ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 10 (473)

УДК 519.63

М.Ф. ПАВЛОВА, Е.В. ШЕМУРАНОВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕНАСЫЩЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

В работе исследуется математическая модель, предложенная А.В. Костериным [1] для описания процесса совместного движения упругого скелета и находящейся в порах скелета и возможно не полностью их заполняющей жидкости. Такой процесс принято называть ненасыщенной фильтрационной консолидацией. Рассматривается смешанная краевая задача, при этом на части границы задается условие типа полупроницаемости. Поэтому предложенная в данной работе обобщенная формулировка содержит нестационарное вырождающееся вариационное неравенство с ограничением на границе. Доказывается существование слабого решения исходной задачи. При определении обобщенного решения использованы идеи работы [2]. Данная статья может рассматриваться как продолжение работы [3], где доказана теорема существования решения для задачи ненасыщенной фильтрационной консолидации с граничными условиями, не приводящими к вариационному неравенству.

1. Постановка задачи

Пусть $\overline{\Omega} = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid -a \le x_1 \le a,\ -H \le x_2 \le 0\}$, Γ — граница Ω. Процесс фильтрационной консолидации в Ω при неполном насыщении описывается системой дифференциальных уравнений, состоящей из уравнений квазиравновесия среды в целом,

$$-\operatorname{div}\sigma^f + \nabla(p^+ - ms(p)p^-) = f(s(p)) \tag{1}$$

и условия совместного деформирования фаз

$$s(p)\frac{\partial(\operatorname{div} u)}{\partial t} + \operatorname{div} q + m\frac{\partial s(p)}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Здесь m — пористость, σ^f — тензор эффективных напряжений, u — вектор перемещений упругой среды, p — поровое давление, q — скорость фильтрации, $s(p)$ — насыщенность, вектор-функция $f(s(p))$ определяет плотность массовых сил, $\operatorname{div}\sigma^f$ — вектор, i-я компонента которого является дивергенцией i-й строки тензора σ^f.

В качестве искомых функций данной задачи выберем вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и поровое давление p. Зависимость остальных функций, входящих в (1)–(2), относительно неизвестных u и p должна определяться дополнительными соотношениями. Следуя [1], полагаем, что насыщенность s — заданная функция давления p, скорость фильтрации q связана с p законом

$$q = -b(s(p))(\nabla p - \rho g), \tag{3}$$

фильтрация происходит в вязко-упругой среде

$$\sigma^f = A\varepsilon(u) + B\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00616 и № 99-01-00466.

Здесь ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, $\varepsilon(u)$ и $\varepsilon(\frac{\partial u}{\partial t})$ — тензоры деформаций и их скоростей соответственно, A и B — операторы, действующие из пространства симметричных тензоров второго ранга (обозначим его H_3) в него же.

В дальнейшем предполагаем, что операторы A и B линейные, ограниченные и положительные. Функции $s(p)$ и $b(s)$ непрерывные, неубывающие, удовлетворяющие следующим условиям:

$$0 \le s(\xi) \le 1; \quad | s(\xi)\xi | \le c_1 \ \ \forall \xi < 0; \quad s(\xi) = 1 \ \ \forall \xi \ge 0; \tag{5}$$

$$0 \le b(\xi) \le 1 \ \ \forall \xi \in R_1; \quad b(1) = 1. \tag{6}$$

Кроме того, полагаем, что зависимости $s(\xi)$ и $b(s)$ такие, при которых отображение $Dp = \int\limits_0^p b(s(\xi))d\xi$ является взаимно однозначным на R^1.

Заметим, что функция

$$s(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p \le 0; \\ 1, & p > 0, \end{cases}$$

наиболее часто используемая на практике, удовлетворяет условиям (5).

Граничными условиями на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma \mid \ |x_1| = a\}, \quad \Gamma_2 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma \mid x_2 = a\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma \mid x_2 = 0, \ |x_1| \le a_1 < a\}, \quad \Gamma_4 = \{(x_1, x_2) \in \Gamma \mid x_2 = 0, \ a_1 < |x_1| \le a\},$$

являются следующие:

$$u_i(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \tag{7}$$

$$\sigma^f_{12} = 0, \quad x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4; \quad -\sigma^f_{22} + p^+ - ms(p)p^- = \begin{cases} 0, x \in \Gamma_4; \\ F(x,t), x \in \Gamma_3; \end{cases} \tag{8}$$

$$q_1(x,t) = 0, \ \ x \in \Gamma_1; \quad q_2(x,t) = 0, \ \ x \in \Gamma_2; \quad p(x,t) = 0, x \in \Gamma_3; \tag{9}$$

$$p(x,t)q_2(x,t) = 0, \quad p(x,t) \le 0, \quad q_2(x,t) \ge 0, \ \ x \in \Gamma_4. \tag{10}$$

2. Обобщенная формулировка задачи

Пусть $\overset{\circ}{V}$ — замыкание гладких функций, равных нулю на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, в норме пространства $W^1_2(\Omega)$, $\overset{\circ}{V}_1$ — замыкание гладких функций, равных нулю на Γ_3, в норме того же пространства,

$$K = \{w \in \overset{\circ}{V}_1 \mid w(x) \le 0, \ x \in \Gamma_4\}.$$

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(10) назовем тройку функций (u_1, u_2, p), для которых справедливы следующие соотношения:

