Известия вузов. Математика
2015, № 8, с. 64–74

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.Н. МАХРОВА

СТРУКТУРА ДЕНДРИТОВ, ДОПУСКАЮЩИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ ДУГОВОЙ ПОДКОВЫ

Аннотация. Дендрит X допускает существование дуговой подковы, если для любого непрерывного отображения f из X в X, имеющего подкову (A, B), найдется натуральное число n такое, что n-я итерация отображения f имеет дуговую подкову. В работе изучается структура таких дендритов.

Ключевые слова: дендрит, подкова, дуговая подкова.

УДК: 517.938

1. Введение

Пусть X — континуум (компактное связное метрическое пространство), $f : X \to X$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что f *имеет подкову, если существуют непересекающиеся подконтинуумы* $A, B \subset X$ *такие, что*

$$f(A) \cap f(B) \supset A \cup B. \tag{1}$$

Подкову отображения f будем обозначать через (A, B).

Хорошо известно (например, [1]), что если некоторая итерация отображения f имеет подкову, то топологическая энтропия отображения f положительная.

Пусть X — одномерный континуум. Будем говорить, что *отображение* $f : X \to X$ *имеет*

- *линейную подкову, если* f *имеет подкову* (A, B)*, где* A, B *— дуги, т. е.* A *и* B *гомеоморфны замкнутому промежутку на прямой*;
- *дуговую подкову, если* f *имеет линейную подкову* (A, B) *и* A, B *лежат на одной дуге.*

В [2] показано, что для непрерывного отображения f, заданного на графе (одномерном компактном связном многограннике), положительность топологической энтропии f эквивалентна существованию дуговой подковы для некоторой итерации f. В [3], [4] построены примеры непрерывных отображений на дендритах с положительной топологической энтропией, у которых есть подкова, но никакая итерация заданного отображения не имеет линейной подковы и тем более дуговой подковы.

В данной работе выделен класс дендритов, допускающих существование дуговой подковы. Будем говорить, что *дендрит* X *допускает существование дуговой подковы, если для*

Поступила 24.12.2013

Работа выполнена в рамках проекта № 1410, финансируемого Министерством образования и науки Российской Федерации, и в рамках базовой части государственного задания № 2014/134, код проекта № 2664.

любого непрерывного отображения $f : X \to X$, имеющего подкову, существует натуральное число $s \geq 1$ такое, что f^s имеет дуговую подкову.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть X — дендрит со счетным множеством концевых точек. Тогда X допускает существование дуговой подковы.*

Несчетность множества концевых точек дендрита X характеризуется наличием подконтинуума, гомеоморфного дендриту G, у которого множество концевых точек $E(G)$ есть канторово множество, принадлежащее отрезку $[0, 1]$, а каждая точка ветвления имеет порядок 3 (определение порядка точки см. в разделе 2; построение дендрита G описано, например, в [5]). Справедлива

Лемма 1 ([6]). *Пусть X — дендрит. Тогда множество концевых точек $E(X)$ несчетно тогда и только тогда, когда X содержит дендрит, гомеоморфный дендриту G.*

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает

Следствие. Пусть дендрит X не содержит подконтинуум, гомеоморфный дендриту G. Тогда X допускает существование дуговой подковы.

Теорема 1 позволяет выдвинуть гипотезу, которая является обобщением результата Дж. Либре и М. Мисиюревича, доказанного для непрерывных отображений на графах [2].

Гипотеза. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, у которого множество концевых точек счетно. Тогда положительность топологической энтропии эквивалентна существованию дуговой подковы для некоторой итерации f.*

Возникший интерес к изучению динамических систем на дендритах связан, например, с тем, что дендриты появляются как множества Жюлиа в комплексных динамических системах ([7], § 2), как ω-предельные множества некоторых динамических систем (например, [8], [9]). С другой стороны, дендриты являются примерами континуумов Пеано со сложной топологической структурой ([10], гл. 10).

2. Предварительные сведения

Начнем с необходимых определений и обозначений.

Определение 1. Дендритом называется локально связный континуум, не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности.

Из определения дендрита следует, что он является одномерным континуумом.

В работе будем использовать определение порядка точки в смысле Менгера–Урысона (например, [11], § 51).

Определение 2. Пусть X — дендрит, а n — кардинальное число $\leq c$ или порядковое число ω множества всех неотрицательных целых чисел в их естественном порядке. Будем говорить, что порядок точки $x \in X$ не превосходит n ($\operatorname{ord} x \leq n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что $\operatorname{Card}(\partial U_\delta(x)) \leq n$, где $\partial U_\delta(x)$ — граница δ-окрестности точки x, $\operatorname{Card}(\cdot)$ — мощность множества $(\cdot)$. Равенство $\operatorname{ord} x = n$ означает, что $\operatorname{ord} x \leq n$ и соотношение $\operatorname{ord} x \leq m$ не имеет места ни при каком $m < n$.

Точка, порядок которой больше двух, называется точкой ветвления. Точка, порядок которой равен единице, называется концевой точкой. Множество концевых точек дендрита X будем обозначать через $E(X)$.

Определение 3. Дендрит с конечным множеством концевых точек называется конечным деревом.

Отметим некоторые свойства дендритов.

