ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.929

Е.И. БРАВЫЙ

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ

1. Введение

Вопрос о том, при каких условиях решение x краевой задачи

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t), \quad t \in [a,b]; \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{1}$$

зависит от функции f монотонно, привлек внимание многих математиков и рассматривался как для обыкновенных дифференциальных операторов $\mathcal{L}$ (напр., [1], [2]), так и для функционально-дифференциальных. Будем рассматривать линейный сингулярный функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ второго порядка. Если в этом случае задача (1) имеет единственное решение $x = Gf$ при любой правой части f, то линейный оператор G называется оператором Грина краевой задачи (1). Вопрос о монотонной зависимости решения задачи (1) от правой части сводится к условиям монотонности оператора Грина G краевой задачи.

Линейный оператор $A : X \to Y$, где X и Y — полуупорядоченные пространства, будем называть *изотонным* (*антитонным*) и обозначать $A \geqslant 0$ ($A \leqslant 0$), если $Ax_2 \geqslant Ax_1$ ($Ax_2 \leqslant Ax_1$) при всех $x_1 \leqslant x_2$, $x_1, x_2 \in X$.

Введем следующие обозначения: R^1 — пространство вещественных чисел; $C[a,b]$ — пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to R^1$ с нормой $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; $L[a,b]$ — пространство классов эквивалентности суммируемых функций $z : [a,b] \to R^1$ с нормой $\|z\|_L = \int\limits_a^b |z(t)|\,dt$; χ_e — характеристическая функция множества $e \subset R^1$; $\rho(K)$ — спектральный радиус оператора K; I — тождественный оператор в соответствующем пространстве.

В пространствах $C[a,b]$ и $L[a,b]$ будем использовать естественную полуупорядоченность.

Для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка антитонность оператора Грина задачи (1) эквивалентна наличию положительного решения однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ (напр., [3], [4]). В этом случае оператор Грина будет строго антитонен (см. определение 1.2 далее). Необходимые условия антитонности оператора Грина задачи (1) для функционально-дифференциальных уравнений изучены сравнительно мало: если оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}x \stackrel{\text{def}}{=} \pi\ddot{x} - Tx,$$

где $T : C[a,b] \to L[a,b]$, $T \leqslant 0$ и $\pi(t) = (t-a)^{\mu_1}(b-t)^{\mu_2}$, $0 \leqslant \mu_1, \mu_2 \leqslant 1$, то необходимым и достаточным условием антитонности оператора Грина G является неравенство $\rho(G_0 T_{C[a,b]\to C[a,b]}) < 1$ [5], [6]. Здесь G_0 — оператор Грина задачи

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) = f(t), \quad t \in [a,b]; \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96195, 99-01-01278) и Конкурсного центра по исследованиям в области фундаментального естествознания, Санкт-Петербург.

Оператор Грина $G_0 : L[a,b] \to C[a,b]$ антитонен и имеет представление

$$(G_0 z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b G_0(t,s)z(s)\,ds \equiv \int_a^t \frac{(t-b)(s-a)}{(b-a)\pi(s)} z(s)\,ds + \int_t^b \frac{(s-b)(t-a)}{(b-a)\pi(s)} z(s)\,ds, \quad t \in [a,b].$$

В случае, когда оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}x \stackrel{\text{def}}{=} \pi\ddot{x} + T^+x - T^-x,$$

где $T^+, T^- : C[a,b] \to L[a,b]$, $T^+, T^- \geqslant 0$, для получения достаточных условий антитонности оператора Грина требуется условие антитонности оператора Грина G_1 задачи

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - (T^-x)(t) = f(t), \ \ t \in [a,b]; \quad x(a) = 0, \ \ x(b) = 0.$$

Эта задача, конечно, имеет и самостоятельный интерес. В случае, когда функция $\pi(t)$ обращается в нуль на отрезке $[a,b]$, задачу будем называть сингулярной. Достаточные условия антитонности оператора Грина G_1 получены в [7]–[11] для операторов без сингулярностей и в [12] — для операторов с сингулярностями. Утверждение о необходимом условии антитонности оператора Грина G_1 при $\pi(t) \equiv 1$ и вольтерровом операторе T приведено в [13].

Во всех этих работах условия антитонности оператора G_1 получены в тех случаях, когда вронскиан фундаментальной системы решений однородного уравнения $\mathcal{L}_1 x = 0$ не обращается в нуль на интервале (a,b). Тогда функционально-дифференциальное уравнение эквивалентно некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению [10].

