ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 517.968:519.642

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

ПОЛИСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Известно (см., напр., [1]–[5]), что теория многомерных сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с *кратными* интегралами исключительно сложна, и в этой области все еще остается много нерешенных задач; например, громоздкими и зачастую практически трудно проверяемыми являются теоремы существования и единственности решения; плохо разработаны приближенные методы решения, в частности, до сих пор нет (за редким исключением частного характера [3]–[8]) теоретического обоснования даже многих известных приближенных методов и тем более остается открытой проблема оптимизации вычислительных методов [9], [10] для таких уравнений.

Данная работа посвящена точным и приближенным методам решения многомерных СИУ с m-кратными ($m \in \mathbb{N}$) интегралами Гильберта, понимаемыми в смысле главного значения по Коши–Лебегу. В ней устанавливаются весьма простые и эффективные достаточные условия существования и единственности решения таких СИУ и на их базе обосновывается ряд приближенных методов; в частности, предлагается *оптимальный по порядку* проекционный метод и исследуются его аппроксимативные свойства.

Заметим, что часть результатов работы анонсирована в ([8], гл. 4, § 5).

1. Теорема существования и единственности решения

Пусть $C = C(T)$ и $L_2 = L_2(T)$ — пространства непрерывных и соответственно квадратично-суммируемых в области $T = [0, 2\pi]^m \subset \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) 2π-периодических по каждой из m-переменных вещественных функций с обычными нормами $\|\cdot\|_{C(T)} = \|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_{L_2(T)} = \|\cdot\|_2 \equiv \|\cdot\|$ (причем $\|1\| = 1$), а также со скалярным произведением $(\varphi; \psi)$ элементов $\varphi, \psi \in L_2$.

В пространстве L_2 рассматривается полисингулярное интегральное уравнение вида

$$A\varphi \equiv a(s)\varphi(s) + \frac{1}{(2\pi)^m}\int_T h(s,\sigma)\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma = f(s), \tag{1}$$

где $a(s) \in C(T)$, $f(s) \in L_2(T)$, $h(s,\sigma) \in C(T^2)$ и $\varphi \in L_2(T)$ — данная и соответственно искомая вещественные функции, а $s = (s_1, \ldots, s_m)$ и $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in T \subset \mathbb{R}^m$, причем

$$\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma = \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg}\frac{\sigma_m - s_m}{2}d\sigma_1 \cdot \ldots \cdot d\sigma_m,$$

$$B\varphi \equiv J_m h\varphi \equiv \frac{1}{(2\pi)^m}\int_T h(s,\sigma)\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma, \quad m \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем функция $h(s,\sigma) \in C(T^2)$ считается такой, что порождаемый ею сингулярный интегральный оператор $B : L_2 \to L_2$ предполагается ограниченным, а именно,

$$\|B\| = \|J_m h\| \le M_0 = \text{const} < \infty. \tag{2}$$

Для этого достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) функция $h(s,\sigma) \in C(T^2)$ разлагается в ряд

$$h(s,\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) b_k(\sigma),$$

где хотя бы одна из систем функций $\{a_k(t)\}_1^\infty$, $\{b_k(t)\}_1^\infty \subset C(T)$ линейно независима и сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k(s)\|_\infty \|b_k(\sigma)\|_\infty;$$

2) функция $h(s,\sigma) \in C(T^2)$ удовлетворяет условию Гёльдера хотя бы по одной из переменных, а именно, $h(s,\sigma) \in H_\beta$ по переменной $s \in T$ (или же $\sigma \in T$) равномерно относительно переменной $\sigma \in T$ (соответственно относительно $s \in T$), где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$, $0 < \beta_i \le 1$, $i = \overline{1,m}$.