Лемма 2 ([11], § 51). *Пусть X — дендрит. Тогда*

1) *любые две точки $x, y \in X$, $x \neq y$, можно соединить единственной дугой, имеющей в качестве концов точки x и y;*
2) *X имеет не более чем счетное множество точек ветвления;*
3) *любая точка $x \in X$ имеет порядок $\operatorname{ord} x \leq \omega$;*
4) *если число компонент связности множества $X \setminus \{x\}$ конечно, то оно совпадает с $\operatorname{ord} x$;*
5) *всякий подконтинуум дендрита — дендрит.*

Для доказательства теоремы 1 потребуются следующие вспомогательные утверждения и обозначения.

Теорема 2 ([11], § 9). *Всякое множество является объединением двух непересекающихся множеств, одно из которых — совершенное, а другое — разреженное (одно из них может быть пустым).*

Лемма 3 ([12]). *Пусть X — дендрит, континуум $Y \subset X$. Тогда $\operatorname{Card} E(Y) \leq \operatorname{Card} E(X)$.*

Пусть $E(X)$ — множество концевых точек дендрита X. Обозначим через $E^{(1)}(X)$ производную множества $E(X)$ (напомним, что производным множеством называется множество всех предельных точек множества $E(X)$).

Лемма 4 ([13]). *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и f имеет подкову (A, B). Тогда если хотя бы одно из множеств A или B имеет не более чем счетную производную множества концевых точек, то существует натуральное число n такое, что f^n имеет линейную подкову.*

Лемма 5 ([3]). *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X, и f имеет линейную подкову (A, B). Тогда существует натуральное число $k \geq 1$ такое, что f^k имеет дуговую подкову.*

Из лемм 4 и 5 следует: если непрерывное отображение $f : X \to X$ дендрита X имеет подкову (A, B), где хотя бы одно из множеств A или B имеет не более чем счетную производную множества концевых точек, то существует натуральное число s такое, что f^s имеет дуговую подкову. Поэтому для доказательства теоремы 1 необходимо рассмотреть случай, когда непрерывное отображение $f : X \to X$, заданное на дендрите X, имеет подкову (A, B) такую, что

$$A, B \in \mathbf{H} = \{X \text{ — дендрит} : \operatorname{Card} E(X) = \aleph_0,\ \operatorname{Card} E^{(1)}(X) = c\},$$

где $\aleph_0$ — мощность множества натуральных чисел, c — мощность континуума.

3. Структура дендритов класса H

Пусть A — непустое подмножество дендрита X. Если A — связное подмножество, то через $[A]$ обозначим замыкание множества A. Если A не связно, то любые две точки из различных компонент связности множества A соединим дугой. Замыкание полученного связного множества обозначим через $[A]$. В силу свойства 5) леммы 2 $[A]$ — дендрит в X. Заметим, что наименьшее замкнутое связное множество, содержащее A, совпадает с $[A]$.

Из определения континуума $[A]$ следует, что множество его концевых точек принадлежит замыканию множества A, т. е.

$$E([A]) \subseteq \overline{A}. \tag{2}$$

Лемма 6. *Пусть X — дендрит, у которого* $\operatorname{Card} E(X) \leq \aleph_0$*, континуум* $Y = [E^{(1)}(X)]$. *Тогда* $Y \subset X$.

Доказательство. Утверждение леммы 6 очевидно, если $\operatorname{Card} E(X) < \aleph_0$. В этом случае $Y = \emptyset$.

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{Card} E(X) = \aleph_0$. Тогда $Y \neq \emptyset$. Из построения континуума Y следует $Y \subseteq X$. Предположим, что $X = Y$. Тогда $E(X) = E(Y)$. Применяя включение (2), получим

$$E(X) = E(Y) \subseteq \overline{E^{(1)}(X)} = E^{(1)}(X).$$

Отсюда следует, что множество $E(X)$ плотно в себе. Поскольку плотное в себе множество не является разреженным, то из теоремы 2 следует, что плотное в себе множество $E(X)$ содержит непустое совершенное подмножество. Поскольку всякое непустое совершенное множество евклидова пространства имеет мощность континуума, то $\operatorname{Card} E(X) = c$. Последнее противоречит условию леммы. Поэтому $Y \subset X$. □

Отметим, что утверждение леммы 6 неверно, если X — дендрит с несчетным множеством концевых точек. В частности, для дендрита G, упомянутого во введении, $[E^{(1)}(G)] = G$.

Пусть дендрит $X \in \mathbf{H}$. Положим

(i) $X_0 = X$,
(ii) $X_\alpha = [E^{(1)}(X_{\alpha-1})]$ для каждого непредельного порядкового числа $\alpha \geq 1$,
(iii) $X_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} X_\alpha$, если λ — предельное порядковое число.

