+|v|=[l]} \sup_{(x,t),(y,t)\in Q} |D_t^\mu D_x^v u(x,t) - D_t^\mu D_y^v u(y,t)| / |x-y|^{l-[l]} + \\ + \sum_{0<l-2k\mu-|v|<2k} \sup_{(x,t),(x,t')\in Q} |D_t^\mu D_x^v u(x,t) - D_{t'}^\mu D_x^v u(x,t')| / |t-t'|^{\frac{l-2k\mu-|v|}{2k}} \Bigg),\end{aligned}$$

где $[l]$ — целая часть l, $\delta_l = 0$ при целом l и $\delta_l = 1$ при l нецелом, $D_t^\mu = \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}$, $D_x^v = D^v$.

Имея в виду применение метода пограничного слоя [5] к задаче (1), (2), введем в некоторой пограничной подобласти Ω_η области Ω криволинейную систему координат следующим образом. Определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \to \Omega_\eta$ по закону $(\varphi, r) \to \varphi + n_\varphi r$, где φ — точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату φ, а n_φ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке φ. Число η

выбирается столь малым, что указанное отображение обратимо. Обозначим через χ срезающую функцию $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\chi(x) = 1$ при $r(x) < \frac{\eta}{3}$, $\chi(x) = 0$ при $r(x) > \frac{2}{3}\eta$.

Введем теперь класс погранслойных функций, используемый в данной работе. В погранслое Ω_η рассмотрим функции вида

$$\varphi_0(x,\omega) = \omega^{-\frac{s_1}{2k}} \rho^{s_2} a(\varphi) \exp[-\lambda(\varphi)\rho], \quad \rho = \omega^{1/2k} r,$$

где s_1, s_2 — целые неотрицательные числа, $a, \lambda \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\lambda > 0$. Пусть $\varphi(x,\omega) = \varphi_0(x,\omega)$, $x \in \Omega_\eta$, $\varphi(x,\omega) = 0$, $x \in \Omega \setminus \Omega_\eta$. Погранслойными функциями будем называть конечные суммы функций вида $\varphi(x,\omega)\chi(x)\exp(il\omega t)$, $l \in R$.

Асимптотические приближения $2\pi\omega^{-1}$-периодического по t решения u_ω задачи (1), (2), о котором говорилось выше, будем искать в виде

$$\overset{N}{u}(x,t,\omega) = \sum_{j=0}^{N} \omega^{-\frac{j}{2k}} u_j(x) + \omega^{-1} \sum_{j=0}^{N} \omega^{-\frac{j}{2k}} v_j(x,\omega t) + \omega^{-1} \sum_{j=0}^{N} \omega^{-\frac{j}{2k}} w_j(x,\omega) + {}$$
$$+ \omega^{-1} \sum_{j=0}^{N} \omega^{-\frac{j}{2k}} z_j(x,\omega t,\omega). \quad (3)$$

Здесь через $u_j(x)$ и $v_j(x,\tau)$ обозначены бесконечно дифференцируемые функции, а через $w_j(x,\omega)$ и $z_j(x,\tau,\omega)$ — погранслойные функции, причем $v_j(x,\tau)$ и $z_j(x,\tau,\omega)$ являются 2π-периодическими по τ с нулевыми средними

$$\langle v_j\rangle(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_j(x,\tau)d\tau = 0, \quad \langle z_j\rangle(x,\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z_j(x,\tau,\omega)d\tau = 0.$$

В п. 3 будет описан алгоритм построения коэффициентов приближения $\overset{n}{u}$, при котором справедлива

Теорема. *Пусть выполнены условия п. 1 и u_ω — $2\pi\omega^{-1}$-периодическое по t решение задачи (1), (2). Тогда функция u_ω бесконечно дифференцируема и существует такое значение параметра $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ для всех натуральных N справедлива оценка*

$$\|u_\omega - \overset{N}{u}\|_{C^{l,l/2k}(Q)} \le c_{N,l}\,\omega^{-\frac{N+1-\max(l-2k,0)}{2k}}, \quad c_{N,l} = \mathrm{const}\,.$$