Следующий пример краевой задачи показывает, что необращение в нуль вронскиана фундаментальной системы решений уравнения $\mathcal{L}_1 x = 0$ вовсе не является необходимым для антитонности оператора G_1.

Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) - p(t)x(h(t)) = f(t), \ \ t \in [-1,1]; \quad x(-1) = 0, \ \ x(1) = 0, \tag{3}$$

где

$$p(t) = \begin{cases} 2/c_1^2 & \text{при } t \in [-1,0); \\ 2/c_2^2 & \text{при } t \in [0,1], \end{cases} \qquad c_1 \in [-1,0), \quad c_2 \in (0,1],$$

$$h(t) = \begin{cases} c_1 & \text{при } t \in [-1,0); \\ c_2 & \text{при } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Множество решений однородного уравнения $\mathcal{L}_1 x = 0$ двумерно, функции $x_1(t) = t^2\chi_{[0,1]}(t)$, $x_2(t) = t^2\chi_{[-1,0]}(t)$ образуют фундаментальную систему решений. Вронскиан этой системы решений — тождественный нуль на всем отрезке $[-1,1]$. Таким образом, в частности, ни одна из задач $\mathcal{L}_1 x = f$, $x(\tau) = 0$, $\dot{x}(\tau) = 0$ при всех $\tau \in [-1,1]$ не является однозначно разрешимой. Тем не менее задача (3) однозначно разрешима. Непосредственным построением оператора Грина доказывается

Теорема 1.1. *Оператор Грина задачи* (3) *антитонен тогда и только тогда, когда* $-1 \leqslant c_1 \leqslant -1/2$ *и* $1/2 \leqslant c_2 \leqslant 1$.

Нас интересуют необходимые условия антитонности оператора Грина G задачи

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - (Tx)(t) = f(t), \ \ t \in [a,b]; \quad x(a) = 0, \ \ x(b) = 0, \tag{4}$$

где $T : C[a,b] \to L[a,b]$ — линейный ограниченный оператор, $\pi(t) = (t-a)^{\mu_1}(b-t)^{\mu_2}$, $0 \leqslant \mu_1, \mu_2 \leqslant 1$. Решение задачи (4) ищется в банаховом пространстве D всех функций $x : [a,b] \to R^1$, обладающих следующими свойствами:

1) функция x абсолютно непрерывна на $[a,b]$;

2) функция $\dot{x}$ абсолютно непрерывна на каждом замкнутом промежутке из (a,b);

3) $\int\limits_a^b \pi(t)|\ddot{x}(t)|\,dt < \infty$.

Норма в пространстве D определена равенством

$$\|x\|_D = |x(a)| + |x(b)| + \int_a^b \pi(t)|\ddot{x}(t)|\,dt.$$

В работе [6] показано, что пространство D непрерывно вложено в пространство абсолютно непрерывных функций и, следовательно, в пространство $C[a,b]$. Кроме того, там же доказано, что задача $\pi\ddot{x} = f$, $x(a) = c_1$, $x(b) = c_2$ имеет единственное решение $x \in D$ при всех $f \in L[a,b]$, $c_1, c_2 \in R^1$. Если $\pi(t) \equiv 1$, то пространство D совпадает с пространством всех функций с абсолютно непрерывной производной.

Оператор Грина G как линейный ограниченный оператор, действующий из пространства суммируемых функций в пространство непрерывных функций, имеет интегральное представление. Ядро этого представления, функция $G(t,s)$, $t,s \in [a,b]$, называется функцией Грина краевой задачи. Очевидно, что при каждом $t \in [a,b]$ функция $G(t,\cdot)$ может быть произвольно изменена на любом множестве меры нуль. Таким образом, любое утверждение относительно функции Грина следует понимать так: среди эквивалентных (т. е. задающих один и тот же оператор) функций Грина найдется функция Грина, удовлетворяющая данному утверждению. Очевидно, что антитонность оператора Грина эквивалентна неположительности функции Грина.

Определение 1.1. Следуя [12], будем говорить, что оператор $\mathcal{L}$ обладает свойством A, если краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(\tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau) = 0$$

однозначно разрешима при всех $f \in L[a,b]$ и ее оператор Грина изотонен при всех $\tau \in (a,b)$.

Замечание 1.1. Если оператор $\mathcal{L}$ обладает свойством A, то фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ двумерна и ее вронскиан отличен от нуля в каждой точке интервала (a,b).