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}), \quad u_i(x,0) = u^0_i(x) \quad \text{п. в. в} \quad \Omega, \quad i = 1,2, \tag{11}$$

$$w(p) = \int_0^p b(s(\xi))d\xi \in L_2(0,T;K), \tag{12}$$

для любых функций $v_i \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V})$ имеют место равенства

$$\int_0^T \int_\Omega \Big\{ \sum_{j=1}^2 \sigma^f_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - (p^+ - ms(p)p^-)\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \Big\} dx\, dt =$$
$$= \int_0^T \int_\Omega f_i(s(p))v_i dx\, dt + \delta_{i2} \int_0^T \int_{\Gamma_3} F(x,t)v_i dx\, dt, \quad i = 1,2, \tag{13}$$

и для любых функций $z \in L_2(0,T;K)$, неотрицательных функций $\alpha(t) \in C^1([0,T])$, $\alpha(T)=0$, справедливо неравенство

$$\int_0^T \int_\Omega \Big\{ s(p)\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t}\alpha(t)(z-w) + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t)(z-w)) \Big\} dx\,dt +$$

$$+ [m\partial_t s(p),\, \alpha(t)(z-w)] \geq \int_0^T \int_\Omega b(s(p))\rho g_2 \frac{\partial(\alpha(t)(z-w))}{\partial x_2} dx\,dt. \quad (14)$$

Здесь

$$[m\partial_t s(p),\, \alpha(t)(z-w)] := \int_0^T \int_\Omega m\Phi(w)\partial_t\alpha(t)dx\,dt - \int_0^T \int_\Omega ms(p)\partial_t(\alpha z)dx\,dt +$$

$$+ \int_\Omega m\Phi(w(p_0))\alpha(0)dx - \int_\Omega ms(p_0(x))z(x,0)\alpha(0)dx,$$

$\Phi(\xi) = \int_0^\xi \varphi'(\zeta)\zeta d\zeta$, $\varphi(\xi) = s(p(\xi))$.

3. Теорема существования

Теорема 1. *Пусть $s(p)$, $b(s)$, операторы A и B удовлетворяют перечисленным выше условиям, функции f_i ограничены на $[0,1]$ по s. Кроме того, имеет место оценка*

$$\frac{s'(p)}{b(s(p))} \leq M. \quad (15)$$

Тогда при любых $F(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Gamma_3))$, $u_i^0 \in \overset{\circ}{V}$, $w(p_0) \in K$, задача (1)–(10) имеет обобщенное решение.

Доказательство этой теоремы проведем с помощью метода полудискретизации со штрафом. Для этого на отрезке $[0,T]$ построим равномерную сетку с шагом τ, $\overline{\omega}_\tau$ — множество узлов сетки, $\omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{0\}$.

Определение 2. Функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, $p_\tau(t)$ назовем полудискретным решением задачи (1)–(10), если

$$y_i(t) \in \overset{\circ}{V} \quad \forall t \in \omega_\tau, \quad y_i(0) = u_i^0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad i=1,2,$$
$$w_\tau(p_\tau(t)) = \int_0^{p_\tau(t)} b(s(\xi))d\xi \in K \quad \forall t \in \omega_\tau,$$

и для любых функций $v_i \in \overset{\circ}{V}$ и $z \in \overset{\circ}{V}_1$ имеют место равенства

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{j=1}^2 \Big(A_{ij}\widehat{\varepsilon} + B_{ij}\frac{\widehat{\varepsilon}-\varepsilon}{\tau} \Big) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - (\widehat{p}_\tau^+ - ms(\widehat{p}_\tau)\widehat{p}_\tau^-)\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \Big\} dx =$$
$$= \int_\Omega f_i(s(p_\tau))v_i dx + \delta_{i2}\int_{\Gamma_3} F_\tau(x,t)v_i dx, \quad i=1,2, \quad (16)$$

$$\int_\Omega \Big\{ s(\widehat{p}_\tau)\operatorname{div}\frac{\widehat{y}-y}{\tau}z + \nabla\widehat{w}_\tau \cdot \nabla z \Big\} dx + \int_\Omega m\frac{s(\widehat{p}_\tau)-s(p_\tau)}{\tau} z dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_4} \widehat{w}_\tau^+ z dx =$$
$$= \int_\Omega b(s(p_\tau))\rho g_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} dx. \quad (17)$$

Здесь $\widehat{y} = y(t+\tau)$, $\varepsilon = \varepsilon(y)$ — тензор с компонентами $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} + \frac{\partial y_j}{\partial x_i})$, $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon(\widehat{y})$, $A_{ij}v(B_{ij}v)$ — (i,j)–компонента вектора $Av(Bv)$, $F_\tau(x,t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} F(x,\xi)d\xi$.

Лемма 1. *Решение полудискретной задачи существует.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству соответствующего факта в [3].

