ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 517.929

С.М. СЕДОВА

О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассмотрим задачу Коши для скалярного уравнения

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) - a(t)x(t-\omega) = f(t), \quad t > 0, \\ x(\xi) = 0, \quad \xi < 0; \quad x(0) = \nu\end{gathered} \tag{1}$$

с постоянным запаздыванием $\omega > 0$ и $m\omega$-периодическим коэффициентом $a(t) : a(t+m\omega) = a(t)$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть дополнительно выполнены условия: $a \in L_\infty[0, m\omega]$, $f \in L[0,b]$ $\forall b > 0$ ($L_\infty[0,b]$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на $[0,b]$ функций $y : [0,b] \to R$, $\|y\|_{L_\infty} = \operatorname*{vrai\,sup}_{0\le t\le b} |y(t)|$; $L[0,b]$ — пространство функций $y : [0,b] \to R$, измеримых и суммируемых на отрезке $[0,b]$, $\|y\|_L = \int\limits_0^b |y(t)|dt$).

В данной статье автор продолжает развивать идеи и результаты З.И. Рехлицкого [1], В.В. Малыгиной [2], [3] об устойчивости уравнения (1) в рамках метода производящих функций ([4], с. 25). Сформулирован и доказан критерий устойчивости уравнения (1). Используется краевая задача, которой удовлетворяют компоненты производящей функции, построенной по функции Коши уравнения (1) ([5], с. 115). Идея использования условий разрешимости специальных краевых задач при изучении уравнений с периодическими параметрами возникла давно (библиографию см. в [4]) и успешно развивалась в работах Е.Л. Тонкова, Г.И. Юткина (напр. [6]) (для обыкновенных дифференциальных уравнений), А.М. Зверкина [7], Ю.Ф. Долгого [8], [9] (для уравнений с запаздывающим аргументом).

В работе З.И. Рехлицкого [1] предложен критерий устойчивости уравнения (1).

Пусть $a(t)$ — непрерывная на $[0, m\omega]$ комплекснозначная функция; для того чтобы при всех ограниченных и непрерывных функциях $f(t)$ задача (1) *имела ограниченные решения $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы все корни $z_\theta \in \mathbb{C}$ при всех $\theta \in [0,\omega]$ уравнения $\triangle_m(\theta, z) = 0$ лежали вне единичного круга*: $|z_\theta| > 1$.

Не выписывая явно выражение $\triangle_m(\theta, z)$, приводимое в [1], отметим только, что $\triangle_m(\theta, z)$ — определитель m-го порядка, элементы которого являются рядами (целыми функциями) относительно z с коэффициентами, зависящими от параметра θ. Таким образом, проверка условия критерия Рехлицкого для конкретного уравнения — это самостоятельная трудоемкая задача и в достаточно общем случае еще нерешенная.

Из общей теории функционально-дифференциальных уравнений известно ([5], с. 84), что задача (1) имеет единственное решение

$$x(t) = X(t)\nu + \int_0^t C(t,s)f(s)ds,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01613.

где $X(t) = C(t, 0)$ — "фундаментальное решение" уравнения (1), $C(t, s)$ — "функция Коши" уравнения (1). В [10] показано, что $C(t, s)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial C(t,s)}{\partial t} = a(t)C(t-\omega, s), \quad t > s, \\ C(\xi, s) = 0, \quad \xi < s; \quad C(s,s) = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Мы будем пользоваться следующей теоремой Перрона-Халаная-Тышкевича ([11], с. 31).

Каждому $f \in L_\infty[0, \infty)$ соответствует непрерывное ограниченное на $[0, \infty]$ решение $x(t)$ задачи (1) *тогда и только тогда, когда функция Коши уравнения* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$|C(t,s)| \leq N \exp(-\alpha(t-s)), \quad t \geq s \geq 0, \tag{3}$$

при некоторых $N > 0$, $\alpha > 0$.

В работах В.В. Малыгиной [2], [3] сформулирован и доказан следующий критерий устойчивости.

Для того чтобы функция Коши $C(t, s)$ уравнения (1) *удовлетворяла оценке* (3), *необходимо и достаточно, чтобы для функции $r(\theta)$, $\theta \in [0, \omega]$, определенной условиями*

$$\begin{gathered} r(\theta) = \min\{|z| : z \in \mathbb{C} \backslash h(R_\theta)\}, \\ h(R_\theta) = \{z \in \mathbb{C} : m \times m\text{-}\textit{матрица } (E - zR_\theta(z)) \textit{ обратима}\}, \end{gathered}$$

выполнялось неравенство $r(\theta) > 1$. Здесь $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $R_\theta(z)$ — громоздкий матричный ряд. Заметим, что $r(\theta)$ является радиусом сходимости некоторого функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(\theta, \gamma) z^n$.