Определение 1.2. Назовем антитонный оператор Грина G задачи (4) строго антитонным, если для каждой неотрицательной не эквивалентной нулю суммируемой функции z выполнено неравенство

$$(Gz)(t) < 0 \quad \text{при всех } \ t \in (a,b).$$

Замечание 1.2. Оператор Грина задачи (4) строго антитонен тогда и только тогда, когда для этой задачи справедлив “принцип максимума”: при неотрицательной не равной тождественно нулю правой части решение краевой задачи достигает своего максимума только на концах отрезка.

В следующем разделе получим необходимые условия антитонности оператора Грина. В § 3 исследуется связь между антитонностью оператора Грина и свойством A. В § 4 при некоторых дополнительных условиях доказана эквивалентность строгой антитонности оператора Грина и свойства A.

2. Необходимые условия антитонности оператора Грина

Определим при $s \in (a,b)$ непрерывные функции d_s^a и d_s^b равенствами

$$d_s^a(t) = \chi_{[a,s]}(t)\frac{s-t}{s-a}, \quad t \in [a,b],$$
$$d_s^b(t) = \chi_{[s,b]}(t)\frac{t-s}{b-s}, \quad t \in [a,b].$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия*

$$\lim_{s\to b-}\int_a^b \left|(Td_s^b)(\theta)\right|\,d\theta=0,\quad \lim_{s\to a+}\int_a^b \left|(Td_s^a)(\theta)\right|\,d\theta=0. \tag{5}$$

Тогда, если краевая задача (4) *имеет единственное решение* $x\in D$ *при всех* $f\in L[a,b]$ *и ее оператор Грина антитонен, то решения задач*

$$(\mathcal{L}x)(t)=0,\ \ t\in[a,b];\quad x(a)=0,\ \ x(b)=1 \tag{6}$$

и

$$(\mathcal{L}x)(t)=0,\ \ t\in[a,b];\quad x(a)=1,\ \ x(b)=0 \tag{7}$$

неотрицательны.

Замечание 2.1. Если T — антитонный оператор, то решения задач (6) и (7) положительны в интервале (a,b) и без условий (5).

Замечание 2.2. В ([14], с. 317) доказано, что любой регулярный линейный ограниченный оператор $T:C[a,b]\to L[a,b]$, т. е. представимый в виде разности двух изотонных операторов, имеет представление в виде интеграла Стилтьеса

$$(Tx)(t)=\int_a^b x(s)\,d_s r(t,s), \tag{8}$$

где $\int\limits_a^b |r(t,s)|\,dt<\infty$ при почти всех $s\in[a,b]$, функции $r(t,\cdot)$ имеют ограниченное изменение на $[a,b]$ и $\int_a^b \operatorname*{Var}\limits_{s\in[a,b]} r(t,s)\,dt<\infty$. При этом, если оператор T изотонен, то при почти всех $t\in[a,b]$ функции $r(t,\cdot)$ не убывают на $[a,b]$.

Если оператор $T:C[a,b]\to L[a,b]$ имеет представление (8), то условия (5) выполнены тогда и только тогда, когда для почти всех $t\in[a,b]$ выполнены равенства

$$\lim_{s\to a+} r(t,s)=r(t,a),\quad \lim_{s\to b-} r(t,s)=r(t,b). \tag{9}$$

Это условие использовалось и в работе [13].

Доказательство. Задача (4) эквивалентна уравнению в пространстве $C[a,b]$

$$x=G_0Tx+G_0f, \tag{10}$$

где, как и ранее, G_0 — оператор Грина задачи (2). Из того, что уравнение (10) имеет единственное решение при всех $f\in L$, следует, что оператор $I-G_0T:C[a,b]\to C[a,b]$ обратим [15]. Обратный оператор $B\stackrel{\text{def}}{=}(I-G_0T)^{-1}$ связан с оператором Грина G равенством $Gf=BG_0f$ для каждой $f\in L[a,b]$.

Операторы G_0 и G антитонные. Кроме того, оператор G_0 отображает множество неотрицательных функций на все множество функций из D, равных нулю в точках a и b и выпуклых вниз. Таким образом, оператор B отображает выпуклые вверх неотрицательные функции с абсолютно непрерывной производной, равные нулю в точках a и b, в неотрицательные функции. Оператор B действует непрерывно в пространстве $C[a,b]$. Поэтому он отображает любую выпуклую вверх непрерывную неотрицательную функцию, обращающуюся в нуль в точках a и b, в неотрицательную функцию.

