ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 8 (507)

УДК 517.968:519.642

В.С. СИЗИКОВ, А.В. СМИРНОВ, Б.А. ФЕДОРОВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ КВАДРАТУР

1. Введение

Вопросу численного решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ) посвящено большое число публикаций ([1]–[6] и др.). Исследованы следующие СИУ:
a) одномерные СИУ I-го рода с ядром Коши [2], [3], [7], например, ([2], сс. 8, 73),

$$\int_a^b \frac{y(s)\,ds}{x-s} = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{1}$$

где $y(s)$ — искомая функция;
b) СИУ I-го рода с ядром Гильберта [2], [3] или с обобщенным ядром Гильберта [3];
c) СИУ II-го рода с ядрами Коши или Гильберта [1], [4], [7], например, [4],

$$A(x)y(x) + \frac{B(x)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{x-s}{2}y(s)ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x,s)y(s)ds = f(x), \quad 0 \le x < 2\pi, \tag{2}$$

где $A(x)$, $B(x)$ — известные непрерывные функции, а $h(x,s)$ — известная 2π-периодическая функция; если $A(x) = 0$ при некоторых, но не всех значениях x, то уравнение (2) будет уравнением III-го рода (ср. [8], с. 140);
d) СИУ I-го или II-го рода с логарифмическими и другими (слабо сингулярными) ядрами, например, ([3], с. 6),

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\Big|\sin\frac{x-s}{2}\Big|\, y(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x,s)\,y(s)\,ds = f(x), \quad 0 \le x < 2\pi. \tag{3}$$

При этом сингулярные интегралы понимаются либо как несобственные, либо в смысле главного значения по Коши–Лебегу.

Рассмотрены также двумерные СИУ [1], [4], нелинейные СИУ [6] и др.

Что касается численных методов решения СИУ, то при их построении использованы следующие основные алгоритмы.

Алгоритм 1 (сдвиг сеток узлов). В работах ([2], с. 8; [3], с. 27; [4]) вводятся дискретные сетки узлов по переменным s и x, например, для уравнения (1): $s_j = a + jh$, $x_i = s_i + \Delta$, $j, i = 0, 1, \dots, n$, $s_n = b$, где $h = (b-a)/n$ — шаг дискретизации, Δ — сдвиг между сетками, полагаемый равным $\Delta = h/2$ ([2], с. 8) или $\Delta \in [0, h/2]$ ([3], с. 27) или $\Delta \in (0, h/2)$ [4]. Введение сдвига Δ позволяет устранить особенности при использовании численных методов, например, метода квадратур.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации, проект № Е00-3.2-387.

Алгоритм 2 (метод квадратур). В работе ([2], с. 8) при построении метода дискретных вихрей (одного из вариантов метода квадратур) интеграл в (1) расписывается по формуле левых прямоугольников, причем полагается, что на каждом промежутке $[s_j, s_{j+1})$ вся подинтегральная функция $\frac{y(s)}{x-s} = \mathrm{const} = \frac{y(s_j)}{x-s_j}$ при некотором фиксированном $x = x_i$. В результате при использовании дискретных сеток по s и x и сдвига Δ между ними получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений $y_j \equiv y(s_j)$, матрица которой имеет преобладающую диагональ. В работе [4] при решении уравнения (2) интеграл $\int\limits_0^{2\pi} h(x,s)\, y(s)\, ds$ также расписывается по формуле левых прямоугольников и полагается $h(x,s)\, y(s) = \mathrm{const} = h(x,s_j)\, y(s_j)$ при $s \in [s_j, s_{j+1})$, интеграл же $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\,\frac{x-s}{2} y(s)ds$ расписывается по обобщенной формуле левых прямоугольников (ср. [9], с. 57), согласно которой лишь $y(s) = \mathrm{const} = y(s_j)$ при $s \in [s_j, s_{j+1})$, а интеграл $\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \mathrm{ctg}\,\frac{x_i-s}{2} ds$ вычисляется аналитически. При этом, чтобы он не обращался в бесконечность ни при какой комбинации i и j, использован сдвиг сеток $\Delta \in (0, h/2)$.