Теорема 1. *Пусть выполняется одно из следующих условий*:

I. $|a(s)| \ge \gamma^2 = \mathrm{const} > 0$, $h(s,\sigma) = (-1)^{m-1} h(\sigma, s)$, *где* $m \in \mathbb{N}$;

II. $a(s) \ge \alpha = \mathrm{const}$, $(B\varphi;\varphi) \ge \beta\|\varphi\|^2$ *для любой* $\varphi \in L_2$ *и некоторого* $\beta \in \mathbb{R}$, *где число* $\gamma^2 = \alpha + \beta > 0$;

III. $|a(s)| \ge \alpha = \mathrm{const}$ *и* $\gamma^2 = \alpha - \varepsilon\|B\| > 0$, *где* $\varepsilon = 0$ *при* $(B\varphi;\varphi) = 0$ *и* $\varepsilon = 1$ *при* $(B\varphi;\varphi) \ne 0$, $\varphi \in L_2$.

Тогда СИУ (1) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in L_2$ *при любой правой части* $f \in L_2$, *причем*

$$\|\varphi^*\| \le \gamma^{-2} \|f\|. \qquad (3)$$

Доказательство. Сингулярное уравнение (1) будем рассматривать как линейное операторное уравнение вида

$$A\varphi \equiv a\varphi + B\varphi = f \quad (\varphi, f \in L_2) \qquad (4)$$

в пространстве $L_2 = L_2(T)$, где в силу сказанного выше оператор $A : L_2 \to L_2$ является ограниченным, причем

$$\|A\| \le \|a(s)\|_\infty + M_0 \equiv M < \infty. \qquad (5)$$

Пусть выполнено условие I теоремы и $a(s) > 0$ (случай $a(s) < 0$ рассматривается аналогично). Тогда для любой функции $\varphi \in L_2$ находим

$$(A\varphi;\varphi) = (a\varphi;\varphi) + (B\varphi;\varphi) \ge \frac{1}{(2\pi)^m} \int_T a(s)|\varphi(s)|^2 ds + (B\varphi;\varphi) \ge \gamma^2\|\varphi\|^2 + (B\varphi;\varphi), \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned}(2\pi)^{2m}(B\varphi;\varphi) &= \int_T \varphi(s)ds \int_T h(s,\sigma)\varphi(\sigma) \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma = \\ &= \int_T \varphi(\sigma)d\sigma \int_T h(\sigma,s)\varphi(s) \operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2} ds = \int_T \varphi(\sigma)d\sigma \int_T (-1)^{m-1} h(s,\sigma)\varphi(s)(-1)^m \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} ds = \\ &= (-1)^{2m-1} \int_T \varphi(s)ds \int_T h(s,\sigma) \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\varphi(\sigma)d\sigma = -(2\pi)^{2m}(B\varphi;\varphi).\end{aligned}$$

Поэтому $(B\varphi;\varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in L_2(T)$. В силу (6) имеем

$$(A\varphi;\varphi) \ge \gamma^2\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_2. \qquad (7)$$

Пусть выполнено условие II. Тогда для любой функции $\varphi \in L_2$, по аналогии с неравенствами (6), находим

$$(A\varphi;\varphi) = (a\varphi;\varphi) + (B\varphi;\varphi) \ge (\alpha + \beta)(\varphi;\varphi) \equiv \gamma^2\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_2. \qquad (8)$$

Пусть теперь выполнено условие III. Тогда для любой функции $\varphi \in L_2(T)$ последовательно находим

$$|(A\varphi;\varphi)| \geq |(a\varphi;\varphi)| - |(B\varphi;\varphi)| \geq \alpha(\varphi;\varphi) - |(B\varphi;\varphi)| \geq \alpha\|\varphi\|^2_{L_2} - \varepsilon\|B\varphi\|_{L_2}\|\varphi\|_{L_2} \geq$$
$$\geq \alpha\|\varphi\|^2_{L_2} - \varepsilon\|B\|_{L_2\to L_2}\|\varphi\|^2_{L_2} = (\alpha - \varepsilon\|B\|)\|\varphi\|^2_{L_2} \equiv \gamma^2\|\varphi\|^2_{L_2}, \quad \varphi \in L_2(T). \quad (9)$$

Из соотношений (7)–(9) следует неравенство

$$\|A\varphi\|_{L_2} \geq \gamma^2\|\varphi\|_{L_2}, \quad \varphi \in L_2(T), \tag{10}$$