Для каждого $s\in(a,b)$ обозначим

$$f_s(t)=\frac{t-a}{b-a}-\chi_{[s,b]}(t)\frac{t-s}{b-s},\quad t\in[a,b],$$
$$g_s(t)=\frac{b-t}{b-a}-\chi_{[a,s]}(t)\frac{s-t}{s-a},\quad t\in[a,b].$$

Кроме того, введем обозначения

$$f_b(t) = \frac{t-a}{b-a}, \quad g_a(t) = \frac{b-t}{b-a}, \quad t \in [a,b].$$

Уравнение $x = G_0Tx + f$ имеет единственное решение $x \in C[a,b]$ при любом $f \in C[a,b]$. Поэтому единственным образом определены функции x_b, x_s, y_a, y_s, удовлетворяющие соответственно равенствам

$$x_b = G_0Tx_b + f_b, \quad x_s = G_0Tx_s + f_s,$$
$$y_a = G_0Ty_a + g_a, \quad y_s = G_0Ty_s + g_s.$$

Так как оператор $(I - G_0T)^{-1}$ отображает любую непрерывную выпуклую вверх функцию, равную нулю в точках a и b, в неотрицательную функцию, то $x_s \geqslant 0$, $y_s \geqslant 0$ при всех $s \in (a,b)$.

Из того, что задача (4) однозначно разрешима, следует, что обратим оператор $I - TG_0 : L[a,b] \to L[a,b]$. Поэтому решение уравнения $x = G_0Tx + f$ можно записать в виде

$$x = G_0(I - TG_0)^{-1}Tf + f$$

(действительно, $Tx = TG_0Tx + Tf$, следовательно, $Tx = (I - TG_0)^{-1}Tf$).

Таким образом, $x_b - x_s = G_0T(x_b - x_s) + f_b - f_s$. Поэтому $x_b - x_s = G_0(I - TG_0)^{-1}T(f_b - f_s) + f_b - f_s$. Аналогично получаем $y_a - y_s = G_0(I - TG_0)^{-1}T(g_a - g_s) + g_a - g_s$. Отметим, что $d_s^a = g_a - g_s$, $d_s^b = f_b - f_s$. Поэтому условия (5) дают следующие равенства: $y_a - g_a = \lim\limits_{s\to a+}(y_s - g_s)$, $x_b - f_b = \lim\limits_{s\to b-}(x_s - f_s)$ или $y_a = \lim\limits_{s\to a+}(y_s + g_a - g_s)$, $x_b = \lim\limits_{s\to b-}(x_s + f_b - f_s)$ (здесь пределы рассматриваются в пространстве $C[a,b]$).

Так как $g_a \geqslant g_s$, $f_b \geqslant f_s$ и $y_s \geqslant 0$, $x_s \geqslant 0$, то $y_a \geqslant 0$, $x_b \geqslant 0$. Более того, $y_a(t) = \lim\limits_{s\to a+} y_s(t)$ для каждого $t \in (a,b]$; $x_b(t) = \lim\limits_{s\to b-} x_s(t)$ для каждого $t \in [a,b)$. Очевидно, y_a удовлетворяет задаче (7) и функция x_b удовлетворяет задаче (6). $\square$

Замечание 2.3. В условиях теоремы 2.1 выполнены равенства

$$y_a(t) = -\lim_{s\to a+} \frac{G(t,s)\pi(s)}{s-a}, \quad x_b(t) = -\lim_{s\to b-} \frac{G(t,s)\pi(s)}{b-s}, \quad t \in [a,b], \tag{11}$$

где y_a, x_b — решения задач (7), (6) соответственно.

Действительно, имеют место соотношения

$$y_s(t) = -\frac{G(t,s)\pi(s)}{s-a}, \quad x_s(t) = -\frac{G(t,s)\pi(s)}{b-s}, \quad t \in [a,b]$$

(прямой подстановкой можно убедиться, что, напр., функция

$$x(t) = -\int_a^b y_s(t)(s-a)/\pi(s) f(s)\, ds, \quad t \in [a,b],$$

удовлетворяет однородным краевым условиям и уравнению $\pi\ddot{x} = Tx + f$ при ограниченном операторе $T : C[a,b] \to L[a,b]$). Отсюда следуют равенства (11).

Следствие 2.1. Оператор Грина задачи

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - \int_a^b R(t,s)x(s)\, ds = f(t), \ \ t \in [a,b]; \quad x(a) = 0, \ \ x(b) = 0 \tag{12}$$

не является антитонным, если $R(t,s) \geqslant \varepsilon$, $t,s \in [a,b]$, при некотором $\varepsilon > 0$, и либо $\mu_1 = 1$, либо $\mu_2 = 1$.