Ниже сформулируем условия, при которых в критерии Рехлицкого функция $\triangle_m(\theta, z)$ не зависит от θ, и в критерии Малыгиной $r(\theta) \equiv z_0$, где z_0 — наименьший по модулю корень уравнения $\triangle_m(0, z) = 0$. Кроме того, для случаев $m = 2, 3$ предлагается упрощенный вид функции $\triangle_m(0, z)$.

1. Краевая задача

Производящей функцией $F(z)$ для последовательности элементов $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n = F(z)$ [12]; функция $F(z)$ определена и аналитична в области $|z| < r$, r — радиус сходимости ряда.

Пусть $C(t, s)$ — решение задачи (2). Далее, $t = s + n\omega + \gamma$ (для фиксированного $t \geq s$ существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in [0, \omega]$). Обозначим $C(s + n\omega + \gamma, s) = d_n(\gamma, s)$ (здесь $d_0(\gamma, s) = 1$). Рассмотрим производящую функцию $F(z, \gamma, s)$ для последовательности $\{d_n(\gamma, s)\}_{n=0}^{\infty}$ и выделим в ней m компонент $F_i(z, \gamma, s)$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{gathered} F(z,\gamma,s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\gamma,s) z^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{mk}(\gamma,s) z^{mk} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} d_{mk+1}(\gamma,s) z^{mk+1} + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} d_{mk+m-1}(\gamma,s) z^{mk+m-1} \stackrel{\text{def}}{=} \\ = F_m(z,\gamma,s) + F_{m-1}(z,\gamma,s) + \cdots + F_1(z,\gamma,s). \end{gathered}$$

В предположении, что $F_i(z, \gamma, s)$, $i = 1, \ldots, m$, имеют одну и ту же область аналитичности, справедлива

Лемма 1. *При фиксированных z и s ($z \in \mathbb{C}$, $s > 0$) функции $F_i(z, \gamma, s)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют по γ, $\gamma \in [0, \omega]$, системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} F'_{i,\gamma}(z,\gamma,s) = za(s + (m-i)\omega + \gamma)F_{i+1}(z,\gamma,s), \quad i = 1, \ldots, m-1, \\ F'_{m,\gamma}(z,\gamma,s) = za(s+\gamma)F_1(z,\gamma,s), \end{cases} \qquad \gamma \in (0,\omega), \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} F_i(z,0,s) = zF_{i+1}(z,\omega,s), \quad i = 1, \ldots, m-1, \\ F_m(z,0,s) = zF_1(z,\omega,s) + 1. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. При $i = 1, \ldots, m-1$ в силу (2) имеем

$$d'_{mk+m-i,\gamma}(\gamma,s) = C'_\gamma(s + (mk+m-i)\omega + \gamma, s) = \dot{C}_t(s + (mk+m-i)\omega + \gamma, s) =$$
$$= a(s + (mk+m-i)\omega + \gamma) \cdot C(s + (mk+m-i-1)\omega + \gamma, s) = a(s + (m-i)\omega + \gamma)d_{mk+m-i-1}(\gamma,s).$$

Таким образом,

$$F'_{i,\gamma}(z,\gamma,s) = \sum_{k=0}^{\infty} d'_{mk+m-i,\gamma}(\gamma,s)z^{mk+m-i} =$$
$$= za(s+(m-i)\omega+\gamma)\sum_{k=0}^{\infty} d_{mk+m-i-1}(\gamma,s)z^{mk+m-i-1} =$$
$$= za(s+(m-i)\omega+\gamma)F_{i+1}(z,\gamma,s),$$

что и дает первые $m-1$ уравнений системы (4). m-е уравнение получим на основе равенства

$$d'_{mk,\gamma}(\gamma,s) = C'_\gamma(s + mk\omega + \gamma, s) = \dot{C}_t(s + mk\omega + \gamma, s) =$$
$$= a(s + mk\omega + \gamma) \cdot C(s + (mk-1)\omega + \gamma, s) = a(s+\gamma)d_{mk-1}(\gamma,s).$$

Учитывая, что $d_0(\gamma,s) = 1$, имеем

$$F'_{m,\gamma}(z,\gamma,s) = \sum_{k=0}^{\infty} d'_{mk,\gamma}(\gamma,s)z^{mk} = \sum_{k=1}^{\infty} d'_{mk,\gamma}(\gamma,s)z^{mk} =$$
$$= za(s+\gamma)\sum_{k=1}^{\infty} d_{mk-1}(\gamma,s)z^{mk-1} = za(s+\gamma)\sum_{l=0}^{\infty} d_{ml+m-1}(\gamma,s)z^{ml+m-1} = za(s+\gamma)F_1(z,\gamma,s),$$