Алгоритм 3 (аппроксимация решения). В работе ([3], сс. 15, 27), а также ([1], сс. 149, 159) искомое решение $y(s)$ аппроксимируется алгебраическим или тригонометрическим многочленом $y_m(s)$ порядка m или полиномиальным сплайном. При этом, например, в (3) интеграл $\int\limits_0^{2\pi} h(x,s) y_m(s) ds$ заменяется конечной суммой по формуле левых прямоугольников, а интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \ln|\sin\frac{x-s}{2}| y_m(s) ds$ вычисляется аналитически. В результате коэффициенты аппроксимирующего многочлена $y_m(s)$ определяются из условия минимума невязки, что приводит к тому или иному проекционному методу (методу квадратур, наименьших квадратов, Галёркина, коллокации, сплайнов и т. д.) и к решению соответствующей СЛАУ.

Во всех перечисленных методах имеет место *саморегуляризация*, причем роль параметра регуляризации играет Δ. При этом чем больше $\Delta \in (0, h/2]$, тем устойчивее решение y, но меньше разрешающая способность численного метода, и чем меньше Δ, тем менее устойчиво решение, но выше разрешение.

В данной работе предлагается иной вариант численного решения некоторых СИУ. А именно, сетки узлов по x и по s полагаются совпадающими (т. е. $\Delta = 0$), а особенности устраняются за счет использования обобщенной квадратурной формулы (ср. [9], с. 57). Такая методика может быть применена не для всех СИУ. Она не применима для СИУ с ядрами Коши или Гильберта, но применима для некоторых СИУ с логарифмическими и другими (слабо сингулярными) ядрами ([3], сс. 6, 232). В данной работе рассматриваются лишь СИУ I-го рода с ядром вида $K(x,s) = s/\sqrt{s^2 - x^2}$ и с переменным нижним пределом (уравнение Абеля) и метод квадратур (обобщенный метод квадратур) его решения.

2. Метод численного решения СИУ на основе обобщенной квадратурной формулы

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение Абеля (уравнение I-го рода с переменным нижним пределом) в форме[1]

$$\int_x^R \frac{s}{\sqrt{s^2 - x^2}} y(s) ds = f(x), \quad 0 \le x \le R, \tag{4}$$

[1]Уравнение Абеля находит широкое применение в прикладных задачах диагностики плазмы, астрофизики, оптической и рентгеновской дифракции и т. д. ([8], с. 109; [10], с. 97–98). В астрофизике оно часто называется уравнением Цейпеля ([8], с. 109).

где $y(s)$ – искомая функция и, в частности, $R = \infty$. Заметим, что в традиционной форме уравнение Абеля записывается как ([8], с. 107; [11], с. 19)

$$\int_0^x \frac{y(s)}{\sqrt{x-s}} ds = 2f(x), \quad x > 0, \tag{5}$$

причем между (4) и (5) имеет место взаимно однозначное соответствие.

Уравнение (4) является сингулярным уравнением со слабой особенностью. Данное уравнение имеет аналитическое решение ([10], с. 98)

$$y(s) = -\frac{2}{\pi} \int_s^R \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 - s^2}} dx, \quad 0 \le s \le R. \tag{6}$$

Однако решение (6) содержит производную $f'(x)$ от обычно экспериментальной, а значит, зашумленной функции $f(x)$, а задача численного дифференцирования зашумленной функции является некорректной ([12], с. 18–19). Кроме того, интеграл в правой части (6) является несобственным. Поэтому задача вычисления решения (6) не является тривиальной. В данной работе предлагаются два численных метода получения решения уравнения Абеля.

1-й метод (метод квадратур численного решения уравнения (4) на основе обобщенной формулы левых прямоугольников — обобщенный метод квадратур). Введем равномерные совпадающие сетки узлов по x и s

$$x_i = ih, \quad s_j = x_j = jh, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \quad x_n = s_n = R, \tag{7}$$

где $h = \Delta x = \Delta s = R/n = \text{const}$ — шаг дискретизации (R считаем конечным). На некотором промежутке $[s_j, s_{j+1})$, $j \in [0, n-1]$, полагаем

$$y(s) = y(s_j) = \text{const}\,. \tag{8}$$

Легко проверяется

Лемма 1. *При условии* (8) *имеет место равенство*

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x^2}}\, y(s)\, ds = \left(\sqrt{s_{j+1}^2 - x^2} - \sqrt{s_j^2 - x^2}\,\right) y_j, \quad j \in [0, n-1], \tag{9}$$

где $y_j \equiv y(s_j)$, $x \le s_j < s_{j+1} \le R$.