Доказательство. Предположим, что $\mu_1 = 1$. Покажем, что решение x_b задачи $\mathcal{L}_1 x = 0$, $x(a) = 0$, $x(b) = 1$ не может быть неотрицательным в (a, b). Если $x_b(t) \geqslant 0$ при $t \in (a, b)$, то найдется такое число $\delta > 0$, что $\pi(t)\ddot{x}_b(t) \geqslant \delta$ при почти всех $t \in [a, b]$. Поэтому $x_b(t) \leqslant y(t)$, $t \in [a, b]$, где y — решение задачи $(t-a)\ddot{y}(t) = \delta_1 \overset{\text{def}}{=} \delta(b-a)^{-\mu_2}$, $t \in [a, b]$; $y(a) = 0$, $y(b) = 1$. Имеем

$$y(t) = \delta_1 (t-a) \ln \frac{t-a}{b-a} + \frac{t-a}{b-a}, \quad t \in (a, b].$$

Так как $y(a) = 0$ и $\lim\limits_{t \to a+} \dot{y}(t) = -\infty$, то функция y, а следовательно, и функция x_b принимают отрицательные значения в (a, b). Таким образом, по теореме 2.1 оператор Грина задачи (12) не может быть антитонным.

В случае $\mu_2 = 1$ доказательство аналогично. $\square$

3. Свойство A и антитонность оператора Грина

В работе [12] показано, что если оператор T изотонен и оператор $\mathcal{L}$ обладает свойством A, то оператор Грина задачи (4) является строго антитонным. Там же показано, что оператор $\mathcal{L}$ при изотонном операторе T обладает свойством A тогда и только тогда, когда решения задач (6), (7) положительны в интервале (a, b).

Обратить теорему 2.1 нельзя: пример краевой задачи (3) показывает, что условия (5) вместе с однозначной разрешимостью двухточечной задачи и неотрицательностью решений задач (6), (7) еще не гарантируют антитонность оператора Грина задачи (4) даже при изотонном операторе T в случае, когда $-1/2 < c_1 < 0$ или $0 \leqslant c_2 < 1/2$.

Теорема 3.1. *Пусть оператор T изотонен, выполнены условия* (5), *фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}x = 0$ двумерна и ее вронскиан не обращается в нуль на интервале (a, b). Тогда оператор Грина задачи* (4) *антитонен тогда и только тогда, когда выполнено свойство A.*

Доказательство. В [12] показано, что при изотонном операторе T из свойства A следует строгая антитонность оператора Грина.

Если вронскиан фундаментальной системы решений уравнения $\mathcal{L}x = 0$ не обращается в нуль на интервале (a, b), то при изотонном операторе T неотрицательные решения задач (6), (7) положительны на интервале (a, b). Таким образом, как показано в [12], оператор $\mathcal{L}$ обладает свойством A. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть оператор T изотонен, выполнены условия* (5) *и оператор Грина задачи* (4) *антитонен. Тогда, если вронскиан фундаментальной системы решений уравнения $\mathcal{L}x = 0$ отличен от нуля в некоторой точке $\tau \in (a, b)$, то оператор Грина задачи*

$$(\mathcal{L}x)(t) = f, \quad t \in [a, b]; \quad x(\tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau) = 0 \tag{13}$$

изотонен.

Доказательство. Краевая задача (13) эквивалентна уравнению

$$x(t) = (W_\tau T x)(t) + (W_\tau f)(t), \quad t \in [a, b],$$

в пространстве $C[a, b]$. Здесь $W_\tau : L[a, b] \to C[a, b]$ — оператор Грина задачи

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \overset{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) = f(t), \quad t \in [a, b]; \quad x(\tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau) = 0.$$

Отметим, что оператор W_τ изотонен.

Решения задач (6), (7) неотрицательны (теорема 2.1). Оператор T изотонен, следовательно, решение первой задачи не убывает, а решение второй из этих задач не возрастает, и, кроме того, по условию теоремы оба эти решения не обращаются в нуль в точке τ. Поэтому существует такая линейная комбинация u этих решений с неотрицательными коэффициентами, что $u(t) > 0$ при всех $t \in [a, b]$ и $\dot{u}(\tau) = 0$. Следовательно, положительная функция u удовлетворяет равенству

$$u(t) = (W_\tau T u)(t) + u(\tau), \quad t \in [a, b],$$

причем $u(\tau) > 0$. Таким образом, спектральный радиус изотонного оператора $W_\tau T$ меньше единицы, и оператор Грина задачи (13)

$$W = (I - W_\tau T)^{-1} W_\tau = (I + W_\tau T + (W_\tau T)^2 + \cdots) W_\tau$$

изотонен (напр., [16]). $\square$

4. Условия строгой антитонности оператора Грина

Как уже было отмечено, в [12] показано, что положительность решений задач (6) и (7) достаточна для строгой антитонности оператора Грина задачи (4) при изотонном T. Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях эти условия также и необходимы для строгой антитонности оператора Грина, что означает эквивалентность свойства A и строгой антитонности оператора Грина.