Построение приближения $\overset{N}{u}$ сводится к решению конечного (зависящего от N) числа задач $Av = \varphi(x)$, где A — определенный в п. 1 эллиптический оператор с граничными условиями Дирихле, а правые части $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

3. В этом пункте построим формальное асимптотическое разложение решения u_ω. При этом погранслойные коэффициенты w_s и z_s разложения будем строить лишь в пограничном слое Ω_η; после этого их нужно еще продолжить нулем в область $\Omega \setminus \Omega_\eta$ и умножить на сглаживающую функцию $\chi(x)$ (см. п. 2). Отметим еще необходимое в дальнейшем представление главной эллиптической части уравнения (1) в переменных (φ,ρ), $\rho = r\sqrt[2k]{\omega}$:

$$\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha u = \omega^{-1}\left[b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k} u}{\partial\rho^{2k}} + \sum_{j=1}^{N} \omega^{-\frac{j}{2k}} M_j(\varphi,\rho)u + \omega^{-\frac{N+1}{2k}} M_{N+1}(\varphi,\rho,r)u\right]. \quad (4)$$

Здесь $b_{2k} \in C^\infty(\partial\Omega)$, $b_{2k} > 0$, N — натуральное число, M_j, $1 \le j \le N$, — дифференциальные операторы относительно φ, ρ, коэффициенты которых — полиномы по ρ с бесконечно дифференцируемыми по φ коэффициентами, M_{N+1} — дифференциальный оператор относительно φ, ρ с бесконечно дифференцируемыми по φ, r коэффициентами.

Подставим приближение (3) решения в уравнения (1), (2), разложим затем функции $f_l(x, \delta^{2k-1}\overset{n}{u})$ в ряды Тейлора с центром $(x, \delta^{2k-1}u_0)$ и, учитывая (4), сгруппируем и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\omega^{-\frac{1}{2k}}$ отдельно для регулярных и погранслойных функций. Каждое из полученных равенств разобьем затем на уравнения для стационарных и осциллирующих по τ (с нулевым средним) коэффициентов. В результате получим рекуррентную последовательность задач, запись которых начнем с задач для регулярных функций. Функции u_0, v_0 удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x)D^\alpha u + f_0(x,\delta^{2k-1}u_0) = 0, \quad u_0|_{\partial\Omega} = \cdots = \left.\frac{\partial^{k-1}u_0}{\partial n^{k-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial\tau} = \sum_{0<|l|\le s} f_l(x,\delta^{2k-1}u_0)e^{il\tau}, \quad \tau = \omega t. \tag{6}$$

Функции u_p, v_p, $p \ge 1$, являются решениями линейных задач вида

$$\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x)D^\alpha u_p + [(D_e f_0)(x,\delta^{2k-1}u_0)](\delta^{2k-1}u_p) = \varphi_p(x), \tag{7}$$

$$u_p|_{\partial\Omega} = -w_{p-2k}|_{\rho=0}, \quad \left.\frac{\partial u_p}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\partial w_{p-2k+1}}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}, \ldots, \left.\frac{\partial^{k-1}u_p}{\partial n^{k-1}}\right|_{\partial\Omega} = -\left.\frac{\partial^{k-1}w_{p-k-1}}{\partial\rho^{k-1}}\right|_{\rho=0},$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial\tau} = \psi_p(x,\tau). \tag{8}$$

Здесь φ_p и ψ_p — бесконечно дифференцируемые функции, причем ψ_p — тригонометрический полином по τ с нулевым средним, которые выражаются через u_i, v_{i-2k}, $0 \le i \le p-1$, а коэффициенты с отрицательными индексами считаются нулевыми.