Лемма 2. *Для решения полудискретной задачи* (16)–(17) *справедливы следующие априорные оценки:* [1]

$$\|y_i(t')\|_1 \le C_1, \quad \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|(y_i)_t\|_1^2 \le C_2, \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

$$\int_\Omega \Phi(w_\tau(t'))dx \le C_3, \tag{19}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}_\tau(t)\|_1^2 \le C_4, \tag{20}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \|\widehat{w}_\tau^+(t)\|_{L_2(\Gamma_4)} \le C_5 \quad \forall t' \in \omega_\tau. \tag{21}$$

Доказательство. Полагая в (16), (17) $v_i = (y_i)_t$, $z = \widehat{w}_\tau$ и складывая полученные равенства, будем иметь

$$\int_\Omega \left(A\widehat{\varepsilon} + B\frac{\widehat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau}, \frac{\widehat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau} \right)_{H_3} dx + \|\widehat{w}_\tau\|_1^2 + \int_\Omega m \frac{s(\widehat{p}_\tau) - s(p_\tau)}{\tau} \widehat{w}_\tau dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_4} \widehat{w}_\tau^+ \widehat{w}_\tau dx =$$
$$= \int_\Omega (\widehat{p}_\tau^+ - s(\widehat{p}_\tau)(m\widehat{p}_\tau^- + \widehat{w}_\tau)) \operatorname{div} \frac{\widehat{y} - y}{\tau} dx + \sum_{i=1}^2 \int_\Omega f_i(s(p_\tau)) \frac{\widehat{y}_i - y_i}{\tau} dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_3} F_\tau(x,t) \frac{\widehat{y}_2 - y_2}{\tau} dx + \int_\Omega b(s(p_\tau)) \rho g_2 \frac{\partial \widehat{w}_\tau}{\partial x_2} dx. \tag{22}$$

Равенство (22) умножим на τ, просуммируем по t от 0 до $t' - \tau$, $t' \in \omega_\tau$, и преобразуем, используя следующие неравенства:

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int_\Omega \left(A\widehat{\varepsilon}, \frac{\widehat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau} \right)_{H_3} dx \ge \int_\Omega (A\varepsilon(y(t')), \varepsilon(y(t')))_{H_3} dx -$$
$$- \int_\Omega (A\varepsilon(u^0), \varepsilon(u^0)) dx \ge C_A \sum_{i=1}^2 \|y_i(t')\|_1^2 - C_6 \sum_{i=1}^2 \|u_i^0\|_1^2,$$
$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int_\Omega \left(B\frac{\widehat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau}, \frac{\widehat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau} \right) dx \ge C_B \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\widehat{y}_i - y_i}{\tau} \right\|_1^2,$$
$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int_\Omega \frac{s(\widehat{p}_\tau) - s(p_\tau)}{\tau} \widehat{w}_\tau dx = \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int_\Omega \frac{\varphi(\widehat{w}_\tau) - \varphi(w_\tau)}{\tau} \widehat{w}_\tau dx \ge$$
$$\ge \int_\Omega \Phi(w_\tau(t'))dx - \int_\Omega \Phi(w_\tau(0))dx. \tag{23}$$

Отметим, что при получении (23) использовано неравенство вида

$$(\varphi(u) - \varphi(v))u \ge \Phi(u) - \Phi(v), \tag{24}$$

доказательство которого приведено в [4].

[1] Здесь и в дальнейшем буквой C с индексами обозначены не зависящие от τ и ε величины.

В результате будем иметь

$$C_A\sum_{i=1}^{2}\|y_i(t')\|_1^2+C_B\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_{i=1}^{2}\|(y_i)_t\|_2^1+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{w}_\tau(t)\|_1^2+\int_\Omega\Phi(w_\tau(t'))dx+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\widehat{w}_\tau^+\|^2_{L_2(\Gamma_4)}\le\int_\Omega\Phi(w_\tau(0))dx+C_6\sum_{i=1}^{2}\|u_i^0\|_1^2+\Big|\sum_{t=0}^{t'-\tau};\tau I\Big|, \quad (25)$$

здесь I — правая часть равенства (22).

Оценим слагаемое, содержащее I,

$$\Big|\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau I\Big|=\sum_{t=0}^{t'-\tau}\Big|\int_\Omega(\widehat{p}_\tau^+-s(\widehat{p}_\tau)(m\widehat{p}_\tau^-+\widehat{w}_\tau))\operatorname{div}\frac{\widehat{y}-y}{\tau}dx\Big|+$$
$$+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\Big|\Big\{\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega f_i(s(p_\tau))\frac{\widehat{y}_i-y_i}{\tau}dx+\int_{\Gamma_3}F_\tau(x,t)\frac{\widehat{y}_2-y_2}{\tau}dx+\int_\Omega b(s(p_\tau))\rho g_2\frac{\partial\widehat{w}_\tau}{\partial x_2}dx\Big\}\Big|=I_1+I_2.$$

Из определения $\widehat{w}_\tau$ и условий (5)–(6) следует

$$s(\widehat{p}_\tau)\widehat{w}_\tau=s(\widehat{p}_\tau)\widehat{w}_\tau^+-s(\widehat{p}_\tau)\widehat{w}_\tau^-=\widehat{w}_\tau^+-s(\widehat{p}_\tau)\widehat{w}_\tau^-,$$
$$\widehat{p}_\tau^+=\widehat{w}_\tau^+, s(p_\tau)=s(p_\tau^-), |\widehat{w}_\tau|\le|\widehat{p}_\tau|.$$

Поэтому

$$I_1\le\sum_{t=0}^{t'-\tau}\int_\Omega(|ms(\widehat{p}_\tau^-)\widehat{p}_\tau^-|+|s(\widehat{p}_\tau^-)\widehat{w}_\tau^-|)\Big|\operatorname{div}\frac{\widehat{y}-y}{\tau}\Big|dx\le$$
$$\le 2C_7\sum_{t=0}^{t'-\tau}\int_\Omega\Big|\operatorname{div}\frac{\widehat{y}-y}{\tau}\Big|dx\le\delta\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\widehat{y}_i-y_i}{\tau}\Big\|_1^2+\frac{C_8}{\delta}.$$