Теорема 4.1. *Пусть оператор $T : C[a, b] \to L[a, b]$ имеет представление* (8), *в котором при почти всех $t \in (a, b)$*

$$r(t, s) = r(t, a) \text{ при всех } s \text{ из некоторой правой окрестности точки } a;$$
$$r(t, s) = r(t, b) \text{ при всех } s \text{ из некоторой левой окрестности точки } b.$$

Тогда, если оператор Грина G задачи (4) *строго антитонен, то решения задач* (6) *и* (7) *положительны в интервале (a, b).*

Замечание 4.1. В условиях теоремы 4.1 не требуется изотонность оператора T и выполнены условия (9).

Для доказательства теоремы потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 4.1. *Для каждого $t \in [a, b]$ функция Грина $G(t, \cdot)$ краевой задачи* (4) *удовлетворяет при почти всех $s \in [a, b]$ уравнению*

$$G(t, s) - (TG_0)^*(G(t, \cdot))(s) = G_0(t, s). \tag{14}$$

Доказательство. Краевая задача $\pi\ddot{x} - Tx = f$, $x(a) = 0$, $x(b) = 0$ может быть с помощью представления $x = G_0(\pi\ddot{x})$ записана в виде $Q(\pi\ddot{x}) = f$, где $Q = I - TG_0$, $Q : L[a, b] \to L[a, b]$.

Тогда имеем

$$G = G_0(I - TG_0)^{-1}$$

и

$$GQf = G_0 Q^{-1} Q f = G_0 f, \quad f \in L[a, b].$$

При каждом $t \in [a, b]$ и каждой функции $f \in L[a, b]$ имеет место равенство

$$\int_a^b G(t, s)(Qf)(s)\, ds = \int_a^b Q^*[G(t, \cdot)](s) f(s)\, ds,$$

где сопряженный оператор Q^* действует в пространстве ограниченных в существенном функций.

Таким образом, при каждом $t \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\int_a^b [G(t, s) - (TG_0)^*(G(t, \cdot))(s)] f(s)\, ds = \int_a^b G_0(t, s) f(s)\, ds$$

при всех $f \in L[a, b]$. Отсюда следует равенство (14). $\square$

С помощью прямых вычислений получаем следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть оператор $T : C[a,b] \to L[a,b]$ имеет представление* (8). *Тогда для каждой функции $f \in L[a,b]$ при почти всех $s \in [a,b]$ выполнено равенство*

$$(TG_0)^*(f)(s) = -\frac{1}{\pi(s)} \int_a^b K(s,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где

$$K(s,\xi) = \int_a^b (r(\xi,\theta) - r(\xi,a))\, d\theta \frac{s-a}{b-a} - \int_a^s (r(\xi,\theta) - r(\xi,a))\, d\theta. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 4.1. При фиксированном $t \in (a,b)$ из лемм 4.1 и 4.2 следует

$$\pi(s) G(t,s) = \varphi(t,s) - \psi(t,s), \tag{16}$$

где

$$\varphi(s) = \begin{cases} \dfrac{(t-b)(s-a)}{b-a} & \text{при } a \leqslant s \leqslant t < b; \\ \dfrac{(t-a)(s-b)}{b-a} & \text{при } b \geqslant s > t \geqslant a, \end{cases}$$

$$\psi(t,s) = \int_a^b K(s,\xi) G(t,\xi)\, d\xi, \quad s \in [a,b],$$

функция $K(s,\xi)$ определена равенством (15).