что дает m-е уравнение в (4). Получим первые $m-1$ краевых условий в (5). Имеем

$$d_{mk+m-i}(0,s) = C(s + (mk+m-i)\omega, s) =$$
$$= C(s + (mk+m-i-1)\omega + \omega, s) = d_{mk+m-i-1}(\omega,s), \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

Умножая на z^{mk+m-i} равенство $d_{mk+m-i}(0,s) = d_{mk+m-i-1}(\omega,s)$ и суммируя по $k = 0, 1, 2, \ldots$, получаем

$$F_i(z,0,s) = zF_{i+1}(z,\omega,s), \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

m-е краевое условие в (5) получаем из равенства $d_{mk}(0,s) = d_{mk-1}(\omega,s)$, умножая на z^{mk} и суммируя по $k = 1, 2, \ldots$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{mk}(0,s)z^{mk} = z\sum_{k=1}^{\infty} d_{mk-1}(\omega,s)z^{mk-1} = z\sum_{l=0}^{\infty} d_{ml+m-1}(\omega,s)z^{ml+m-1},$$

или $F_m(z,0,s) - 1 = zF_1(z,\omega,s)$. $\square$

Обозначим $a(t)=\alpha_1(t), a(\omega+t)=\alpha_2(t),\dots,a((m-1)\omega+t)=\alpha_m(t)$. Согласно лемме 1 построение функций $F_i(z,\gamma,s)$, $i=1,\dots,m$, сводится к решению системы m-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'(\gamma)=zA(s+\gamma)y(\gamma),\quad \gamma\in(0,\omega),\quad y(\gamma)=\mathrm{col}\{y_1(\gamma),\dots,y_m(\gamma)\} \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$y(0)=zVy(\omega)+\nu, \tag{7}$$

где

$$A(s+\gamma)=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_m & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{m-1} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_2\\ \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}(s+\gamma),$$

$(m\times m)$-матрица V и m-мерный вектор ν определяются равенствами

$$V=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},\qquad \nu=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Пусть $Y(z,\gamma,s)$ — фундаментальная матрица системы (6). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что решение краевой задачи (6), (7) имеет представление

$$y(z,\gamma,s)=-Y(z,\gamma,s)(zVY(z,\omega,s)-E)^{-1}\nu.$$

Здесь E — единичная матрица m-го порядка. Обозначим

$$(zVY(z,\omega,s)-E)^{-1}=\frac{B(z,s)}{\triangle_m(z,s)},$$

где $B(z,s)$ — присоединенная матрица к матрице $(zVY(z,\omega,s)-E)$,

$$\triangle_m(z,s)=\det(zVY(z,\omega,s)-E)\overset{\mathrm{def}}{=}|zVY(z,\omega,s)-E|. \tag{8}$$

Тогда

$$y(z,\gamma,s)=-\frac{Y(z,\gamma,s)B(z,s)\nu}{\triangle_m(z,s)}. \tag{9}$$

Отметим, что фундаментальная матрица $Y(z,\gamma,s)$ определяется равенством [13]

$$Y(z,\gamma,s)=E+z\int_0^\gamma A(s+t_1)dt_1+z^2\int_0^\gamma A(s+t_1)dt_1\int_0^{t_1}A(s+t_2)dt_2+ \\ +z^3\int_0^\gamma A(s+t_1)dt_1\int_0^{t_1}A(s+t_2)dt_2\int_0^{t_2}A(s+t_3)dt_3+\cdots, \tag{10}$$

причем все элементы матрицы $Y(z,\gamma,s)$ являются целыми функциями по z (при всех $\gamma\in[0,\omega]$, $s>0$), если $a\in L_\infty[0,m\omega]$.

Пусть $r(\gamma,s)$ – радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}d_n(\gamma,s)z^n=F(z,\gamma,s). \tag{11}$$

Все компоненты $y_i(z,\gamma,s)$ вектора $y(z,\gamma,s)$ в (9) есть дроби с одним знаменателем $\triangle_m(z,s)$, являющимся целой функцией по z при $s>0$, и уже своим для каждого i, $1\le i\le m$, числителем, тоже являющимся целой функцией по z при $s>0$ и $\gamma\in[0,\omega]$. Поэтому функции $F_i(z,\gamma,s)\equiv y_i(z,\gamma,s)$, $1\le i\le m$, имеют одну область аналитичности, что предполагалось в лемме 1. Так как

$$F(z,\gamma,s)=\sum_{i=1}^{m}F_i(z,\gamma,s)=\sum_{i=1}^{m}y_i(z,\gamma,s), \tag{12}$$

то функция $F(z,\gamma,s)$ имеет ту же область аналитичности, что и ее компоненты $F_i(z,\gamma,s)$, $i=1,\dots,m$. Так как в силу (10) имеет место равенство $Y(z,\gamma,s+T)=Y(z,\gamma,s)$, $T=m\omega$, при всех $z\in\mathbb{C}$ и $\gamma\in[0,\omega]$, то можно считать, что $s\in[0,T]$.