Используя условия на функции f_i и F_τ, неравенство Коши–Буняковского, ε-неравенство, получим

$$I_2\le\delta\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\Big(\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\widehat{y}_i-y_i}{\tau}\Big\|_1^2+\|\widehat{w}_\tau\|_1^2\Big)+\frac{C_9}{\delta}\Big(1+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|F_\tau(t)\|^2_{L_2(\Gamma_3)}\Big).$$

Из (25) и полученных для I_1 и I_2 оценок следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Существуют функции*

$$u_i\in W_2^{(1)}(0,T;\overset{\circ}{V}),\quad w\in L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$$

и последовательности $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$ *такие, что при* $\tau\to0$, $\varepsilon\to0$

$$\Pi_\tau y_i\rightharpoonup u_i,\quad \Pi_\tau(y_i)_t\rightharpoonup\frac{\partial u_i}{\partial t}\quad в\quad L_2(0,T;\overset{\circ}{V}),\quad \Pi_\tau w_\tau\rightharpoonup w\quad в\quad L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1), \quad (26)$$
$$\Pi_\tau w_\tau^-\to w^-\quad п.в.\ в\quad Q_T, \quad (27)$$
$$\Pi_\tau p_\tau^-\to p^-\quad п.в.\ в\quad Q_T, \quad (28)$$
$$\Pi_\tau w_\tau^+\rightharpoonup w^+,\quad \Pi_\tau w_\tau^-\rightharpoonup w^-\quad в\quad L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1). \quad (29)$$

Здесь $\Pi_\tau z(t)=\{z(t')\mid t'\in\overline{\omega}_\tau,\ t'\le t<t'+\tau\}$ — *кусочно-постоянное восполнение функции* z.

Справедливость утверждений (26) следует из априорных оценок (18), (20) и слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивных банаховых пространствах.

Убедимся в справедливости (27). Введем функцию

$$G(\zeta):=\varphi(\zeta)g(\zeta)-\int_0^\zeta\varphi(\xi)g'(\xi)d\xi,$$

где $g(\zeta)=\begin{cases}\frac{\zeta^2}{1+\zeta^2}, & \text{если } \zeta<0;\\ 0, & \text{если } \zeta\geq 0.\end{cases}$ Элементарными преобразованиями нетрудно показать, что

$$G(\zeta)=\int_0^{\zeta}\varphi'(\xi)g(\xi)d\xi. \tag{30}$$

Докажем, что последовательность $G(w_\tau)$ равномерно ограничена по τ и ε в пространстве $L_\infty(Q_T)\cap L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$. Из (30) и ограниченности функции g имеем

$$|G(w_\tau(x,t))|\leq\int_0^{w_\tau(x,t)}\varphi'(\xi)d\xi=|\varphi(w_\tau(x,t))-\varphi(0)|=|s(p_\tau(w_\tau(x,t)))-s(0)|\leq 1.$$

Следовательно, $G(w_\tau)\in L_\infty(Q_T)$. Далее заметим, что

$$|G'_\xi(\xi)|=|\varphi'(\xi)g(\xi)|=\frac{s'(\xi)}{b(s(\xi))}g(\xi).$$

Поэтому из условия (15) и ограниченности функции g следует $|G'_\xi(\xi)|\leq\mathrm{const}$. Ограниченность $|G'_\xi(\xi)|$ и (20), очевидно, обеспечивают равномерную ограниченность $G(w_\tau)$ в $L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$.

Докажем теперь справедливость неравенства

$$I=\frac{1}{k\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\tau\int_\Omega(G(w_\tau(t'+k\tau))-G(w_\tau(t')))^2dx\leq C_{10}. \tag{31}$$

Имеем

$$I=\frac{\tau}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\int_\Omega\frac{G(w_\tau(t+\tau))-G(w_\tau(t))}{\tau}R_G(t')dx,$$

где $R_G(t')=G(w_\tau(t'+k\tau))-G(w_\tau(t'))$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{G(\widehat{w}_\tau)-G(w_\tau)}{\tau}&=\frac{\varphi(\widehat{w}_\tau)g(\widehat{w}_\tau)-\varphi(w_\tau)g(w_\tau)}{\tau}-\frac{1}{\tau}\int_{w_\tau}^{\widehat{w}_\tau}\varphi(\xi)g'(\xi)d\xi=\\&=\frac{\varphi(\widehat{w}_\tau)-\varphi(w_\tau)}{\tau}g(\widehat{w}_\tau)+\varphi(w_\tau)\frac{g(\widehat{w}_\tau)-g(w_\tau)}{\tau}-\frac{1}{\tau}\int_{w_\tau}^{\widehat{w}_\tau}\varphi(\xi)g'(\xi)d\xi=\\&=\frac{\varphi(\widehat{w}_\tau)-\varphi(w_\tau)}{\tau}g(\widehat{w}_\tau)-\int_{w_\tau}^{\widehat{w}_\tau}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(w_\tau)}{\tau}g'(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{G(w_\tau(t+\tau))-G(w_\tau(t))}{\tau}R_G(t')dx&=\int_\Omega\frac{\varphi(w_\tau(t+\tau))-\varphi(w_\tau(t))}{\tau}g(w_\tau(t+\tau))R_G(t')dx-\\&-\int_\Omega\int_{w_\tau(t)}^{w_\tau(t+\tau)}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(w_\tau(t))}{\tau}g'(\xi)R_G(t')d\xi\,dx\equiv I_1+I_2.\end{aligned} \tag{32}$$