Определение 1. Назовем формулу (9) *обобщенной формулой левых прямоугольников* (ср. [9], сс. 57, 74) для сингулярности $\frac{s}{\sqrt{s^2-x^2}}$, а множители $\left(\sqrt{s_{j+1}^2 - x^2} - \sqrt{s_j^2 - x^2}\,\right)$ — *квадратурными коэффициентами* этой формулы.

Теорема 1. *Численное решение уравнения* (4) *по* 1*-му методу выражается следующими рекуррентными формулами*:

$$\begin{gathered} y_n = y_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{p_{n-1,n-1}} = \frac{f_{n-1}}{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}, \\ y_i = \frac{f_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} p_{ij}\, y_j}{p_{ii}}, \quad i = n-2, n-3, \ldots, 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $f_i \equiv f(x_i)$, *а*

$$p_{ij} = \sqrt{s_{j+1}^2 - x_i^2} - \sqrt{s_j^2 - x_i^2}\,. \tag{11}$$

Доказательство. Интеграл в левой части (4) равен сумме интегралов (9) по отдельным промежуткам $[s_j, s_{j+1})$:

$$\int_{x_i}^{R} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}}\, y(s)\, ds = \sum_{j=i}^{n-1} \big(\sqrt{s_{j+1}^2 - x_i^2} - \sqrt{s_j^2 - x_i^2}\,\big) y_j = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Соотношения (12) образуют СЛАУ относительно значений y_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Поскольку матрица данной СЛАУ является верхней треугольной, то ее решение можно найти рекуррентно. Из (12), изменяя i в направлении убывания, т. е. полагая $i = n-1, n-2, \ldots, 0$, получим последовательно решения для $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0$. Что касается значения $y_n \equiv y(R)$, то вводим дополнительное равенство $y_n = y_{n-1}$. В результате получим формулы (10), (11). $\square$

2-й метод (метод вычисления интеграла в выражении (6) по квадратурной формуле, учитывающей его сингулярность). Как и в 1-м методе, вводим сетки узлов (7). Далее полагаем, что на промежутке $[x_i, x_{i+1})$, $i \in [0, n-1]$, функция

$$f'(x) = f'(x_i) = \mathrm{const}\,. \tag{13}$$

Тогда справедлива

Лемма 2. *При условии* (13) *имеет место равенство*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 - s^2}} dx = \ln \frac{x_{i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 - s^2}}{x_i + \sqrt{x_i^2 - s^2}} f_i', \quad i \in [0, n-1], \tag{14}$$

где $f_i' \equiv f'(x_i)$, $s \le x_i < x_{i+1} \le R$.

Определение 2. Назовем формулу (14) *обобщенной формулой левых прямоугольников* для сингулярности $\frac{1}{\sqrt{x^2 - s^2}}$, а множители $\ln \frac{x_{i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 - s^2}}{x_i + \sqrt{x_i^2 - s^2}}$ — *квадратурными коэффициентами* этой формулы.

Теорема 2. *Пусть строится численно решение* (6), *причем интеграл в правой части* (6) *вычисляется с использованием обобщенной квадратурной формулы левых прямоугольников* (14) *на сетках узлов* (7). *В этом случае решение* (6) *в численном виде по 2-му методу равно*

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{f_0 - h \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j}{h}, \\ y_j &= -\frac{2}{\pi} \sum_{i=j}^{n-1} q_{ij} f_i', \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \\ y_n &= y_{n-1}, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$q_{ij} = \ln \frac{x_{i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 - s_j^2}}{x_i + \sqrt{x_i^2 - s_j^2}}.$$

Доказательство. Интеграл в правой части (6) равен сумме интегралов (14) по отдельным промежуткам $[x_i, x_{i+1})$:

$$\int_{s_j}^{R} \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 - s_j^2}} dx = \sum_{i=j}^{n-1} \ln \frac{x_{i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 - s_j^2}}{x_i + \sqrt{x_i^2 - s_j^2}} f_i', \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Отсюда получаем выражение (15) для y_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Что касается значения y_n, то вводим дополнительное равенство $y_n = y_{n-1}$. Для получения y_0 формула (14) не может быть использована, т. к. дает расходимость при $x_0 = s_0 = 0$. Поэтому для вычисления y_0 воспользуемся формулой (10) 1-го метода при $i = 0$. В результате получим формулы (15). □

3. Оценки погрешностей 1-го метода

Выведем формулы, дающие оценки погрешностей решения уравнения (4) 1-м методом (ср. [8], сс. 42, 122).