Так как $X \in \mathbf{H}$, то $\operatorname{Card} E(X) = \aleph_0$. Поэтому в силу леммы 3 $\operatorname{Card} E(X_\alpha) \leq \aleph_0$ для любого порядкового числа $\alpha \geq 1$. Согласно лемме 6 $X_\alpha \subset X_{\alpha-1}$ для каждого непредельного порядкового числа $\alpha \geq 1$. Отсюда получаем, что условия (i)–(iii) определяют строго убывающую последовательность континуумов

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_\gamma \supset \cdots . \tag{3}$$

В силу теоремы Бэра–Хаусдорфа ([14], § 7) существует порядковое число $\beta < \omega_1$ такое, что $X_\beta = X_{\beta+1} = \cdots$ (ω_1 — первое несчетное порядковое число). Из утверждения леммы 6 следует $X_\beta = \emptyset$. Заметим, что β не может быть предельным числом, так как в силу теоремы Кантора ([14], § 9) $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} X_\alpha \neq \emptyset$. Поэтому $X_\beta = [E^{(1)}(X_{\beta-1})]$. Так как $X_\beta = \emptyset$, то $E^{(1)}(X_{\beta-1}) = \emptyset$. Отсюда следует, что множество концевых точек $E(X_{\beta-1})$ конечно или пусто. Значит, $X_{\beta-1}$ — конечное дерево или дуга (возможно вырожденная). Таким образом, справедлива

Лемма 7. *Пусть дендрит $X \in \mathbf{H}$ и определена последовательность континуумов* (3)*, для которых выполнены условия* (i)–(iii)*. Тогда существует порядковое число $\gamma < \omega_1$ такое, что $X_\gamma \notin \mathbf{H}$.*

Определение 4. Пусть для дендрита $X \in \mathbf{H}$ определена последовательность континуумов (3), удовлетворяющих условиям (i)–(iii), а β — наименьшее порядковое число, для которого $X_\beta = \emptyset$. Число $\beta - 1$ назовем рангом дендрита X и обозначим через $\operatorname{rang}(X)$.

В силу сказанного выше число β не может быть предельным порядковым числом. Следовательно, $\operatorname{rang}(X)$ определен корректно.

Убедимся, что справедлива

Лемма 8. *Для любого порядкового числа* α*,* $1 \le \alpha < \omega_1$*, существует дендрит* $Z^\alpha \in \mathbf{H}$ *такой, что* $\operatorname{rang}(Z^\alpha) = \alpha$.

Доказательство. Для $\alpha = 1$ приведем пример, построенный в работе ([11], § 49). Положим

$$Z^1 = [0,1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{i}\right],$$

где $\mathbf{i}$ — мнимая единица. Здесь последовательность (3) для дендрита Z^1 имеет вид

$$Z^1 \supset [0,1] \supset \emptyset = \cdots .$$

Поэтому $\operatorname{rang}(Z^1) = 1$. Отрезок $[0,1]$ назовем основанием дендрита Z^1.

Определим дендрит Z^2 следующим образом: возьмем Z^1 и для каждого $n \ge 1$ и любого $k \ge 1$ на отрезок

$$\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{i}\right] \subset Z^1$$

"посадим" дендрит, полученный из Z^1 сжатием в 2^{n+1} раз, таким образом, чтобы основание сжатого дендрита легло на указанный отрезок (см. рис.). Тогда последовательность (3) для дендрита Z^2 примет вид

$$Z^2 \supset Z^1 \supset [0,1] \supset \emptyset = \cdots .$$

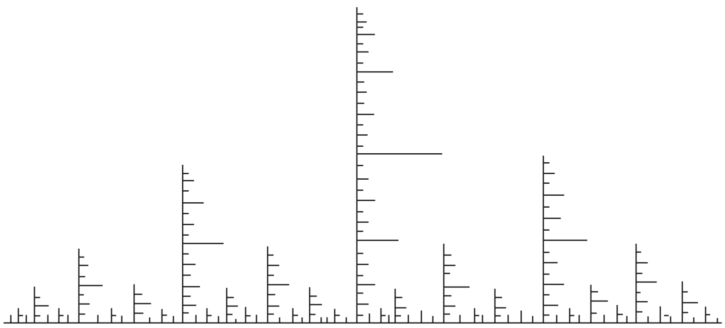

Рис. Дендрит $Z^{[2]}$

Поэтому $\operatorname{rang}(Z^2) = 2$. Отметим, что $\operatorname{Card} E(Z^2) = \aleph_0$, $E^{(1)}(Z^2) = Z^1$. Следовательно, $Z^2 \in \mathbf{H}$. Отрезок $[0,1]$ назовем основанием дендрита Z^2.

Предположим, что для любого порядкового числа α построен дендрит Z^α, у которого $\operatorname{rang}(Z^\alpha) = \alpha$, а последовательность (3) имеет вид

$$Z^\alpha \supset Z^{\alpha-1} \supset \cdots \supset Z^2 \supset Z^1 \supset [0,1] \supset \emptyset = \cdots .$$

Отрезок $[0,1]$ назовем основанием дендрита Z^α.

Опишем построение дендрита $Z^{\alpha+1}$. Возьмем Z^1 и для каждого $n \ge 1$ и любого $k \ge 1$ на отрезок $\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{i}\right] \subset Z^1$ "посадим" дендрит, полученный из Z^α сжатием в 2^{n+1} раз, таким образом, чтобы основание сжатого дендрита легло на указанный отрезок. Тогда последовательность (3) для дендрита $Z^{\alpha+1}$ имеет вид

$$Z^{\alpha+1} \supset Z^\alpha \supset \cdots \supset Z^2 \supset Z^1 \supset [0,1] \supset \emptyset = \cdots .$$

Следовательно, $\operatorname{rang}(Z^{\alpha+1}) = \alpha + 1$. Отметим, что $Z^{\alpha+1} \in \mathbf{H}$.