обеспечивающее ([11], гл. V) существование и ограниченность левого обратного оператора A_l^{-1}:

$$\|A_l^{-1}\| \leq \gamma^{-2} < \infty. \tag{11}$$

Поскольку для сопряженного оператора $A^* : L_2(T) \to L_2(T)$ имеем $(A^*\varphi;\varphi) = (\varphi; A\varphi) = (A\varphi;\varphi)$, $\varphi \in L_2$, то в силу (7)–(10) находим неравенство

$$\|A^*\varphi\| \geq \gamma^2\|\varphi\|, \quad \varphi \in L_2(T), \tag{12}$$

обеспечивающее ([11], гл. V) существование и ограниченность левого обратного оператора $(A^*)_l^{-1}$:

$$\|(A^*)_l^{-1}\| \leq \gamma^{-2} < \infty. \tag{13}$$

Из соотношений (10)–(13) следует, что оператор $A : L_2(T) \to L_2(T)$ имеет двусторонний обратный оператор $A^{-1} : L_2(T) \to L_2(T)$ и

$$\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-2} < \infty. \tag{14}$$

В силу (14) операторное уравнение (4), а следовательно, и СИУ (1) имеет единственное решение $\varphi^* = A^{-1}f \in L_2$ при любой правой части $f \in L_2$, которое удовлетворяет неравенству (3). $\square$

Следствие. В условиях теоремы решение $\varphi^* = A^{-1}f \in L_2(T)$ СИУ (1) является L_2-устойчивым по правой части $f \in L_2(T)$.

Это утверждение легко выводится из неравенства (3).

2. Итерационные методы

Последовательные приближения к решению СИУ (1) будем определять итерационным методом

$$\varphi^i = \varphi^{i-1} + (\gamma/M)^2(f - A\varphi^{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

при любом начальном приближении $\varphi^0 \in L_2(T)$, где постоянные γ и M определены соответственно в формулировке теоремы 1 и соотношениями (2), (5).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *итерационная последовательность* (15) *сходится к единственному решению* $\varphi^* \in L_2(T)$ *СИУ* (1) *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем*

$$q = (1 - \gamma^4 M^{-2})^{1/2} < 1. \tag{16}$$

При этом погрешность i-го приближения может быть оценена неравенствами

$$\|\varphi^* - \varphi^i\| \leq q^i\|\varphi^* - \varphi^0\| \leq \frac{q^i}{1-q}\|\varphi^1 - \varphi^0\|, \quad i = 0, 1, \ldots\ ; \tag{17}$$

если же начальное приближение выбирается по формуле $\varphi^0 = (\gamma/M)^2 f$, то — и неравенствами

$$\|\varphi^* - \varphi^i\| \leq q^{i+1}(1-q)^{-1}(\gamma/M)^2\|f\|, \quad i = 0, 1, \ldots\ , \tag{18}$$

где постоянная q определена в (16).

Доказательство проводится по аналогии с соответствующими результатами работ ([6]; [8], гл. 4), поэтому на подробных выкладках останавливаться не будем.

Для частного случая СИУ (1) с помощью принципа сжатых отображений ([11], гл. V, § 5) можно получить более простые оценки, чем (17) и (18); например, справедлива следующая простая

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* III *теоремы* 1 *при* $\varepsilon = 1$. *Тогда итерационая последовательность*

$$\varphi^i(s) = \frac{f(s)}{a(s)} - \frac{B(\varphi^{i-1}; s)}{a(s)}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

сходится к единственному решению $\varphi^* \in L_2(T)$ *СИУ* (1) *при любой* $f \in L_2(T)$ *и любом начальном приближении* $\varphi^0(s) \in L_2(T)$. *Погрешность* i*-го приближения может быть оценена неравенствами*

$$\|\varphi^* - \varphi^i\| \le q_1^i \|\varphi^* - \varphi^0\|^i \le \frac{q_1^i}{1 - q_1} \|\varphi^1 - \varphi^0\|, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