Лемма 3. *Интеграл*

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} y(s) ds, \quad x_i \le s_j < s_{j+1} \le R, \quad j = i, \ldots, n-1, \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{16}$$

при использовании обобщенной формулы левых прямоугольников (9) *и учете квадратурной погрешности может быть записан как*

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} y(s) ds = y_j\, p_{ij} + \Delta R_{ij}, \tag{17}$$

где p_{ij} *— квадратурный коэффициент согласно* (11), *а* ΔR_{ij} *— квадратурная погрешность на промежутке* $[s_j, s_{j+1})$, *приближенно равная*

$$\Delta R_{ij} = \frac{y'(\zeta_j)}{2} \left[(s_{j+1} - 2s_j)\sqrt{s_{j+1}^2 - x_i^2} + s_j\sqrt{s_j^2 - x_i^2} + x_i^2 \ln \frac{s_{j+1} + \sqrt{s_{j+1}^2 - x_i^2}}{s_j + \sqrt{s_j^2 - x_i^2}} \right], \tag{18}$$

причем $\zeta_j \in [s_j, s_{j+1})$.

Доказательство. Для вычисления интеграла (16) представим функцию $y(s)$ на каждом промежутке интерполяционным полиномом Лагранжа нулевой степени $\widetilde{y}(s) = y_j$, $s \in [s_j, s_{j+1})$, $j \in [0, n-1]$. Погрешность такой интерполяции равна ([13], с. 504) $\Delta y_j(s) \equiv y(s) - y_j = y'(\xi)\,(s - s_j)$, где $\xi = \xi_j(s) \in [s_j, s_{j+1})$. Тогда $y(s) = y_j + y'(\xi)\,(s - s_j)$ и получим (17), где

$$\Delta R_{ij} = \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s(s - s_j)}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} y'(\xi) ds$$

или приближенно

$$\Delta R_{ij} = y'(\zeta_j) \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s(s - s_j)}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} ds, \quad \zeta_j \in [s_j, s_{j+1}]. \tag{19}$$

Интеграл в (19) вычисляется аналитически, в результате получим оценку (18). □

Замечание 1. Производную $y'(\zeta)$ можно вычислить по приближенной формуле

$$y'(\zeta_j) \equiv y'_j = \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y_j}{h}, & j = 0; \\ \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}, & j \in [1, n-1]. \end{cases} \tag{20}$$

Теорема 3. *Численное решение уравнения* (4) *на сетках узлов* (7) *методом квадратур на основе обобщенной формулы левых прямоугольников* (9) *выражается формулами* (10), *а погрешности — следующими рекуррентными формулами*:

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} = \frac{\Delta R_{n-1,n-1}}{p_{n-1,n-1}},$$
$$\Delta y_i = \frac{R_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} p_{ij}\Delta y_j}{p_{ii}}, \quad i = n-2, n-3, \ldots, 0, \tag{21}$$

где

$$R_i = \sum_{j=i}^{n-1} \Delta R_{ij}, \tag{22}$$

причем p_{ij}, ΔR_{ij} *и* $y'(\zeta_j)$ *выражаются формулами* (11), (18) *и* (20) *соответственно.*

Доказательство. Запишем интеграл в левой части (4) в виде суммы интегралов по промежуткам

$$\int_{x_i}^{R} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} y(s)ds = \sum_{j=i}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} [y_j + \Delta y_j(s)]\, ds =$$
$$= \sum_{j=i}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} [y_j + y'(\xi)(s - s_j)]\, ds, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

откуда

$$\sum_{j=i}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} \Delta y_j(s)ds = \sum_{j=i}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \frac{s(s-s_j)}{\sqrt{s^2 - x_i^2}} y'(\xi)ds, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{23}$$

Для вычисления интеграла в левой части (23) используем формулу левых прямоугольников, т. е. положим $\Delta y_j(s) = \Delta y(s_j) \equiv \Delta y_j = \mathrm{const}$, $s \in [s_j, s_{j+1})$, и вычислим интеграл аналогично (9). Интеграл в правой части (23) равен ΔR_{ij} согласно (19). Тогда

$$\sum_{j=i}^{n-1} p_{ij}\Delta y_j = R_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{24}$$