Для оценки I_1 воспользуемся (17) при $z=g(w_\tau(t+\tau))R_G(t')$ (такая подстановка возможна, поскольку $g(w_\tau(t+\tau))R_G(t')\in\overset{\circ}{V}_1$). В результате получим

$$\begin{aligned}I_1=\int_\Omega\Big\{&-s(p_\tau(t+\tau))\,\mathrm{div}\,\frac{y(t+\tau)-y(t)}{\tau}g(w_\tau(t+\tau))R_G(t')-\nabla w_\tau(t+\tau)\cdot\nabla(g(w_\tau(t+\tau))R_G(t'))+\\&+b(s(p_\tau))\rho g_2\frac{\partial(g(w_\tau(t+\tau))R_G(t'))}{\partial x_2}\Big\}dx-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_4}w_\tau^+(t+\tau)g(w_\tau(t+\tau))R_G(t')dx.\end{aligned} \tag{33}$$

Заметим, что $\int\limits_{\Gamma_4} w_\tau^+(t+\tau)g(w_\tau(t+\tau))R_G(t')dx = 0$. Остальные слагаемые в (33) оценим, используя ограниченность функций G, g и оценки (19)–(22). В результате получим

$$|I_1| \le C_{11}\Big(\sum_{i=1}^{2} \|(y_i)_t(t)\|_1^2 + \|w_\tau(t+\tau)\|_1^2 + 1\Big). \tag{34}$$

Оценим I_2. Нетрудно показать, что

$$|I_2| \le \int_\Omega \frac{\varphi(w_\tau(t+\tau)) - \varphi(w_\tau(t))}{\tau}\Big(g(w_\tau(t)) - g(w_\tau(t+\tau))\Big)|R_G(t')|dx \equiv I_3.$$

Для оценки I_3 воспользуемся также равенством (17), выбрав $z = (g(w_\tau(t)) - g(w_\tau(t+\tau)))|R_G(t')|$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} I_3 = \int_\Omega \Big\{ &- s(p_\tau(t+\tau)) \operatorname{div} \frac{y(t+\tau)-y}{\tau}(g(w_\tau(t)) - g(w_\tau(t+\tau)))|R_G(t')| - \\ &- \nabla w_\tau(t+\tau)\cdot\nabla((g(w_\tau(t)) - g(w_\tau(t+\tau)))|R_G(t')|) + \\ &+ b(s(p_\tau))\rho g_2 \frac{\partial((g(w_\tau(t)) - g(w_\tau(t+\tau)))|R_G(t')|)}{\partial x_2}\Big\}dx - \\ &- \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_4} w_\tau^+(t+\tau)(g(w_\tau(t)) - g(w_\tau(t+\tau)))|R_G(t')|dx. \end{aligned} \tag{35}$$

Все слагаемые правой части равенства (35) оцениваются аналогично предыдущему случаю, за исключением последнего, для которого

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_4} w_\tau^+(t+\tau)(g(w_\tau(t)) - g(w_\tau(t+\tau)))|R_G(t')|dx = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_4} w_\tau^+(t+\tau)|g'(\xi)|(w_\tau(t) - w_\tau(t+\tau))|R_G(t')|dx \le \frac{C_{12}}{\varepsilon}(\|w_\tau^+(t+\tau)\|^2_{L_2(\Gamma_4)} + \|w_\tau^+(t)\|^2_{L_2(\Gamma_4)}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$|I_2| \le C_{13}\Big\{ \sum_{i=1}^{2} \|(y_i)_t\|_1^2 + \|w_\tau(t+\tau)\|_1^2 + 1 + \frac{1}{\varepsilon}(\|w_\tau^+(t+\tau)\|^2_{L_2(\Gamma_4)} + \|w_\tau^+(t)\|^2_{L_2(\Gamma_4)})\Big\}. \tag{36}$$

Из соотношений (32), (34), (36) обычным образом следует справедливость (31).

Из оценки (31) и равномерной ограниченности $G(w_\tau)$ в $L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$ ([5], с. 216) получим существование подпоследовательностей $\{\tau'\} \subset \{\tau\}$, $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ и элемента $G_0 \in L_2(Q_T)$ таких, что

$$G(w_{\tau'}) \to G_0 \quad \text{в} \quad L_2(Q_T), \quad G(w_{\tau'}) \to G_0 \quad \text{п. в. в} \quad Q_T. \tag{37}$$

Заметим, что $G(w_{\tau'}) = G(-w_{\tau'}^-)$. Нетрудно видеть, что на множестве $(-\infty, 0]$ функция $G(\xi)$ взаимно однозначна, поэтому из (37) имеем

$$-w_{\tau'}^- \to G^{-1}(G_0) \quad \text{п. в. в} \quad Q_T.$$

Докажем, что $G^{-1}(G_0) = -w^-$. Для этого запишем, пользуясь монотонностью функции G, неравенство

$$\int_\Omega (G(w_{\tau'}) - G(v))(w_{\tau'} - v)dx \ge 0.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $\tau' \to 0$, $\varepsilon' \to 0$. В результате получим

$$\int_\Omega (G_0 - G(v))(w - v)dx \ge 0.$$

Выбором $v = w \pm \lambda v_1$ $\forall\lambda > 0$ $\forall v_1 \in L_2(Q_T)$, нетрудно доказать, что $G_0 = G(w) = G(-w^-)$. Поэтому (27) имеет место.