Опишем построение дендрита Z^β, когда β — предельное порядковое число. Существует возрастающая последовательность порядковых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, меньших чем β, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \beta$. Определим вспомогательный дендрит Y^β следующим образом: для каждого натурального числа $n \geq 1$ на отрезок $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \subset [0,1]$ "посадим" дендрит, полученный из дендрита Z^{α_n} сжатием в 2^n раз, таким образом, чтобы основание сжатого дендрита совпало с отрезком $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. Очевидно, $\operatorname{rang}(Y^\beta) = \beta$. Заметим, что в последовательности (3) для дендрита Y^β континуум $X_\beta = \{0\}$. Для построения дендрита, ранг которого равен $\beta + 1$, нужен дендрит Z^β, у которого $\operatorname{rang}(Z^\beta) = \beta$, а континуум $X_\beta = [0,1]$ в последовательности (3).

Перейдем к построению дендрита Z^β. Возьмем Z^1 и для каждого $n \geq 1$ и любого $k \geq 1$ на отрезок $\left[\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{i}\right] \subset Z^1$ "посадим" дендрит, полученный из дендрита Y^β сжатием в 2^{n+1} раз, таким образом, чтобы основание сжатого дендрита легло на указанный отрезок. Тогда $\operatorname{rang}(Z^\beta) = \beta$, а в последовательности (3) для дендрита Z^β континуум $X_\beta = [0,1]$. Отметим, что $Z^\beta \in \mathbf{H}$. □

4. Доказательство теоремы 1

Начнем с доказательства вспомогательных утверждений.

Лемма 9. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X и f имеет подкову (A_0, A_1) такую, что подконтинуумы $A_0, A_1 \in \mathbf{H}$. Тогда для любого натурального числа $n \geq 2$ существуют подконтинуумы $A_{i_1\dots i_n}$, где $i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $A_{i_1\dots i_n} \subseteq A_{i_1\dots i_{n-1}}$, $f(A_{i_1 i_2\dots i_n}) \supseteq A_{i_2\dots i_n}$;
2) *отображение f^n имеет подковы $(A_{i_1 i_2 \dots i_n}, A_{1-i_1})$.*

Если дополнительно для любого натурального числа $n \geq 2$ и любых чисел $i_1, \dots, i_n \in \{0,1\}$ континуум $A_{i_1\dots i_n} \in \mathbf{H}$, то

3) *f имеет подкову (C, D) такую, что $C \subseteq [E^{(1)}(A_0)]$, $D \subseteq [E^{(1)}(A_1)]$.*

Доказательство 1) проведем методом математической индукции.

Шаг $n = 2$. Выберем произвольным образом и зафиксируем числа $i_1, i_2 \in \{0,1\}$. Так как дендрит $A_{i_2} \in \mathbf{H}$, то $\operatorname{Card} E(A_{i_2}) = \aleph_0$. Обозначим точки множества $E(A_{i_2})$ через $e^{(1)}_{i_2}, \dots, e^{(j)}_{i_2}, \dots$. В силу (1) $f(A_{i_1}) \supset A_{i_2}$. Поэтому для каждой точки $e^{(j)}_{i_2} \in E(A_{i_2})$ найдется точка $e^{(j)}_{i_1 i_2} \in A_{i_1}$ такая, что $f(e^{(j)}_{i_1 i_2}) = e^{(j)}_{i_2}$, где $j \geq 1$. Положим $A_{i_1 i_2} = [\{e^{(j)}_{i_1 i_2}\}_{j\geq 1}]$. Тогда

$$A_{i_1 i_2} \subseteq A_{i_1} \quad \text{и} \quad f(A_{i_1 i_2}) \supseteq A_{i_2}.$$

Таким образом, для $n = 2$ утверждение доказано. Отметим, что в силу леммы 3 $\operatorname{Card} E(A_{i_1 i_2}) \leq \aleph_0$.

После проведения $n-1$ шагов для каждого $2 \leq k \leq n-1$ будут построены подконтинуумы $A_{i_1\dots i_k i_{k+1}}$ такие, что

$$A_{i_1\dots i_k i_{k+1}} \subseteq A_{i_1\dots i_k}, \quad f(A_{i_1\dots i_k i_{k+1}}) \supseteq A_{i_2\dots i_k i_{k+1}}, \quad \text{где} \;\; i_1, \dots, i_{k+1} \in \{0,1\}. \tag{4}$$

Шаг n. Выберем произвольным образом и зафиксируем числа $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{0,1\}$. Обозначим концевые точки континуума $A_{i_2\dots i_n i_{n+1}}$ через $e^{(j)}_{i_2\dots i_{n+1}}$, где $1 \leq j \leq N$, если $\operatorname{Card} E(A_{i_2\dots i_{n+1}}) = N$, либо $1 \leq j < +\infty$, если $\operatorname{Card} E(A_{i_2\dots i_{n+1}}) = \aleph_0$. Из (4) следует

$$f(A_{i_1 i_2 \dots i_n}) \supseteq A_{i_2\dots i_n} \supseteq A_{i_2\dots i_n i_{n+1}}.$$

Поэтому для каждой точки $e^{(j)}_{i_2\dots i_n i_{n+1}} \in A_{i_2\dots i_n i_{n+1}}$, $j \geq 1$, существует точка $e^{(j)}_{i_1 i_2\dots i_n i_{n+1}} \in A_{i_1 i_2\dots i_n}$ такая, что $f(e^{(j)}_{i_1 i_2\dots i_n i_{n+1}}) = e^{(j)}_{i_2\dots i_n i_{n+1}}$. Положим $A_{i_1 i_2\dots i_n i_{n+1}} = [\{e^{(j)}_{i_1\dots i_{n+1}}\}_{j\geq 1}]$. Тогда

$$A_{i_1 i_2\dots i_n i_{n+1}} \subseteq A_{i_1 i_2\dots i_n} \ \text{ и } \ f(A_{i_1 i_2\dots i_n i_{n+1}}) \supseteq A_{i_2\dots i_n i_{n+1}}. \tag{5}$$

Таким образом, утверждение 1) доказано.