где через R_i обозначена сумма (22). Запись (24) есть СЛАУ относительно Δy_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. При этом полагается, что предварительно вычислены значения y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, в виде (10), а затем значения R_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, согласно (22), (18), (20). Решая СЛАУ (24) с верхней треугольной матрицей, получим в рекуррентной форме решение (21), добавив при этом условие $\Delta y_n = \Delta y_{n-1}$. □

Замечание 2. Формулы (21) дают значения погрешностей решения Δy_i с учетом знака (ср. [8], сс. 42, 122), а не по абсолютной величине вида $|\Delta y_i| \approx \cdots$ или верхних оценок $|\Delta y_i| \leq \cdots$ или верхних оценок по норме $\|\Delta y\| \leq \cdots$ или асимптотических оценок скорости сходимости к точному решению $\|\Delta y\| = O(\cdots)$, как в большинстве работ ([3], с. 18–46 и др.). Поэтому после получения решения y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, в виде (10) и вычисления погрешностей решения Δy_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, согласно (21) можно получить уточненное решение

$$\widehat{y}_i = y_i + \Delta y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{25}$$

4. Численные примеры

Изложенную методику численного решения СИУ обобщенным методом квадратур (1-м методом) проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 1. Решается уравнение Абеля (4); точное решение $y(s) = R - s$, $0 \le s \le R$, $R = 1$, правая часть $f(x) = \frac{R}{2}\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{2}\ln\frac{R+\sqrt{R^2-x^2}}{x}$, $f(0) = R^2/2$. Сетки узлов по s и по x: $s_j = jh$, $x_j = s_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, где $n = 20$ — число шагов, $h = \Delta s = \Delta x = R/n = 0{,}05$ — шаг дискретизации.

На рис. 1 приведены: точное решение $y(s)$, правая часть $f(x)$, приближенное решение y_i согласно (10), погрешности решения Δy_i в виде (21) и уточненное решение $\widehat{y}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, согласно (25).

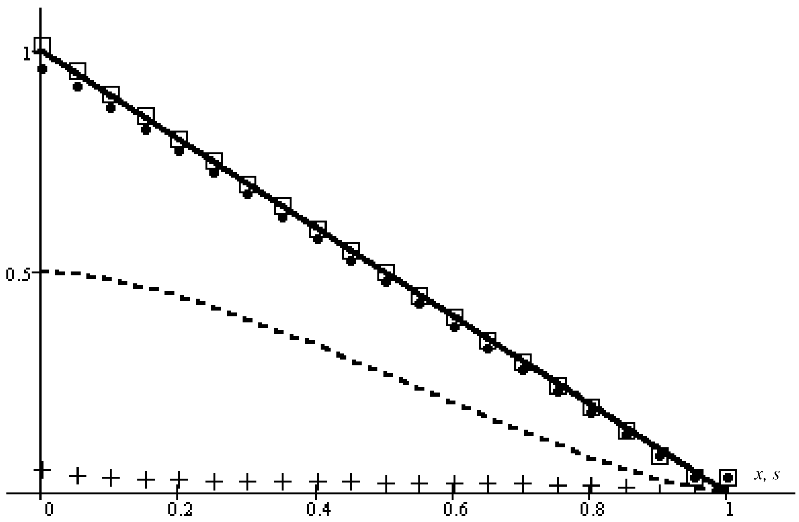

Рис. 1

——— — точное решение $y(s)$, – – – – — правая часть $f(x)$,

• — приближенное решение y_i, + — погрешность решения Δy_i, □ — уточненное решение $\widehat{y}_i$.

Пример 2. Решается "усеченное" уравнение Абеля (из задачи дифракции рентгеновских лучей)

$$\int_q^b \frac{s}{\sqrt{s^2 - q^2}} J(s)ds = f(q), \quad a \le q \le b,$$

где $a = 1$, $b = 71$. Точное решение $J(s) = 1/s^3$, $a \le s \le b$, правая часть $f(q) = \sqrt{b^2 - q^2}/(bq^2)$. Сетки узлов по s и по q: $s_j = a + jh$, $q_j = s_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, где $n = 70$ – число шагов, $h = \Delta s = \Delta q = (b - a)/n = 1$ — шаг дискретизации.