По условию п. 1 нелинейная задача (5) имеет решение $\overset{0}{v}$. Предположение п. 1 о невырожденности $\overset{0}{v}$ гарантирует однозначную разрешимость задач (7). В обыкновенных дифференциальных уравнениях (6), (8) x играет роль параметра. Эти уравнения также однозначно разрешимы в силу условия $\langle v_p\rangle(x) \equiv 0$.

Задачи для погранслойных коэффициентов w_p, z_p, $p \ge 0$, имеют вид

$$b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k}w_p}{\partial\rho^{2k}} = \lambda_p(\rho,\varphi), \quad w_p|_{\rho=\infty} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial z_p}{\partial\tau} - b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k}z_p}{\partial\rho^{2k}} = \mu_p(\tau,\varphi,\tau), \quad z_p|_{\rho=\infty} = 0, \tag{10}$$

$$z_p|_{\rho=0} = -v_p|_{\partial\Omega}, \quad \left.\frac{\partial z_p}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = -\left.\frac{\partial v_{p-1}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}, \ldots, \left.\frac{\partial^{k-1}z_p}{\partial\rho^{k-1}}\right|_{\rho=0} = -\left.\frac{\partial^{k-1}v_{p-k+1}}{\partial^{k-1}n}\right|_{\partial\Omega}.$$

Здесь λ_p и μ_p — бесконечно дифференцируемые при $\rho \ge 0$, $\varphi \in \partial\Omega$, $\tau \in R$ функции, причем μ_p — тригонометрические полиномы по τ с нулевым средним, которые выражаются через функции u_i, v_{i-2k}, w_i и z_i, $0 \le i \le p-1$.

Легко видеть, что $\lambda_0 = \mu_0 = 0$. Поэтому $w_0 = 0$, а z_0 в силу структуры v_0 имеет вид

$$Z_0 = \sum_{o<|l|\le s} Z_l(\rho,\varphi)e^{il\tau},$$

где функции Z_l удовлетворяют соотношениям

$$ilZ_l - b_{2k}(\varphi)\frac{\partial^{2k}Z_l}{\partial\rho^{2k}} = 0, \quad Z_l|_{\rho=0} = -f_l(x,\delta^{2k-1}u_0)|_{\partial\Omega}, \quad \left.\frac{\partial Z_l}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = 0, \ldots, \left.\frac{\partial^{k-1}Z_l}{\partial\rho^{k-1}}\right|_{\rho=0} = 0, \quad Z_l|_{\rho=\infty} = 0.$$

Характеристическое уравнение $il - b_{2k}\lambda^{2k} = 0$ не имеет чисто мнимых корней, поэтому оно имеет k корней $\lambda_j(\varphi)$, $j = 1,\ldots,k$, с отрицательными действительными частями. Следовательно,

$$Z_0 = \sum_{0<|l|\le s}\sum_{j=1}^{k} a_{lj}(\varphi)e^{\lambda_j(\varphi)\rho}e^{il\tau}.$$

Аналогичным образом устанавливается, что задачи (9), (10) однозначно разрешимы, причем коэффициенты w_p при $p \geq 1$ являются конечными суммами функций вида $a(\varphi)\rho^t e^{\mu(\varphi)\rho}$, где t — целые неотрицательные числа; $a(\varphi), \mu(\varphi) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\mathrm{Re}\,\mu < 0$, а коэффициенты z_p, $p \geq 1$, являются конечными суммами произведений таких функций на экспоненте $e^{il\tau}$, где l — целые отличные от нуля числа.