2) Выберем произвольным образом и зафиксируем натуральное число $n \geq 2$ и числа $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$. Применяя (5) и (1), получим

$$f^n(A_{i_1\dots i_n}) \supseteq f^{n-1}(A_{i_2\dots i_n}) \supseteq \dots \supseteq f(A_{i_n}) \supset A_{i_1} \cup A_{1-i_1} \supseteq A_{i_1\dots i_n} \cup A_{1-i_1},$$

$$f^n(A_{1-i_1}) \supset f^{n-1}(A_{i_1} \cup A_{1-i_1}) \supset f^{n-1}(A_{1-i_1}) \supset \dots \supset f(A_{1-i_1}) \supset \\ \supset A_{i_1} \cup A_{1-i_1} \supseteq A_{i_1\dots i_n} \cup A_{1-i_1}.$$

Поскольку $A_{i_1\dots i_n} \cap A_{1-i_1} = \emptyset$, то отображение f^n имеет подкову $(A_{i_1\dots i_n}, A_{1-i_1})$. Утверждение 2) доказано.

3) Поскольку для каждого натурального числа $n \geq 1$ и любых чисел $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ континуум $A_{i_1\dots i_n} \in \mathbf{H}$, то $E^{(1)}(A_{i_1\dots i_n}) \neq \emptyset$. Изучим свойства производного множества концевых точек континуума $A_{i_1\dots i_n}$. Покажем, что для любого натурального числа $n \geq 2$ и для любых чисел $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ справедливы следующие утверждения:

3_1) $f(E^{(1)}(A_{i_1 i_2\dots i_n})) \subseteq E^{(1)}(A_{i_2\dots i_n})$;
3_2) $E^{(1)}(A_{i_1\dots i_n}) \cap E^{(1)}(A_{j_1\dots j_n}) = \emptyset$, если $\{i_1, \dots, i_n\} \neq \{j_1, \dots, j_n\}$, где $j_1, \dots, j_n \in \{0, 1\}$;
3_3) $E^{(1)}(A_{i_1\dots i_n}) \subset E^{(1)}(A_{i_1\dots i_{n-1}})$.

Для доказательства 3_1) зафиксируем любое натуральное число $n \geq 2$ и любые числа $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$. Пусть точка $x \in E^{(1)}(A_{i_1\dots i_n})$. Тогда найдется последовательность точек $\{y_s\}_{s\geq 1} \subset E(A_{i_1\dots i_n})$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} y_s = x$. Из построения континуума $A_{i_1\dots i_n}$ вытекает, что $\{y_s\}_{s\geq 1} \subset \overline{f^{-1}(E(A_{i_2\dots i_n}))}$. В силу непрерывности f

$$f(\overline{f^{-1}(E(A_{i_2\dots i_n}))}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(E(A_{i_2\dots i_n})))} = \overline{E(A_{i_2\dots i_n}) \cap f(X)} = \overline{E(A_{i_2\dots i_n})}.$$

Значит, $f(y_s) \in \overline{E(A_{i_2\dots i_n})}$ для любого натурального числа $s \geq 1$. Возможны следующие случаи:

1) существует подпоследовательность $\{f(y_{s_j})\}_{j\geq 1} \subseteq \{f(y_s)\}_{s\geq 1}$ такая, что

$$f(y_{s_j}) \in E(A_{i_2\dots i_n}) \ \text{ для каждого } \ j \geq 1;$$

2) подпоследовательности с указанным свойством не существует.

Пусть имеет место случай 1). В силу построения континуума $A_{i_1 i_2\dots i_n}$ $f(y_{s_j}) \neq f(y_{s_k})$, если $j \neq k$. Поэтому из условия $f(y_{s_j}) \in E(A_{i_2\dots i_n})$ и равенства $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} f(y_{s_j})$ имеем $f(x) \in E^{(1)}(A_{i_2\dots i_n})$. Таким образом, в первом случае утверждение 3_1) доказано.

Пусть имеет место случай 2). Тогда, начиная с некоторого номера s_0, все члены последовательности $f(y_s) \in \overline{E(A_{i_2\dots i_n})} \setminus E(A_{i_2\dots i_n})$, т.е. $f(y_s) \in E^{(1)}(A_{i_2\dots i_n})$, где $s \geq s_0$. В силу замкнутости множества $E^{(1)}(A_{i_2\dots i_n})$ и равенства $f(x) = \lim\limits_{s\to\infty} f(y_s)$ получаем, что $f(x) \in E^{(1)}(A_{i_2\dots i_n})$, и утверждение 3_1) доказано.

Доказательство 3_2) проведем методом математической индукции.

Шаг $n = 2$. Выберем произвольным образом и зафиксируем числа $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{0, 1\}$ такие, что $\{i_1, i_2\} \neq \{j_1, j_2\}$. Так как $E^{(1)}(A_{i_1 i_2}) \subset A_{i_1 i_2}$, то, применяя первое включение утверждения 1) леммы, получим $E^{(1)}(A_{i_1 i_2}) \subset A_{i_1 i_2} \subseteq A_{i_1}$. Аналогично, $E^{(1)}(A_{j_1 j_2}) \subset A_{j_1 j_2} \subseteq A_{j_1}$.