Характерная особенность примера 2 состоит в том, что диапазон изменения как $J(s)$, так и $f(q)$ составляет несколько порядков.

На рис. 2 приведены: точное решение $J(s)$, функция $2f(q)$, приближенное решение J_i согласно (10), погрешности решения ΔJ_i в форме (21) и уточненное решение $\widehat{J}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, согласно (25).

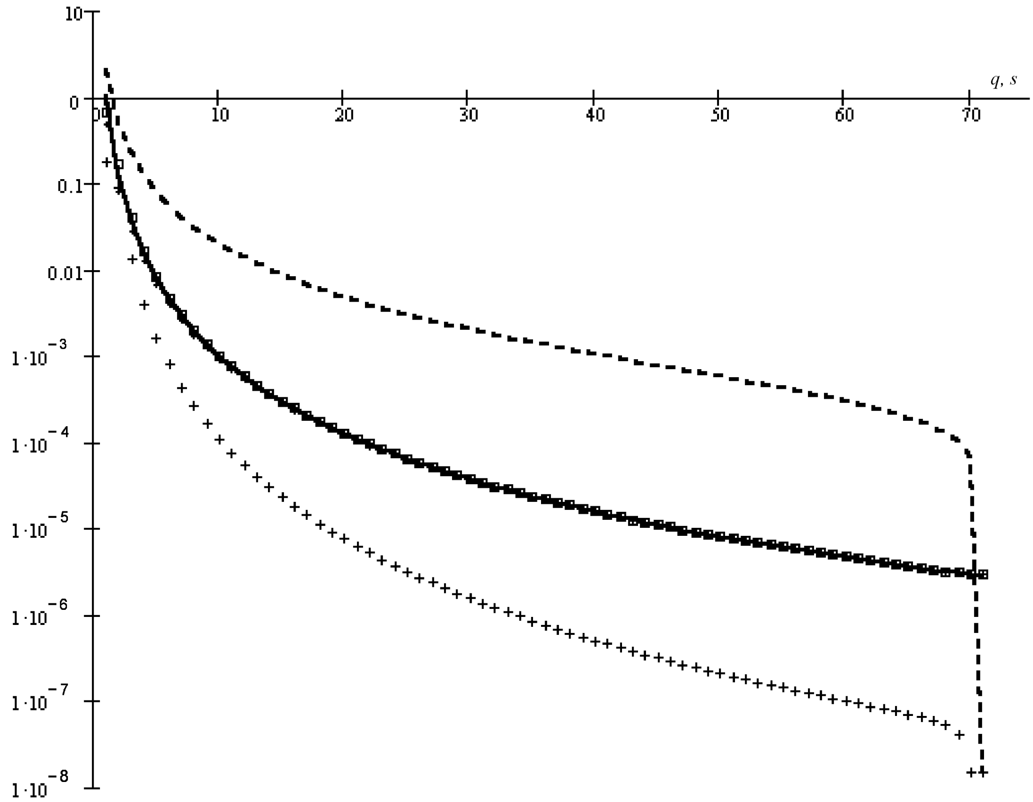

Рис. 2

——— — точное решение $J(s)$, – – – – — функция $2f(q)$,

• — приближенное решение J_i, + — погрешность решения ΔJ_i, □ — уточненное решение $\widehat{J}_i$.

Литература

1. Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.
2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.* – М.: Наука, 1985. – 256 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
4. Бойков И.В., Кудряшова Н.Ю. *Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях* // Дифференц. уравн. – 2000. – Т. 36. – № 9. – С. 1230–1237.
5. Самойлова Э.Н. *Сплайновые приближения решения сингулярного интегродифференциального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 35–45.
6. Рахимов И.К. *Проекционные методы решения сингулярного интегрального уравнения Теодорсена* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 9. – С. 67–70.
7. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – 3-е изд-е. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
8. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.* – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
9. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. *Справочная книга по численному интегрированию.* – М.: Наука, 1966. – 372 с.

10. Сизиков В.С. *Математические методы обработки результатов измерений.* – СПб.: Политехника, 2001. – 240 с.
11. Краснов М.Л. *Интегральные уравнения. Введение в теорию.* – М.: Наука, 1975. – 304 с.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – 3-е изд-е. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
13. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* – 13-е изд-е. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Поступила
27.02.2003