Далее, пусть $p = D^{-1}w$. Поскольку знаки функций p и w совпадают, а отображение D взаимно однозначно, то из (27) следует (28).

Убедимся в справедливости (29). Заметим, что из оценки (20) следует равномерная ограниченность последовательностей $\Pi_\tau\widehat{w}_\tau^-$ и $\Pi_\tau\widehat{w}_\tau^+$ в $L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$. Значит, найдутся последовательности $\{\tau''\} \subset \{\tau'\}$, $\{\varepsilon''\} \subset \{\varepsilon'\}$ и элементы z_1 и z_2 из $L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1)$ такие, что

$$\Pi_\tau w_{\tau''}^- \rightharpoonup z_1, \quad \Pi_\tau w_{\tau''}^+ \rightharpoonup z_2 \quad \text{в} \quad L_2(0,T;\overset{\circ}{V}_1).$$

Из равенства слабого предела и предела почти всюду следует, что $z_1 = w^-$. Переходя к пределу в равенстве $\Pi_\tau w_{\tau''}^+ = \Pi_\tau w_{\tau''} + \Pi_\tau w_{\tau''}^-$, убедимся в том, что $z_2 = w^+$. □

Лемма 4. *Функции u_i и w, удовлетворяющие соотношениям* (26), (27)*, являются обобщенным решением задачи* (1)–(10).

Доказательство. Сначала докажем включение $w \in L_2(0,T;K)$. Заметим, что из оценки (21) вытекает, что предел последовательности следов функций $\Pi_\tau w_\tau^+$ на Γ_4 равен нулю. С использованием очевидного равенства

$$\int_\Omega \frac{\partial w_\tau^+}{\partial x_2} z\,dx = -\int_\Omega w_\tau^+ \frac{\partial z}{\partial x_2} dx + \int_{\Gamma_4} w_\tau^+ z\,dx,$$

в котором z — произвольная гладкая функция, равная нулю в точках $\Gamma\setminus\Gamma_4$, нетрудно показать, что след w^+ на Γ_4 равен нулю, т. е. $w \in L_2(0,T;K)$.

Пусть $\widetilde{v}_i$ — произвольные функции из $C^\infty(0,T,C^\infty(\Omega))$, равные нулю в точках $(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times[0,T]$. Выберем в (16)

$$v_i(t) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \widetilde{v}_i(\xi)\,d\xi,$$

умножим это равенство на τ и просуммируем по t от 0 до $T-\tau$. Результат, используя восполнение Π_τ, запишем в виде

$$\int_0^T \int_\Omega \Big\{ \sum_{j=1}^2 \Big(A_{ij}\varepsilon(\Pi_\tau\widehat{y}) + B_{ij}\varepsilon\Big(\Pi_\tau\frac{\widehat{y}-y}{\tau}\Big)\Big) \frac{\partial \Pi_\tau v_i}{\partial x_j} - (\Pi_\tau\widehat{p}_\tau^+ - ms(\Pi_\tau\widehat{p}_\tau)\Pi_\tau\widehat{p}_\tau^-)\frac{\partial \Pi_\tau v_i}{\partial x_i}\Big\}dx\,dt =$$
$$= \int_0^T \Big\{ \int_\Omega f_i(s(\Pi_\tau p_\tau))\Pi_\tau v_i\,dx + \delta_{i2}\int_{\Gamma_3} F(x,t)\Pi_\tau v_i\,dx\Big\}dt; \quad (38)$$

здесь $\Pi_\tau\widehat{y}$ — вектор-функция $(\Pi_\tau\widehat{y}_1, \Pi_\tau\widehat{y}_2)$, аналогично определяется вектор $\Pi_\tau\frac{\widehat{y}-y}{\tau}$.

В равенстве (38) перейдем к пределу по τ и ε. При этом заметим, что из соотношений (26) следует

$$\varepsilon(\Pi_\tau\widehat{y}) \rightharpoonup \varepsilon(u), \quad \varepsilon\Big(\Pi_\tau\frac{\widehat{y}-y}{\tau}\Big) \rightharpoonup \varepsilon\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) \quad \text{в} \quad (L_2(Q_T))^3.$$

Учитывая линейность и непрерывность операторов A и B, будем иметь

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^2 \Big(A_{ij}\varepsilon(\Pi_\tau\widehat{y}) + B_{ij}\varepsilon\Big(\Pi_\tau\frac{\widehat{y}-y}{\tau}\Big)\Big)\frac{\partial \Pi_\tau v_i}{\partial x_j}dx\,dt \to$$
$$\to \int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^2 \Big(A_{ij}\varepsilon(u) + B_{ij}\varepsilon\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big)\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j}dx\,dt \quad \text{при} \ \ \tau \to 0, \ \ \varepsilon \to 0.$$

Для обоснования предельного перехода в последнем слагаемом левой части (38) запишем следующую цепочку равенств:

$$I = \int_0^T \int_\Omega (\Pi_\tau \widehat{p}_\tau^+ - ms(\Pi_\tau \widehat{p}_\tau)\Pi_\tau \widehat{p}_\tau^-) \frac{\partial \Pi_\tau v_i}{\partial x_i} dx\,dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \Pi_\tau \widehat{w}_\tau^+ \frac{\partial \Pi_\tau v_i}{\partial x_i} dx\,dt - m\int_0^T \int_\Omega s(-\Pi_\tau \widehat{p}_\tau^-)\Pi_\tau \widehat{p}_\tau^- \frac{\partial \Pi_\tau v_i}{\partial x_i} dx\,dt.$$