где $q_1 = \alpha^{-1}\|B\| < 1$; *если же начальное приближение берется по формуле* $\varphi^0(s) = \frac{f(s)}{a(s)}$, *то — и неравенствами*

$$\|\varphi^* - \varphi^i\| \le \frac{q_1^{i+1}}{1 - q_1} \frac{\|f\|}{\alpha}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

3. Общий проекционный метод

В пространстве $L_2(T)$ возьмем полную ортонормальную систему элементов $\{\psi_r(s)\}_1^\infty$ и обозначим через X_N линейную оболочку, натянутую на первые $N \in \mathbb{N}$ ее элементов. В том случае, когда функции $\psi_r = \psi_{r,N}$ $(r = \overline{1, N})$ зависят от натурального параметра $N \in \mathbb{N}$ (это так, например, для сплайновых базисов), будем предполагать, что последовательность подпространств X_N предельно плотна в пространстве $L_2(T)$. Приближенное решение СИУ (1) ищем в виде так называемого обобщенного "полинома"

$$\varphi_N(s) = \sum_{r=1}^{N} \alpha_r \psi_r(s), \quad s \in T, \quad \alpha_r \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

который будем определять как точное решение следующего конечномерного операторного уравнения

$$A_N \varphi_N \equiv P_N(a\varphi_N) + P_N B \varphi_N = P_N f \quad (\varphi_N, P_N f \in X_N), \tag{20}$$

где $P_N : L_2 \to X_N$ — оператор ортогонального проектирования. Это уравнение эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{r=1}^{N} \alpha_r (A\psi_r; \psi_k) = (f; \psi_k), \quad k = \overline{1, N}, \tag{21}$$

порядка $N \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 1 *СЛАУ* (21) *при любых* $N \in \mathbb{N}$ *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$. *Приближенные решения — обобщенные "полиномы"*

$$\varphi_N^*(s) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_r^* \psi_r(s), \quad s \in T, \quad \alpha_r^* \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{19*}$$

— сходятся к точному решению $\varphi^* = A^{-1}f$ СИУ (1) в пространстве $L_2(T)$, причем для погрешности метода справедливы неулучшаемые по порядку оценки

$$E_N(\varphi^*) \leq \|\varphi^* - \varphi_N^*\| \leq \frac{M}{\gamma^2} E_N(\varphi^*), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

где $E_N(g) = \rho(g, X_N)$ — наилучшее приближение в $L_2(T)$ функции $g \in L_2(T)$ всевозможными элементами вида (19).

Доказательство. Оператор $P_N : L_2 \to X_N$ из (20) обладает свойствами

$$P_N^2 = P_N, \quad P_N^* = P_N, \quad \|P_N\| = 1, \quad \|E - P_N\| = 1 \quad (N \in \mathbb{N}), \tag{23}$$

где E — единичный оператор. Поэтому с учетом (6)–(9) для любого элемента $\varphi_N \in X_N$ имеем

$$\begin{aligned}(A_N\varphi_N; \varphi_N) &= (P_N(a\varphi_N) + P_N B\varphi_N; \varphi_N) = (P_N A\varphi_N; \varphi_N) = \\ &= (A\varphi_N; P_N^*\varphi_N) = (A\varphi_N; P_N\varphi_N) = (A\varphi_N; \varphi_N) \geq \gamma^2\|\varphi_N\|^2,\end{aligned} \tag{24}$$

где постоянная γ^2 определена в формулировке теоремы 1. Отсюда следует неравенство

$$\|A_N\varphi_N\| \geq \gamma^2\|\varphi_N\|, \quad \varphi_N \in X_N, \tag{25}$$

обеспечивающее (см., напр., [10], гл. 1, § 2) существование и ограниченность двустороннего обратного оператора A_N^{-1} при любых $N \in \mathbb{N}$:

$$\|A_N^{-1}\| \leq \gamma^{-2} < \infty, \quad A_N : X_N \to X_N, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Поэтому операторное уравнение (20) (а следовательно, и СЛАУ (21)) имеет единственное решение $\varphi_N^* = A_N^{-1}P_N f$, определяемое по формуле (19*), где $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_N^*$ — решение СЛАУ (21).