4. Перейдем к доказательству указанной в теореме оценки. Согласно п. 3 приближенное решение $\overset{N}{u}$ (3) удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial \overset{N}{u}}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha \overset{N}{u} + \sum_{l=-s}^{s} f_l(x, \delta^{2k-1}\overset{N}{u}) \exp(il\omega\tau) + \omega^{-\frac{N+1}{2k}} \varphi_N(x, \omega t, \omega),$$

$$\overset{N}{u}|_\Gamma = \left.\frac{\partial \overset{N}{u}}{\partial n}\right|_\Gamma = \cdots = \left.\frac{\partial^{k-1} \overset{N}{u}}{\partial n^{k-1}}\right|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\varphi_N(x, \tau, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая по $(x,t) \in \overline{\Omega} \times R$, 2π-периодическая по τ функция, удовлетворяющая условию

$$\|D^\beta f_N\|_{C(\overline{\Omega}\times R)} \leq C_{N,\beta}\omega^{-\frac{|\beta|}{2k}}, \tag{11}$$

где β — мультииндекс произвольной длины $|\beta|$, $C_{N,\beta} = \mathrm{const}$. Погрешность $\overset{N}{w} = u_\omega - \overset{N}{u}$ при этом является $2\pi\omega^{-1}$-периодическим по t решением задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha w - [(D_e f_0)(x, \delta^{2k-1}u_0)](\delta^{2k-1}w) = h(w, x, \omega t, \omega), \tag{12}$$

$$w|_\Gamma = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = \cdots = \left.\frac{\partial^{k-1} w}{\partial n^{k-1}}\right|_\Gamma = 0, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} h(w, x, \tau, \omega) = \sum_{l=-s}^{s} [f_l(x, \delta^{2k-1}(\overset{N}{u} + w)) - f_l(x, \delta^{2k-1}\overset{N}{u})] \exp(il\tau) - \\ - [(D_e f_0)(x, \delta^{2k-1}u_0)](\delta^{2k-1}w) + \omega^{-\frac{N+1}{2k}} \varphi_n(x, \tau, \omega). \end{aligned} \tag{14}$$

Оценку погрешности $w = \overset{N}{w}$ проведем в два этапа. Вначале в п. 5, интерпретируя задачу (12), (13) для краткости изложения как абстрактное параболическое уравнение, методами теории полугрупп и дробных степеней операторов (напр., [10]) получим оценки w в слабых гёльдеровских нормах. Затем в п. 6 с помощью априорных оценок В.А. Солонникова [9] для линейных параболических задач установим оценки w в сильных гёльдеровских нормах.

5. Пусть $q > m$. Обозначим для краткости $L_q(\Omega)$ через B, а $W_q^{2k}(\Omega)$ через B^1. В банаховом пространстве B рассмотрим линейный оператор A с областью определения $D(A) = \{w \in B^1 : w$ удовлетворяет $(13)\}$, действующий по закону

$$Aw = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) D^\alpha w - [(D_e f_0)(x, \delta^{2k-1}u_0)](\delta^{2k-1}w).$$

Как известно [11], [12], A порождает в B аналитическую полугруппу $\exp(tA)$, $t \geq 0$. Пусть $\lambda_0 \geq 0$ — такое число, что оператор $\lambda_0 I - A$ позитивен [10]. Через B^δ, $\delta \in [0,1]$, обозначим банахово пространство, являющееся областью определения дробной степени $(\lambda_0 I - A)^\delta$ [10] с обычной нормой

$$\|x\|_{B^\delta} = \|(\lambda_0 I - A)^\delta x\|_B.$$

В силу теоремы вложения С.Л. Соболева и ([8], с. 239) справедливы непрерывные вложения

$$B^1 \subset C^{2k-\frac{m}{q}}(\overline{\Omega}), \quad C^{\gamma}(\overline{\Omega}) \subset B^{\delta(\gamma)}, \tag{15}$$

где $\gamma \in (0,1]$, $\delta(\gamma) > 0$, — достаточно малое число, откуда следует, что функция h (см. (14)) индуцирует непрерывное 2π-периодическое по τ отображение $\widehat{h}_\omega : B^1 \times R \to B^\delta$ вида $\widehat{h}_\omega(w,\tau) = h(w,\cdot,\tau,\omega)$.