Если $i_1 \neq j_1$, то $A_{i_1} \cap A_{j_1} = \emptyset$. Поэтому $E^{(1)}(A_{i_1 i_2}) \cap E^{(1)}(A_{j_1 j_2}) = \emptyset$ для $i_1 \neq j_1$. Рассмотрим случай, когда $i_1 = j_1$. Тогда $i_2 \neq j_2$. В силу утверждения 3_1)

$$f(E^{(1)}(A_{i_1 i_2})) \subseteq E^{(1)}(A_{i_2}) \subset A_{i_2},$$

$$f(E^{(1)}(A_{j_1 j_2})) \subseteq E^{(1)}(A_{j_2}) \subset A_{j_2}.$$

Так как $i_2 \neq j_2$, то $A_{i_2} \cap A_{j_2} = \emptyset$. Отсюда получаем справедливость утверждения 3_2) для случая $n = 2$.

Предположим истинность утверждения для $n-1$, т. е.

$$E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1}}) \cap E^{(1)}(A_{j_1 \dots j_{n-1}}) = \emptyset \tag{6}$$

для всех $\{i_1, \dots, i_{n-1}\} \neq \{j_1, \dots, j_{n-1}\}$.

Шаг n. Пусть $\{i_1, \dots, i_n\} \neq \{j_1, \dots, j_n\}$. Ввиду утверждения 1) леммы $A_{i_1 \dots i_n} \subseteq A_{i_1 \dots i_{n-1}}$, $A_{j_1 \dots j_n} \subseteq A_{j_1 \dots j_{n-1}}$. Поэтому

$$E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_n}) \subseteq E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1}}),$$

$$E^{(1)}(A_{j_1 \dots j_n}) \subseteq E^{(1)}(A_{j_1 \dots j_{n-1}}).$$

Следовательно, если $\{i_1, \dots, i_{n-1}\} \neq \{j_1, \dots, j_{n-1}\}$, то в силу (6)

$$E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_n}) \cap E^{(1)}(A_{j_1 \dots j_n}) = \emptyset.$$

Рассмотрим случай, когда $i_k = j_k$ для $1 \leq k \leq n-1$. Тогда $i_n \neq j_n$. Из утверждения 3_1) следует

$$f(E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_n})) \subseteq E^{(1)}(A_{i_2 \dots i_n}),$$

$$f(E^{(1)}(A_{j_1 \dots j_n})) \subseteq E^{(1)}(A_{j_2 \dots j_n}).$$

Так как $i_n \neq j_n$, то $\{i_2, \dots, i_n\} \neq \{j_2, \dots, j_n\}$. Поэтому согласно (6)

$$E^{(1)}(A_{i_2 \dots i_n}) \cap E^{(1)}(A_{j_2 \dots j_n}) = \emptyset.$$

Отсюда и из последних двух включений получаем справедливость утверждения 3_2).

Докажем утверждение 3_3). Выберем произвольным образом и зафиксируем натуральное число $n \geq 2$ и числа $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$. В силу утверждения 1) леммы $A_{i_1 \dots i_n} \subseteq A_{i_1 \dots i_{n-1}}$. Поэтому $E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_n}) \subseteq E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1}})$, т. е.

$$E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1} 0}),\ E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1} 1}) \subseteq E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1}}). \tag{7}$$

Докажем строгие включения в (7). В силу утверждения 3_2)

$$E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1} 0}) \cap E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1} 1}) = \emptyset. \tag{8}$$

Так как континуум $A_{i_1 \dots i_n} \in \mathbf{H}$, то $E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1} 0}) \neq \emptyset$, $E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1} 1}) \neq \emptyset$. Отсюда и из (7), (8) получаем $E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1} i_n}) \neq E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1}})$ для каждого $i_n \in \{0, 1\}$. Утверждение 3_3) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 3) леммы. Пусть $i_n \in \{0, 1\}$ для любого натурального числа n. Положим

$$S_{i_1 \dots i_n \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_n}).$$

Так как для каждого натурального числа $n \geq 1$ и любых чисел $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ континуум $A_{i_1 \dots i_n} \in \mathbf{H}$, то множество $E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_n}) \neq \emptyset$. Ввиду 3_3) $E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_n}) \subset E^{(1)}(A_{i_1 \dots i_{n-1}})$. Значит,

$S_{i_1\dots i_n\dots} \neq \emptyset$ для любых $i_n \in \{0,1\}$. Применяя утверждение 3_1), получим, что для любых $i_n \in \{0,1\}$, $n \geq 1$,

$$f(S_{i_1\dots i_n\dots}) = f\Big(\bigcap_{n\geq 1} E^{(1)}(A_{i_1\dots i_n})\Big) = f\Big(\bigcap_{n\geq 2} E^{(1)}(A_{i_1\dots i_n})\Big) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{n\geq 2} f(E^{(1)}(A_{i_1\dots i_n})) \subseteq \bigcap_{n\geq 2} E^{(1)}(A_{i_2\dots i_n}) = S_{i_2\dots i_n\dots}.$$