Используя (6), (28), (29) и теорему Лебега о предельном переходе, докажем, что при $\tau \to 0$, $\varepsilon \to 0$

$$I \to \int_0^T \int_\Omega w^+ \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_i} dx - \int_0^T \int_\Omega ms(-p^-)p^- \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_i} dx = \int_0^T \int_\Omega (p^+ - ms(p)p^-) \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_i} dx.$$

Результат предельного перехода в правой части равенства (38) также понятен, поскольку функции f_i непрерывны, следовательно,

$$f_i(s(\Pi_\tau p_\tau)) \to f_i(s(p)) \quad \text{п. в. в } \ Q_T.$$

Итак, из (38) при $\tau \to 0$, $\varepsilon \to 0$ получим

$$\int_0^T \int_\Omega \Big\{ \sum_{j=1}^2 \Big(A_{ij}\varepsilon(u) + B_{ij}\varepsilon\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\Big) \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} - (p^+ - s(p)p^-) \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_i} \Big\} dx\,dt =$$

$$= \int_0^T \Big\{ \int_\Omega f_i(s(p))\widetilde{v}_i dx + \delta_{i2} \int_{\Gamma_3} F(x,t)\widetilde{v}_i dx \Big\} dt. \quad (39)$$

Очевидно, (39) будет справедливым и для $\widetilde{v}_i \in L_2(0,T;\overset{\circ}{V})$. Следовательно, функции u_1, u_2, p, определенные соотношениями (26), (27), удовлетворяют равенствам (13).

Обоснуем теперь справедливость (14). Пусть $\widetilde{z}$ — произвольная функция из $C^\infty(\Omega)$, след которой на $\Gamma_4 \times [0,T]$ неположителен, $\alpha(t)$ — неотрицательная функция такая, что $\alpha(t) \in C^1(0,T)$ и $\alpha(T) = 0$. В (17) выберем $z = z_\tau = \widetilde{z}(t)\alpha(t)$, просуммируем по t от 0 до $T - \tau$ и преобразуем, используя формулу суммирования по частям и легко проверяемое неравенство

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_{\Gamma_4} \widehat{w}_\tau^+ z_\tau dx \le 0.$$

В результате будем иметь

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega \{ s(\widehat{p}_\tau)\operatorname{div}(y)_t z_\tau + \nabla \widehat{w}_\tau \cdot \nabla z_\tau \} dx - \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau m \int_\Omega s(\widehat{p}_\tau)(z_\tau)_t dx -$$

$$- m\int_\Omega s(p^0) z_\tau(x,0) dx \ge \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega b(s(p_\tau))\rho g_2 \frac{\partial z_\tau(t)}{\partial x_2} dx. \quad (40)$$

Неравенство (40) перепишем в эквивалентном виде, используя восполнение Π_τ,

$$\int_0^T \int_\Omega s(\Pi_\tau \widehat{p}_\tau)\Pi_\tau \operatorname{div} \frac{\widehat{y} - y}{\tau} \Pi_\tau z_\tau(t) dx\,dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla \Pi_\tau \widehat{w}_\tau \cdot \nabla \Pi_\tau z_\tau dx\,dt - m\int_0^T \int_\Omega s(\Pi_\tau \widehat{p}_\tau)\Pi_\tau (z_\tau)_t dx\,dt -$$

$$- m\int_\Omega s(p^0) z_\tau(x,0) dx\,dt \ge \int_0^T \int_\Omega b(s(\Pi_\tau p_\tau))\rho g_2 \Pi_\tau \frac{\partial z_\tau}{\partial x_2} dx\,dt. \quad (41)$$

В (41) перейдем к пределу при $\tau, \varepsilon \to 0$. При этом учтем, что из ограниченности функции $s(p)$, леммы 3, сильной сходимости $\Pi_\tau z_\tau$ к $\widetilde{z}\alpha(t)$ в $L_2(Q_T)$ следует справедливость утверждения

$$s(\Pi_\tau \widehat{p}_\tau)\Pi_\tau z_\tau \to s(p)\widetilde{z}\alpha(t) \quad \text{в} \quad L_2(Q_T).$$

Поэтому

$$\int_0^T \int_\Omega s(\Pi_\tau \widehat{p}_\tau)\Pi_\tau \operatorname{div} \frac{\widehat{y} - y}{\tau} \Pi_\tau z_\tau dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega s(p) \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} \widetilde{z}\alpha(t) dx\, dt.$$

В результате предельного перехода в (41) получим неравенство

$$\int_0^T \int_\Omega \left(s(p) \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} \alpha(t)\widetilde{z} + \nabla w \cdot \nabla(\alpha(t)\widetilde{z}) - ms(p) \frac{\partial(\alpha(t)\widetilde{z})}{\partial t} \right) dx\, dt -$$
$$- m \int_\Omega s(p^0)\widetilde{z}(x,0)\alpha(0) dx\, dt \geq \int_0^T \int_\Omega b(s(p))\rho g_2 \frac{\partial(\alpha(t)\widetilde{z})}{\partial x_2} dx\, dt, \quad (42)$$

справедливое для любой функции $\widetilde{z} \in C^\infty(Q_T)$, имеющей неположительный след на $\Gamma_4 \times [0, T]$. Очевидно, множество этих функций плотно в $L_2(0, T; K)$. Поэтому (42) имеет место при любом $\widetilde{z} \in L_2(0, T; K)$, в частности, и при $\widetilde{z} = \overline{z} - w^+$, $\overline{z}$ — произвольная функция из $L_2(0, T; K)$.