Поскольку $r(\xi,\cdot) = \text{const}$ при почти всех ξ в некоторых окрестностях точек a и b, то в этих окрестностях и при этих ξ выполняется равенство

$$\frac{\partial K(s,\xi)}{\partial s} = \int_a^b (r(\xi,\theta) - r(\xi,a))\, d\theta \frac{1}{b-a}.$$

Таким образом, функция $\psi(t,\cdot)$, а следовательно, и функция $G(t,\cdot)\pi(\cdot)$ линейны в некоторых окрестностях точек a и b при каждом $t \in (a,b)$. Так как оператор G строго антитонный, то в некоторых окрестностях точек a и b линейная функция $G(t,\cdot)\pi(\cdot)$ не равна тождественно нулю. Из равенств (11) заключаем, что решения задач (6) и (7) положительны в (a,b). □

Следствие 4.1. Оператор Грина задачи

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - p(t)x(h(t)) = f(t), \;\; t \in [a,b]; \quad x(a) = 0, \;\; x(b) = 0$$

не является строго антитонным, если $p(t) \geqslant \varepsilon$, $h(t) \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $t \in [a,b]$, при некотором $\varepsilon > 0$, и либо $\mu_1 = 1$, либо $\mu_2 = 1$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.1.

Существенность условий теоремы 4.1 показывает следующий пример краевой задачи, обобщающей задачу (3):

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) - 2 \begin{cases} \dfrac{\int_{-1}^{0} v(\tau)x(\tau)\, d\tau}{\int_{-1}^{0} v(\tau)\tau^2\, d\tau}, & t \in [-1,0], \\ \dfrac{\int_{0}^{1} v(\tau)x(\tau)\, d\tau}{\int_{0}^{1} v(\tau)\tau^2\, d\tau}, & t \in (0,1], \end{cases} = f(t), \;\; t \in [-1,1]; \quad x(-1) = 0, \;\; x(1) = 0, \tag{17}$$

где неотрицательная функция v суммируема. Здесь соответствующий оператор T имеет представление (8):

$$R(t,s)=\begin{cases} 2\dfrac{\int_{-1}^{s} v(\tau)x(\tau)\,d\tau}{\int_{-1}^{0} v(\tau)\tau^2\,d\tau}, & t\in[-1,0],\ s\in[-1,0];\\ 2\dfrac{\int_{-1}^{0} v(\tau)x(\tau)\,d\tau}{\int_{-1}^{0} v(\tau)\tau^2\,d\tau}, & t\in[-1,0],\ s\in(0,1];\\ 0, & t\in(0,1],\quad s\in[-1,0];\\ 2\dfrac{\int_{0}^{s} v(\tau)x(\tau)\,d\tau}{\int_{0}^{1} v(\tau)\tau^2\,d\tau}, & t\in(0,1],\quad s\in(0,1]. \end{cases}$$

Теорема 4.2. *Пусть функция v положительна в некоторой правой окрестности точки $t=-1$ и в некоторой левой окрестности точки $t=1$, и выполнены неравенства*

$$\int_{-1}^{0}(2\tau+1)v(\tau)\,d\tau\leqslant 0,\quad \int_{0}^{1}(2\tau-1)v(\tau)\,d\tau\geqslant 0.$$

Тогда оператор Грина задачи (17) *строго антитонен.*

Утверждение доказывается с помощью прямого построения функции Грина. Условия теоремы 4.1 здесь не выполнены. Фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$ совпадает с фундаментальной системой решений уравнения в краевой задаче (3), таким образом, вронскиан фундаментальной системы тождественно равен нулю и решения задач (6), (7) не являются положительными на $(-1,1)$. Тем не менее оператор Грина может быть строго антитонным.

Теперь получим необходимые условия для антитонного, но не строго антитонного оператора Грина G.

Теорема 4.3. *Пусть для линейного изотонного оператора $T: C[a,b]\to L[a,b]$ выполнены условия* (9). *Предположим, что оператор Грина G задачи* (4) *антитонен, но не является строго антитонным. Тогда вронскиан w фундаментальной системы решений однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$ имеет нули на интервале (a,b), причем, если $w(t_0)=0$ в некоторой точке $t_0\in(a,b)$, то либо $w(t)=0$ при $t\in[a,t_0]$, либо $w(t)=0$ при $t\in[t_0,b]$.*

Для доказательства потребуются следующие утверждения, проверяемые непосредственными вычислениями.

Лемма 4.3. *Пусть оператор $T: C[a,b]\to L[a,b]$ имеет представление* (8) *и изотонен. Тогда функция $K(s,\xi)$, определенная равенством* (15), *неотрицательна.*

Лемма 4.4. *Пусть оператор $T: C[a,b]\to L[a,b]$ имеет представление* (8) *и изотонен. Пусть функция $K(s,\xi)$ определена равенством* (15). *Тогда при любой ограниченной в существенном неотрицательной функции f функция*

$$\psi(s)\overset{\text{def}}{=}\int_a^b K(s,\xi)f(\xi)\,d\xi,\quad s\in[a,b],$$

выпукла вверх.