Таким образом,

$$f(S_{i_1\dots i_n\dots}) \subseteq S_{i_2\dots i_n\dots}. \tag{9}$$

Положим $D = \bigcup\limits_{i_n\in\{0,1\}} S_{i_1\dots i_n\dots}$. Тогда из (9) имеем

$$f(D) = f\Big(\bigcup_{i_n\in\{0,1\}} S_{i_1\dots i_n\dots}\Big) = \bigcup_{i_n\in\{0,1\}} f(S_{i_1\dots i_n\dots}) \subseteq \bigcup_{i_n\in\{0,1\}} S_{i_2\dots i_n\dots} = D.$$

Из определения множества D следует

$$D \subseteq E^{(1)}(A_0) \cup E^{(1)}(A_1). \tag{10}$$

Пусть

$$K = \begin{cases} D, & \text{если } f(D) = D; \\ \bigcap\limits_{i\geq 1} f^i(D), & \text{если } f(D) \subset D. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда $f(K) = K$. Положив $\widetilde{S}_{i_1\dots i_n\dots} = K \cap S_{i_1\dots i_n\dots}$, получим

$$K = \bigcup_{i_n\in\{0,1\}} \widetilde{S}_{i_1\dots i_n\dots} \ \text{ и } \ f(\widetilde{S}_{i_1\dots i_n\dots}) = \widetilde{S}_{i_2\dots i_n\dots}. \tag{12}$$

Таким образом, $f_{|K}$ полусопряжено отображению сдвига в пространстве бесконечных двоичных последовательностей. Покажем, что $f(K\cap A_s) = K$ для любого $s \in \{0,1\}$. Используя (12), получим

$$f(K\cap A_s) = f\Big(\bigcup_{i_n\in\{0,1\}} \widetilde{S}_{si_2\dots i_n\dots}\Big) = \bigcup_{i_n\in\{0,1\}} \widetilde{S}_{i_2\dots i_n\dots} = K$$

и для любого $s \in \{0,1\}$

$$f([K\cap A_s]) \supset [K] \supset [K\cap A_0] \cup [K\cap A_1]. \tag{13}$$

Положим $C = [K\cap A_0]$, $D = [K\cap A_1]$. Так как $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, то $C \cap D = \emptyset$. Из (13) вытекает $f(C)\cap f(D) \supseteq C \cup D$, т. е. f имеет подкову (C,D). В силу (10) и (11) получим $K\cap A_0 \subseteq E^{(1)}(A_0)$ и $K \cap A_1 \subseteq E^{(1)}(A_1)$. Следовательно, подконтинуумы $C \subseteq [E^{(1)}(A_0)]$, $D \subseteq [E^{(1)}(A_1)]$. Таким образом, утверждение 3) доказано. □

Лемма 10. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X и для любого натурального числа $n \geq 1$ f имеет подковы (C_n, D_n) такие, что $C_n \subseteq [E^{(1)}(C_{n-1})]$, $D_n \subseteq [E^{(1)}(D_{n-1})]$ для $n \geq 2$. Тогда f имеет подкову (C_α, D_α), где $C_\alpha = \bigcap\limits_{n\geq 1} C_n$, $D_\alpha = \bigcap\limits_{n\geq 1} D_n$.*

Доказательство. Так как C_n и D_n — континуумы для любого натурального числа $n \geq 1$, то согласно теореме Кантора ([14], § 9) $C_\alpha \neq \emptyset$, $D_\alpha \neq \emptyset$. Из ([11], § 47, теорема 5) следует, что C_α, D_α — континуумы. Поскольку $C_n \cap D_n = \emptyset$, то $C_\alpha \cap D_\alpha = \emptyset$.

Так как $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \cdots$, то $f\Big(\bigcap\limits_{n\geq 0} C_n\Big) = \bigcap\limits_{n\geq 0} f(C_n)$. Значит,

$$f(C_\alpha) = \bigcap_{n\geq 0} f(C_n) \supset \bigcap_{n\geq 0} (C_n \cup D_n) = \Big(\bigcap_{n\geq 0} C_n\Big) \cap \Big(\bigcap_{n\geq 0} D_n\Big) = C_\alpha \cup D_\alpha.$$

Аналогично доказывается, что $f(D_\alpha) \supset C_\alpha \cup D_\alpha$. Поэтому f имеет подкову (C_α, D_α). $\square$

Лемма 11. *Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение дендрита X и f имеет подкову (A, B), где $A, B \in \mathbf{H}$. Тогда существует натуральное число $s \geq 1$ такое, что f^s имеет дуговую подкову.*

Доказательство. В силу утверждения 2) леммы 9 для любого натурального числа $n \geq 2$ существуют подконтинуумы $A_{i_1\dots i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$, такие, что отображение f^n имеет подковы $(A_{i_1 i_2\dots i_n}, A_{1-i_1})$. Возможны следующие случаи:

a) существуют натуральное число $N \geq 2$ и числа $I_1, \dots, I_N \in \{0, 1\}$ такие, что континуум $A_{I_1\dots I_N} \notin \mathbf{H}$;

b) для каждого натурального числа $n \geq 2$ и любых чисел $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ континуум $A_{i_1\dots i_n} \in \mathbf{H}$.

Для случая a) положим $C = A_{I_1\dots I_N}$, $D = A_{1-I_1}$. Тогда в силу утверждения 2) леммы 9 отображение f^N имеет подкову (C, D), где $C \notin \mathbf{H}$. В силу лемм 4 и 5 существует натуральное число K такое, что f^{NK} имеет дуговую подкову.