Теперь в (17) выберем $z = -\widehat{w}_\tau^- \alpha(t)$, умножим это равенство на τ и просуммируем по t от 0 до $T - \tau$, в результате получим

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega \{ s(\widehat{p}_\tau) \operatorname{div}(y)_\tau (-\alpha(t)\widehat{w}_\tau^-) + \nabla \widehat{w}_\tau \cdot \nabla(-\widehat{w}_\tau^- \alpha(t)) \} dx +$$
$$+ m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega \frac{s(\widehat{p}_\tau) - s(p_\tau)}{\tau} (-\alpha(t)\widehat{w}_\tau^-) dx = \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega b(s(p_\tau))\rho g_2 \frac{\partial(-\alpha(t)\widehat{w}_\tau^-)}{\partial x_2} dx. \quad (43)$$

Используя (24) и формулу суммирования по частям, покажем, что

$$m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega \frac{s(\widehat{p}_\tau) - s(p_\tau)}{\tau} (-\alpha(t)\widehat{w}_\tau^-) dx = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega \frac{\varphi(-\widehat{w}_\tau^-) - \varphi(-w_\tau^-)}{\tau} (-\widehat{w}_\tau^-)\alpha(t) dx \geq$$
$$\geq m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega \frac{\Phi(-\widehat{w}_\tau^-) - \Phi(-w_\tau^-)}{\tau} \alpha(t) dx = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega (\Phi(-w_\tau^-))_t \alpha(t) dx =$$
$$= -m \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \int_\Omega \Phi(-\widehat{w}_\tau^-)(\alpha(t))_t dx - m \int_\Omega \Phi(w^0)\alpha(0) dx.$$

Подставляя полученную оценку в (43), будем иметь

$$\int_0^T \int_\Omega s(\Pi_\tau \widehat{p}_\tau)\Pi_\tau \operatorname{div} \frac{\widehat{y} - y}{\tau} (-\Pi_\tau \alpha(t)\widehat{w}_\tau^-) dx\, dt +$$
$$+ \int_0^T \|\Pi_\tau w_\tau^-\|_1^2 \Pi_\tau \alpha(t) dt - m \int_0^T \int_\Omega \Phi(-\Pi_\tau \widehat{w}_\tau^-)\Pi_\tau(\alpha(t))_t dx\, dt -$$
$$- m \int_\Omega \Phi(w^0)\alpha(0) dx \leq \int_0^T \int_\Omega b(s(\Pi_\tau p_\tau))\rho g_2 \frac{\partial(-\Pi_\tau \alpha(t)\widehat{w}_\tau^-)}{\partial x_2} dx\, dt. \quad (44)$$

В (44) совершим предельный переход при $\tau, \varepsilon \to 0$, учитывая соотношения (26)–(29). В результате получим

$$\int_0^T \int_\Omega s(p) \frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial t} (-w^-)\alpha(t) dx\, dt + \varliminf_{\tau \to 0} \int_0^T \|\Pi_\tau w_\tau^-\|_1^2 \alpha(t) dt -$$
$$- m \int_0^T \int_\Omega \Phi(-w^-)\partial_t(\alpha(t)) dx\, dt - m \int_\Omega \Phi(w^0)\alpha(0) dx \leq \int_0^T \int_\Omega b(s(p))\rho g_2 \frac{\partial(-w^-\alpha(t))}{\partial x_2} dx\, dt. \quad (45)$$

По свойству слабой полунепрерывности снизу нормы
$$\varliminf_{\tau\to 0}\int_0^T \|\Pi_\tau w_\tau^-\|_1^2\alpha\,dt \ge \int_0^T \|w^-\|_1^2\alpha\,dt = \int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla(-w^-)\alpha(t)dx\,dt.$$
Поэтому из (45) следует неравенство
$$\int_0^T\int_\Omega s(p)\frac{\partial\,\mathrm{div}\,u}{\partial t}(-w^-)\alpha(t)dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla(-w^-)\alpha(t)dx\,dt -$$
$$- m\int_0^T\int_\Omega \Phi(-w^-)\partial_t(\alpha(t))dxdt - m\int_\Omega \Phi(w^0)\alpha(0)dx \le \int_0^T\int_\Omega b(s(p))\rho g_2\frac{\partial(-w^-\alpha(t))}{\partial x_2}dx\,dt. \quad (46)$$
Вычитая из (42) при $\widetilde{z} = z - w^+$ неравенство (46), приходим к (14). $\square$

Из лемм 1–4 следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. Костерин А.В., Березинский Д.А. *Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых пористых сред* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 358. – № 3. – С. 343–345.
2. Alt H.W., Luckhaus S. *Quasilinear elliptic-parabolic differential equation* // Math. Z. – 1983. – Bd. 183. – № 8. – S. 311–341.
3. Павлова М.Ф. *Исследование корректности задач фильтрационной консолидации* // Дифференц. уравнения. – 1998. – № 7. – С.965–974.
4. Павлова М.Ф. *Исследование уравнений нестационарной нелинейной фильтрации* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 8. – С. 1436–1446.
5. Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ.* – М.: Мир, 1981. – 408 с.

Казанский государственный университет

Поступила
28.04.2000