Доказательство теоремы 4.3. Так как оператор G антитонен, но не является строго антитонным, то $G(t_0,\cdot)=0$ на множестве ненулевой меры при некотором $t_0\in(a,b)$.

Из равенства (16) и лемм 4.3, 4.4 следует, что если $G(t_0,s_0)=0$ при некоторых $t_0,s_0\in(a,b)$, то либо $G(t_0,s)=0$ при $s\in[a,s_0]$, либо $G(t_0,s)=0$ при $s\in[s_0,b]$. Теперь из равенств (11) заключаем, что либо $x_b(t_0) = 0$ (при этом $x_b(t) = 0$, если $t \in [a, t_0)$), либо $y_a(t_0) = 0$ (при этом $y_a(t) = 0$, если $t \in [t_0, b)$). Здесь x_b, y_a — решения задач (6) и (7) соответственно. Отсюда следует утверждение теоремы. $\square$

Замечание 4.2. Пусть оператор $T : C[a,b] \to L[a,b]$ имеет представление (8), изотонен и выполнены равенства (9). Предположим, что оператор Грина G задачи (4) антитонен. Тогда, если решение $x_b(\cdot)$ задачи (6) таково, что $x_b(t) = 0$ при $t \in [a,c]$ и $x_b(t) > 0$ при $t \in (c,b]$ для некоторого $c \in (a,b)$, то

$$r(t,s) = \text{const на отрезке } s \in [c,b] \text{ для почти всех } t \in [a,c]. \tag{18}$$

Если решение $y_a(\cdot)$ задачи (7) таково, что $y_a(t) = 0$ при $t \in [c,b]$ и $y_a(t) > 0$ при $t \in [a,c]$ для некоторого $c \in (a,b)$, то

$$r(t,s) = \text{const на отрезке } s \in [a,c] \text{ для почти всех } t \in [c,b]. \tag{19}$$

Если вронскиан фундаментальной системы решений уравнения $\mathcal{L}x = 0$ имеет нуль в точке $c \in (a,b)$, то выполнено хотя бы одно из двух условий (18), (19).

Действительно, пусть для определенности $x_b(t) = 0$ при $t \in [a,c]$ и $x_b(t) > 0$ при $t \in (c,b]$ для некоторого $c \in (a,b)$. Так как $\pi\ddot{x}_b = Tx_b$, то $(Tx_b)(t) = 0$ при $t \in [a,c]$. Так как $x_b(s) > 0$ при $s \in (c,b]$, то выполнено условие (18).

Остальные утверждения замечания 4.2 доказываются аналогично.

Автор выражает свою признательность Н.В. Азбелеву и С.А. Гусаренко за их внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. Левин А.Ю. *Неосцилляция решений уравнения* $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t) = 0$ // Успехи матем. наук. – 1969. – Т. 24. – № 2. – С. 43–96.
2. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. *Сингулярные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, – 1987. – Т. 30. – С. 105–201.
3. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1970. – 720 с.
4. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *О дифференциальном неравенстве Валле–Пуссена* // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – № 12. – С. 2041–2045.
5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
6. Лабовский С.М. *О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 10. – С. 1695–1704.
7. Кобяков И.И. *Условия отрицательности функции Грина двухточечной краевой задачи с отклоняющимся аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8. – № 3. – С. 443–452.
8. Плаксина В.П. *Условия знакопостоянства функции Грина одной двухточечной задачи для функционально-дифференциального уравнения n-го порядка.* – Пермь, 1989. – 43 с. Деп. в ВИНИТИ 16.05.89, № 3280-В89.
9. Лихачева Н.Н. *Теорема Валле–Пуссена для одного класса функционально-дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 30–37.
10. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* I // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 3. – С. 376–384.
11. Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* II // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 6. – С. 923–931.
12. Азбелев Н.В., Алвеш М., Бравый Е.И. *О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 3–11.

13. Лабовский С.М. *О сохранении знака вронскиана фундаментальной системы, функции Коши и функции Грина двухточечной краевой задачи для уравнения с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 10. – С. 1780–1789.
14. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 548 с.
15. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Линейное функционально-дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 12. – С. 2231–2240.
16. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Об оценке спектрального радиуса линейного оператора в пространстве непрерывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 23–28.

Пермский государственный
технический университет

Поступила
11.05.2000