Применив к решениям $\varphi^* \in L_2(T)$ и $\varphi_N^* \in X_N$ уравнений соответственно (1) и (20) теорему 6 ([10], гл. 1), находим

$$\varphi^* - \varphi_N^* = (E - A_N^{-1}P_N A)(\varphi^* - \widetilde{\varphi}_N), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{27}$$

где $\widetilde{\varphi}_N$ — произвольный элемент из X_N. Полагая $\widetilde{\varphi}_N = P_N\varphi^*$ и используя соотношения (5), (23)–(26), из (27) находим

$$\begin{aligned}E_N(\varphi^*) &\leq \|\varphi^* - \varphi_N^*\| \leq \|E - A_N^{-1}P_N A\|_{L_2\to L_2}\|\varphi^* - P_N\varphi^*\|_{L_2} = \\ &= \|E - A_N^{-1}P_N A\|_{L_2\to L_2} E_N(\varphi^*), \quad N \in \mathbb{N};\end{aligned} \tag{28}$$

поскольку здесь $\|E - A_N^{-1}P_N A\|_{L_2\to L_2} \leq \|A_N^{-1}P_N A\|_{L_2\to L_2} \leq \gamma^{-2}M$, то из (28) следуют требуемые оценки (22). □

Результат, аналогичный теореме 4, имеет место также независимо от теоремы 1. Например, справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть выполняются условия*

а) *$0 \neq a(s) \in C(T)$ и $h(s,\sigma) \in H_{\beta,\gamma}(T^2)$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$, $0 < \beta_i, \gamma_i \leq 1$, $i = \overline{1,m}$, причем $m = 1, 3, \ldots$;*

б) *уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi^* \in L_2(T)$ при любой правой части $f \in L_2(T)$.*

Тогда при всех $N \geq N_0$ (где $N_0 \in \mathbb{N}$ и определяется структурными свойствами функции $h(s,\sigma)$) СЛАУ (21) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$. Приближенные решения (19) сходятся к точному решению $\varphi^* \in L_2(T)$ в пространстве $L_2(T)$ со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_N^*\| \asymp E_N^T(\varphi^*), \quad N \to \infty, \tag{29}$$

где $\asymp$ есть знак слабой эквивалентности.

Доказательство. Положим

$$h(s,\sigma)=h^+(s,\sigma)+h^-(s,\sigma),\quad h^\pm(s,\sigma)=\frac{h(s,\sigma)\pm h(\sigma,s)}{2},\quad B^\pm\varphi=J_mh^\pm\varphi,$$

где $s,\sigma\in T$ и $\varphi\in L_2(T)$. Тогда уравнения (1) и (20) можно представить соответственно в виде

$$A\varphi\equiv G\varphi+B^-\varphi=f\quad(\varphi,f\in L_2),\tag{30}$$

$$A_N\varphi_N\equiv G_N\varphi_N+P_NB^-\varphi_N=P_Nf\quad(\varphi_N,P_Nf\in X_N),\tag{31}$$

где $G\varphi=a\varphi+B^+\varphi$, $G_N\varphi_N=P_NG\varphi_N$.

Для любой функции $\varphi\in L_2(T)$ легко показать, что

$$(G\varphi;\varphi)=(a\varphi;\varphi)+(B^+\varphi;\varphi)=(a\varphi;\varphi)\geq\gamma^2\|\varphi\|^2.$$

Поэтому, применяя теорему 1 к уравнению

$$G\varphi\equiv a\varphi+B^+\varphi=f\quad(\varphi,f\in L_2(T))\tag{32}$$

и теорему 4 к уравнению

$$G_N\varphi_N\equiv P_N(a\varphi_N)+P_NB^+\varphi_N=P_Nf\quad(\varphi_N,P_Nf\in X_N),\tag{33}$$

находим следующие результаты:

1) оператор $G:L_2\to L_2$ непрерывно обратим и

$$\|G^{-1}\|\leq\gamma^{-2}<\infty;\tag{34}$$

2) операторы $G_N=P_NG:X_N\to X_N$ непрерывно обратимы при любых $N\in\mathbb{N}$ и

$$\|G_N^{-1}\|\leq\gamma^{-2}<\infty,\quad N\in\mathbb{N};\tag{35}$$

3) для решений уравнений (32) и (33) при любых $f\in L_2$ справедливы оценки

$$E_N(G^{-1}f)\leq\|G^{-1}f-G_N^{-1}P_Nf\|\leq\frac{\|G\|}{\gamma^2}E_N(G^{-1}f),\quad N\in\mathbb{N}.\tag{36}$$

В силу (34) и (35) уравнения (30) и (31), а следовательно, (1) и (20) эквивалентны соответственно уравнениям

$$K\varphi\equiv\varphi+G^{-1}B^-\varphi=G^{-1}f\quad(\varphi,G^{-1}f\in L_2),\tag{37}$$

$$K_N\varphi_N\equiv\varphi_N+G_N^{-1}P_NB^-\varphi_N=G_N^{-1}P_Nf\quad(\varphi_N,G_N^{-1}P_Nf\in X_N).\tag{38}$$

В условиях теоремы можно доказать, что оператор $B^-=J_mh^-:L_2(T)\to L_2(T)$, где

$$B^-(\varphi;s)=(J_mh^-\varphi)(s)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_T\frac{h(s,\sigma)-h(\sigma,s)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\varphi(\sigma)d\sigma,\quad\varphi\in L_2(T),\tag{39}$$

является вполне непрерывным; доказательство этого утверждения может быть проведено методом, предложенным С.Г. Михлиным при доказательстве теорем 7.3.1 и 7.3.2 из [12]. С учетом этого факта и формул (36)–(39) доказательство теоремы завершается по аналогии с доказательством теоремы 1 из [13].

Таким образом, построен *оптимальный по порядку* (см. [10], гл. 2 и 4) *прямой проекционный метод* (19), (20), (21), (19*) решения *фиксированного* СИУ (1), когда к "конкуренции" допускаются всевозможные прямые и проекционные методы, позволяющие построить приближенное решение в виде "полинома" (19). Отсюда, выбирая соответствующим образом (напр., в соответствии с теорией поперечников ([14], гл. 10; [15], гл. 4)) координатные функции $\psi_1,\psi_2,\ldots$, можно выделить [10] *оптимальные по порядку методы* решения *класса* [9], [10] СИУ вида (1), определяемого некоторыми *классами* коэффициентов $\mathcal{A}=\{a\}\subset C(T)$, $\mathcal{F}=\{f\}\subset L_2(T)$, $\mathcal{H}=\{h\}\subset C(T^2)$.

Замечание 1. Из теорем 4 и 5 следует обоснование метода Галёркина (редукции) решения полисингулярного уравнения (1) по тригонометрической системе функций, когда приближенное решение $\varphi_N(s_1, \ldots, s_m)$ ищется в виде тригонометрического полинома степени $n_i \in \mathbb{N}$ по каждой из переменных s_i, где $N = N_1 \cdot \ldots \cdot N_m$, $N_i = 2n_i + 1 \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,m}$, и соответственно этому записывается СЛАУ для определения коэффициентов указанного полинома.

Замечание 2. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ разобьем область $T = [0, 2\pi]^m$ на такие подобласти $T_r = T_{r,N}$ $(r = \overline{1,N})$, что $\operatorname{mes}(T_k \cap T_j) = 0$ $(k, j = \overline{1,N};\ k \neq j)$, $\bigcup\limits_{r=1}^{N} T_r = T$, $\lim\limits_{N\to\infty} \max\limits_{1\le r\le N} \operatorname{mes} T_r = 0$. В качестве $\psi_r = \psi_{r,N}(s)$, $r = \overline{1,N}$, возьмем характеристические функции областей T_r, где $r = \overline{1,N}$, $N \in \mathbb{N}$, $s \in T \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, и введем оператор проектирования $P_N : L_2(T) \to L_2(T)$ по формуле

$$P_N(f; s) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_r(s)}{\operatorname{mes} T_r} \int_{T_r} f(\sigma) d\sigma, \quad f \in L_2(T).$$