Пусть t_0 и ω_1 — такие положительные числа, что при всех собственных значениях λ оператора A и всех $\omega > \omega_1$ справедливы неравенства

$$\exp(\lambda t_0) \neq 1, \quad \exp(\lambda t_\omega 2\pi\omega^{-1}) \neq 1,$$

где $t_\omega = [t_0\dot{\omega}(2\pi)^{-1}]$, $[a]$ — целая часть числа a. В гёльдеровском пространстве $C_\mu([0,t_0],B^1)$, $0 < \mu < \delta$, вектор-функций $u : [0,t_0] \to B^1$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ, рассмотрим оператор

$$P_\omega(w) = \int_0^{t_\omega} G_\omega(t-\tau)h_\omega(w,\tau)d\tau, \quad \omega > \omega_1.$$

Здесь

$$G_\omega(t) = \begin{cases} [I-\exp(t_\omega A)]^{-1}\exp(tA), & t > 0; \\ [I-\exp(t_\omega A)]^{-1}\exp[(t+t_\omega)A], & -t_\omega < t < 0. \end{cases}$$

Как известно, и в этом легко убедиться непосредственно с помощью теории полугрупп и дробных степеней операторов [10], что каждое t_ω-периодическое по t решение задачи (12), (13) удовлетворяет при $t \in [0,t_0]$ уравнению

$$w = P_\omega(w), \tag{16}$$

и наоборот, каждое решение уравнения (16), будучи t_ω-периодическим образом продолженным на всю временную ось, является решением задачи (12), (13).

Из соотношений (11), (14), второго вложения (15) и теории полугрупп и дробных степеней операторов [10] следует существование положительных чисел c_1, $\omega_2 > \omega_1$ и δ_1, причем $\delta_1 = \delta_1(\delta)$ сколь угодно мало при достаточно малом δ, при которых справедлива оценка

$$\|P_\omega(0)\|_{C_\mu([0,t_0],B^1)} \le c_1\omega^{-\frac{N+1-\delta_1}{2k}}, \quad \omega > \omega_2. \tag{17}$$

С помощью методики, восходящей к работе [8], устанавливается существование такого $\omega_0 \ge \omega_2$, что при $\omega > \omega_0$ и вектор-функций w из шара $S_\omega \equiv \{w : \|w\|_{C_\mu([0,t_0],B^1)} \le 2c_1\omega^{-\frac{N+1-\delta_1}{2k}}\}$ выполняется неравенство

$$\|D_w[P_\omega(w)]\|_{C_\mu([0,t_0],B^1)} \le \frac{1}{2}\|w\|_{C_\mu([0,t_0],B^1)}, \tag{18}$$

где D_w — дифференциал Фреше отображения P_ω. Из оценок (17), (18) следует, что оператор P_ω, $\omega > \omega_0$, в шаре S_ω является сжатием. Отсюда в силу отмеченной выше связи функционального уравнения (17) и задачи (12), (13) вытекает существование единственного в шаре

$$\|w\|_{C_\mu(R,B^1)} \le 2c_1\omega^{-\frac{N+1-\delta_1}{2k}} \tag{19}$$

t_ω-периодического по t решения задачи (12), (13). Отметим, что поскольку правая часть уравнения (12) является $2\pi\omega^{-1}$-периодической по t, то решение $w(x,t)$ в силу его единственности в указанном шаре является $2\pi\omega^{-1}$-периодическим по t. Таким образом, попутно доказан сформулированный в первом абзаце п. 2 результат работы [8].