Для случая b) в силу утверждения 3) леммы 9 отображение f имеет подкову (C_1, D_1) такую, что $C_1 \subseteq [E^{(1)}(A)]$, $D_1 \subseteq [E^{(1)}(B)]$. Если хотя бы один из подконтинуумов C_1 или D_1 не принадлежит множеству $\mathbf{H}$, то, применяя утверждения лемм 4 и 5, получим справедливость леммы. В противном случае отображение f имеет подкову (C_1, D_1), где континуумы $C_1, D_1 \in \mathbf{H}$. Таким образом, выполнены условия леммы для континуумов C_1, D_1.

Повторяя доказательство леммы 11 с самого начала, получим один из следующих случаев:

b$_1$) на K-м повторении, $K \geq 2$, отображение f имеет подкову (C_K, D_K) такую, что один из континуумов C_K или D_K не принадлежит множеству $\mathbf{H}$;

b$_2$) на K-м повторении, $K \geq 2$, отображение f имеет подкову (C_K, D_K), где $C_K, D_K \in \mathbf{H}$, но выполнено условие a);

b$_3$) для любого натурального числа k отображение f имеет подкову (C_k, D_k) такую, что $C_k, D_k \in \mathbf{H}$, $C_k \subseteq [E^{(1)}(C_{k-1})]$, $D_k \subseteq [E^{(1)}(D_{k-1})]$ и для каждой подковы (C_k, D_k) выполнено условие b).

Если имеют место случаи b_1) или b_2), то (как это было показано выше) лемма 11 доказана. Пусть имеет место условие b_3). Тогда выполнены условия леммы 10, в силу которой отображение f имеет подкову (C_α, D_α), где $C_\alpha = \bigcap\limits_{k\geq 1} C_k$, $D_\alpha = \bigcap\limits_{k\geq 1} D_k$. Если хотя бы один из подконтинуумов C_α или D_α не принадлежит множеству $\mathbf{H}$, то в силу лемм 4 и 5 получаем справедливость леммы. В противном случае для подковы (C_α, D_α) выполнены условия леммы 11. Повторяя ее доказательство с самого начала, применяя трансфинитную индукцию и утверждение леммы 7, получим существование порядкового числа $\gamma < \omega_1$, для которого либо отображение f имеет подкову (C_γ, D_γ), где хотя бы один из подконтинуумов C_γ или D_γ не принадлежит множеству $\mathbf{H}$, либо для подковы (C_γ, D_γ) выполнено условие a). В обоих случаях, применяя утверждения лемм 4 и 5, получим справедливость леммы 11. $\square$

Справедливость теоремы 1 вытекает из лемм 4, 5 и 11.

Литература

[1] Block A., Teoh E. *How little is little enough*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (4), 969–978 (2003).
[2] Libre J., Misiurewicz M. *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology **32**, 649–664 (1993).
[3] Makhrova E.N. *Homoclinic points and topological entropy of a continuous mapping of a dendrite*, J. Math. Sci. **158** (2), 241–248 (2009).
[4] Kocan Zd., Korneka-Kurkova V., Malek M. *Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites*, Ergodic theory Dynam. Sys. **31** (1), 165–175 (2011).
[5] Ефремова Л.С., Махрова Е.Н. *Динамика монотонных отображений дендритов*, Матем. сб. **192** (6), 15–30 (2001).
[6] Arévalo D., Charatonic W.J., Covarrubias P.P., Simón L. *Dendrites with a closed set of end points*, Topology Appl. **115**, 1–17 (2001).
[7] Пайтген Х.О., Рихтер П.Ч. *Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем* (Мир, М., 1993).
[8] Agronsky S.J., Ceder J.G. *What sets can be ω-limit sets in E^n*, Real Anal. Exchange **17**, 97–109 (1991/1992).
[9] Balibrea F., García-Guirao J.L. *Continua with empty interior as ω-limit sets*, Appl. General Topology **6**, 195–205 (2005).
[10] Nadler S. *Continuum theory* (Marcel Dekker, N.Y., 1992).
[11] Куратовский К. *Топология.* Т. 2 (Мир, М., 1969).
[12] Zafiridou S. *Classification of dendrites with a countable set of end points*, Topology Appl. **159**, 1661–1669 (2012).
[13] Махрова Е.Н. *Существование линейной подковы непрерывных отображений дендритов*, Изв. вузов. Матем., № 3, 40–46 (2013).
[14] Александров П.С. *Введение в теорию множеств и общую топологию* (Наука, М., 1977).

Е.Н. Махрова

доцент, кафедра дифференциальных уравнений и математического анализа,
Нижегородский государственный университет,
пр. Гагарина, д. 23, г. Н. Новгород, 603950, Россия,

e-mail: elena_makhrova@inbox.ru

E.N. Makhrova

Structure of dendrites admitting an existence of arc horseshoe

Abstract. We say that a dendrite X admits an existence of an arc horseshoe if for any continuous map f of X into itself which has a horseshoe (A, B) one can find a natural number n such that n-th iteration of f has an arc horseshoe. We investigate the structure of dendrites admitting the existence of an arc horseshoe.

Keywords: dendrite, horseshoe, arc horseshoe.

E.N. Makhrova

Associate Professor, Chair of Differential Equations and Mathematical Analysis,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: elena_makhrova@inbox.ru