Тогда метод (19)–(21), (19*) переходит в метод сплайн-подобластей нулевого порядка решения полисингулярного уравнения (1); сходимость и оценка погрешности этого метода следует также из теорем 4 и 5. В частном случае $N = N_1 \cdot \ldots \cdot N_m$, где $N_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$, при специальном выборе подобластей $T_r = T_{r,N}$ $(r = \overline{1,N})$ как тензорное произведение одномерных подобластей по каждой из переменных s_i, $i = \overline{1,m}$, метод (19)–(21), (19*) по существу переходит в метод академиков Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова решения СИУ (1), предложенный и обоснованный ими для решения одномерных *регулярных* граничных интегральных уравнений математической физики (см., напр., [16], гл. 3).

4. Проекционно-итеративный метод

На основе теорем 1–5 могут быть построены сходящиеся проекционно-итеративные схемы решения полисингулярного интегрального уравнения (1).

Из вышеприведенных теорем и соответствующего результата ([10], гл. 2, § 7) выводится следующая

Теорема 6. *В условиях теоремы* 1 *единственные решения соответственно* $\varphi_N^* \in X_N$ *уравнения* (20) *и* $\varphi^* \in L_2(T)$ *СИУ* (1) *можно найти как пределы*

$$\varphi_N^* = \lim_{i\to\infty} \varphi_N^i, \quad \varphi^* = \lim_{N\to\infty} \lim_{i\to\infty} \varphi_N^i$$

сходящейся в $L_2(T)$ *проекционно-итеративной последовательности*

$$\varphi_N^i = \varphi_N^{i-1} + (\gamma/M)^2 (P_N f - A_N \varphi_N^{i-1}), i = 1, 2, \ldots; \varphi_N^0 \in X_N. \tag{40}$$

В частности, при $\varphi_N^0 = (\gamma/M)^2 P_N f$ *и любых* $i + 1$, $N \in \mathbb{N}$ *справедливы оценки*

$$\|\varphi_N^* - \varphi_N^i\| \le q^{i+1}(1-q)^{-1}(\gamma/M)^2 \|P_N f\|, \tag{41}$$

$$\|\varphi^* - \varphi_N^i\| \le M\gamma^{-2} E_N(\varphi^*) + q^{i+1}(1-q)^{-1}(\gamma/M)^2 \|f\|. \tag{42}$$

5. Кубатурный метод

Положим $N = N_1 \cdot \ldots \cdot N_m$ и введем сетку узлов $s_k^{i_k} = 2i_k\pi/N_k$, $i_k = \overline{1,N_k}$, $N_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$. Приближенное решение СИУ (1) ищем в виде тригонометрического полинома

$$\varphi_N(s) = \frac{2^m}{N} \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{N_m} \beta_{i_1,\ldots,i_m} \Delta_{N_1}(s_1 - s_1^{i_1}) \cdot \ldots \cdot \Delta_{N_m}(s_m - s_m^{i_m}) \tag{43}$$

порядка $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ с неизвестными коэффициентами $\beta_{i_1,\ldots,i_m}$, где $\Delta_{N_k}(t)$ — обычное или же модифицированное ядро Дирихле порядка n_k при $N_k = 2n_k + 1$ и соответственно $N_k = 2n_k$, где $n_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,m}$. Полином (43) будем определять как точное решение конечномерного операторного уравнения (при $a, f \in C(T)$, $h \in C(T^2)$) вида

$$A_N \varphi_N \equiv \mathcal{L}_N^s(a\varphi_N) + \mathcal{L}_N^s J_m \mathcal{L}_N^\sigma(h\varphi_N) = \mathcal{L}_N f \quad (\varphi_N, \mathcal{L}_N f \in X_N), \tag{44}$$

где X_N — множество всех полиномов вида (43), $J_m h\varphi \equiv B\varphi$,

$$\mathcal{L}_N^s(f;s) = \frac{2^m}{N} \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{N_m} f(s_1^{i_1}, \ldots, s_m^{i_m}) \Delta_{N_1}(s_1 - s_1^{i_1}) \cdot \ldots \cdot \Delta_{N_m}(s_m - s_m^{i_m}), \quad s \in T,$$

причем оператор $\mathcal{L}_N^\sigma$ применяется к функции $h(s,\sigma)\varphi_N(\sigma)$ по переменной $\sigma \in T$.