6. Из оценки (19) следует, что для некоторого $l_0 \in (2k-1,2k)$ выполняется неравенство

$$\|\overset{N}{w}\|_{C_\mu(C^{l_0}(\overline{\Omega}))} \le c\omega^{-\frac{N+1-\delta_1}{2k}}, \quad c = 2c_1. \tag{20}$$

На отрезке $t \in [0,1]$ определим бесконечно дифференцируемую функцию χ такую, что $\chi(t) = 0$ при $t < 1/3$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 2/3$. Из соотношений (12), (13) для $\overset{N}{w}$ следует, что функция $\overset{N}{w}_1 = \chi \overset{N}{w}$, определенная в цилиндре $\Omega \times [0,1]$ с боковой поверхностью $\Gamma_0 = \partial\Omega \times [0,1]$, является решением начально-краевой задачи

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha D^\alpha w_1 - [(D_l f_0)(x, \delta^{2k-1} u_0)](\delta^{2k-1} w_1) = \chi(t) h(w, x, \omega t, \omega) - \chi'(t) w, \tag{21}$$

$$w_1|_{\Gamma_0} = \left.\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_0} = \dots = \left.\frac{\partial^{k-1} w_1}{\partial n^{k-1}}\right|_{\Gamma_0} = 0, \quad u(x,0) = 0, \tag{22}$$

для которой выполнены условия согласования сколь угодно высокого порядка. Пусть l — произвольное нецелое положительное число. Исходя из оценки (20) и используя соответствующее (зависящее от l) число раз априорные оценки В.А. Солонникова ([9], теорема 4.9) решения задачи (21), (22), можно найти такое $N_1 > N$, для которого при $\omega > \omega_0$ выполняется неравенство

$$\|\overset{N_1}{w}_1\|_{C^{l,\frac{l}{2k}}(\Omega \times [0,1])} \le c_{l,N_1} \omega^{-\frac{N+1-\max(l-2k,0)}{2k}}, \quad c_{l,N_1} = \text{const}.$$

Поскольку $\overset{N_1}{w} = \overset{N_1}{w}_1$ при $t \in [2/3, 1]$ и функция $\overset{N_1}{w}$ периодическая по t с периодом $2\pi/\omega < 1/3$ при $\omega_0 \ge 6\pi$, то из последнего неравенства следует

$$\|\overset{N_1}{w}\|_{C^{l,\frac{l}{2k}}} \le c_{l,N_1} \omega^{-\frac{N+1-\max(l-2k,0)}{2k}}. \tag{23}$$

Отсюда, учитывая структуру (3) функции $\overset{N_1}{w} - \overset{N}{w}$, заключаем, что оценка (23) справедлива и для приближения $\overset{N}{w}$. $\square$

В заключение отметим, что п. 3 работы написан автором совместно с Ю.С. Мишенькиной. Выражаю ей благодарность.

Литература

1. Левенштам В.Б. *Метод погранслоя и эффективное построение старших приближений метода осреднения* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 3. – С. 48–55.
2. Симоненко И.Б. *Старшие приближения метода осреднения для абстрактных параболических уравнений* // Матем. сб. – 1973. – Т. 92. – № 4. – С. 541–549.
3. Симоненко И.Б. *Старшие приближения метода осреднения для параболических уравнений* // ДАН СССР. – 1973. – Т. 213. – № 6. – С. 1255–1257.
4. Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике.* – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
5. Вишик М.И., Люстерник Л.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // УМН. – 1957. – Т. 12. – Вып. 5. – С. 3–122.
6. Левенштам В.Б., Мишенькина Ю.С. *Асимптотическое интегрирование параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами.* – Ростов-на-Дону. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 20.06.00, № 1738–В00.
7. Левенштам В.Б. *Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40. – № 9. – С. 1416–1424.
8. Симоненко И.Б. *Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений* // Матем. сб. – 1972. – Т. 87. – № 2. – С. 236–253.
9. Солонников В.А. *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида* // Тр. МИАН. – 1965. – Т. 83. – С. 3–162.

10. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*. – М.: Наука, 1966. – 499 с.
11. Кошелев А.И. *Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем* // УМН. – 1958. – Т. 13. – № 4. – С. 29–88.
12. Соломяк М.З. *Производящие операторы аналитических полугрупп и связанные с ними дифференциальные уравнения в пространствах Банаха*: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Ленинград, 1959.

Ростовский государственный университет

Поступила 28.02.2001