Отметим, что операторное уравнение (44) эквивалентно СЛАУ порядка $N = N_1 \cdot \ldots \cdot N_m$ относительно неизвестных коэффициентов $\beta_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{R}$ полинома (43).

Теорема 7. *В условиях теоремы* 1 *уравнение* (44) *однозначно разрешимо при любых* $N_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$, *и приближенное решение* (43) *СИУ* (1) *удовлетворяет неравенствам*

$$\|\varphi_N\|_2 \le \gamma^{-2} \|\mathcal{L}_N f\|_2 \le \gamma^{-2} \|f\|_\infty, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Доказательство ведется по схеме, предложенной при доказательстве теорем 5 и 7 работы [17], и существенно использует при этом результаты работ [18]–[21] по многомерному интерполированию и кубатурным формулам для полисингулярных интегралов; ввиду излишней громоздкости подробные выкладки здесь не приводятся.

Отметим, что теоремы 1, 2 и 6 позволяют построить сходящиеся кубатурно-итерационные методы решения уравнения (1), а результаты работ [10], [18], [19] — оценить их погрешность, в частности, получить для них аналогичные (41) и (42) оценки.

6. Заключение

В заключение отметим, что результаты, аналогичные приведенным выше, справедливы также для полисингулярных интегральных уравнений с *частными* интегральными операторами и для многомерных сингулярных интегральных уравнений с интегралами в смысле Трикоми–Михлина–Жиро (см., напр., [2], [22]). Ввиду исключительной важности таких уравнений для приложений их исследованию в только что указанном смысле будет посвящена отдельная работа.

Литература

1. Какичев В.А. *Методы решения некоторых краевых задач для аналитических функций двух комплексных переменных.* – Тюмень: Изд-во Тюменск. ун-та, 1978. – 124 с.
2. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integral-operatoren.* – Berlin: Akademik-Verlag, 1980. – 514 S.
3. Prößdorf S. *Numerische Behandlung singulärer Integralgleichungen* // Z. angew. Math. und Mech. – 1989. – Bd. 69. – H. 4. – S. 5–13.
4. Лифанов И.К., Тыртышников Е.Е. *Теплицевы матрицы и интегральные уравнения* // Вычисл. процессы и системы. – 1990. – Вып. 7. – С. 94–278.
5. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.
6. Габдулхаев Б.Г. *Многомерные сингулярные интегральные уравнения с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 9. – С. 1504–1516.
7. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО "Янус", 1995. – 519 с.
8. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
9. Бахвалов Н.С. *Численные методы.* – М.: Наука, 1973. – 631 с.

10. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
12. Михлин С.Г. *Курс математической физики.* – М.: Наука, 1968. – 575 с.
13. Габдулхаев Б.Г. *Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 7. – С. 12–24.
14. Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* – М.: Наука, 1976. – 320 с.
15. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.
16. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа.* – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
17. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения бисингулярных интегральных уравнений с внутренними коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 8. – С. 11–25.
18. Габдулхаев Б.Г. *Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов.* I // Тр. Матем. ин-та АН Болгарии. – 1970. – Т. 11. – С. 181–196.
19. Габдулхаев Б.Г. *Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов.* II // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 4. – С. 3–13.
20. Габдулхаев Б.Г. *Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений.* I // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 7. – С. 30–41.
21. Габдулхаев Б.Г. *Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений.* II // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 1. – С. 30–41.
22. Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

Казанский государственный университет

Поступила 26.12.2004