На основании сказанного имеем

$$r(\gamma,s)\equiv r(0,s)\ \text{при}\ s\in[0,T]. \tag{13}$$

2. Случаи $m=2,3$

В этом параграфе дадим явное представление определителя $\triangle_m(z)$ краевой задачи (6), (7) при $m=2,3$.

1. Рассмотрим случай $m=2$: $a(t+2\omega)=a(t)$. Матрица $A(s+\gamma)$ в (6) имеет вид

$$A(s+\gamma)=\begin{pmatrix}0&\alpha_2\\ \alpha_1&0\end{pmatrix}(s+\gamma);\quad \text{здесь}\ a(t)=\begin{cases}\alpha_1(t),\ t\in[0,\omega);\\ \alpha_2(t),\ t\in[\omega,2\omega).\end{cases}$$

Фундаментальную матрицу системы (6) обозначим

$$Y(z,\gamma,s)=\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}\\ y_{21}&y_{22}\end{pmatrix}(z,\gamma,s).$$

Лишь элементы y_{12}, y_{21}, стоящие на побочной диагонали матрицы $Y(z,\gamma,s)$, используются в дальнейшем. Запишем эти элементы в явном виде

$$\begin{aligned}y_{12}(z,\gamma,s)&=z\int_s^{s+\gamma}\alpha_2+z^3\int_s^{s+\gamma}\alpha_{212}+z^5\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[21]^22}+\dots+z^{2n+1}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[21]^n2}+\cdots,\\ y_{21}(z,\gamma,s)&=z\int_s^{s+\gamma}\alpha_1+z^3\int_s^{s+\gamma}\alpha_{121}+z^5\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[12]^21}+\dots+z^{2n+1}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[12]^n1}+\cdots,\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\int_s^{s+\gamma}\alpha_1=\int_s^{s+\gamma}\alpha_1(t)dt=\int_s^{s+\gamma}a(t)dt,\ \int_s^{s+\gamma}\alpha_2=\int_s^{s+\gamma}\alpha_2(t)dt=\int_s^{s+\gamma}a(t+\omega)dt,$$

$$\begin{aligned}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{i_1i_2\dots i_k}&=\int_s^{s+\gamma}\alpha_{i_1}(t_1)dt_1\int_s^{t_1}\alpha_{i_2}(t_2)dt_2\cdots\int_s^{t_k}\alpha_{i_k}(t_k)dt_k=\\ &=\int_s^{s+\gamma}a(t_1+(i_1-1)\omega)dt_1\int_s^{t_1}a(t_2+(i_2-1)\omega)dt_2\cdots\int_s^{t_{k-1}}a(t_k+(i_k-1)\omega)dt_k.\end{aligned} \tag{15}$$

Символ $[i_1i_2]^n$ означает повторение n раз группы индексов i_1i_2.

Имеет место

Лемма 2.

$$\begin{aligned}\triangle_2(z,s)=1-z^2-z^2\Big(\int_s^{s+\omega}\alpha_1+\int_s^{s+\omega}\alpha_2\Big)-z^4\Big(\int_s^{s+\omega}\alpha_{121}+\int_s^{s+\omega}\alpha_{212}\Big)-\\ -z^6\Big(\int_s^{s+\omega}\alpha_{[12]^21}+\int_s^{s+\omega}\alpha_{[21]^22}\Big)-\dots-z^{2n+2}\Big(\int_s^{s+\omega}\alpha_{[12]^n1}+\int_s^{s+\omega}\alpha_{[21]^n2}\Big)-\cdots\end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Раскрывая определитель

$$\triangle_2(z,s)=\begin{vmatrix} zy_{21}-1 & zy_{22}\\ zy_{11} & zy_{12}-1\end{vmatrix}(z,\omega,s)$$

в (8), получим

$$\triangle_2(z,s)=z^2|V|\,|Y(z,\omega,s)|-z(y_{12}+y_{21})(z,\omega,s)+1, \tag{17}$$

где $|V|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$ и по формуле Лиувилля ([14], с. 87)

$$|Y(z,\omega,s)|=\exp(z\int_0^\omega \operatorname{Sp} A(s+\gamma)d\gamma)=1.$$

Из (14) имеем

$$(y_{12}+y_{21})(z,\omega,s)=z\Big(\int_s^{s+\omega}\alpha_1+\int_s^{s+\omega}\alpha_2\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}z^{2n+1}\Big(\int_s^{s+\omega}\alpha_{[12]^n1}+\int_s^{s+\omega}\alpha_{[21]^n2}\Big),$$

что при подстановке в (17) дает (16). $\square$

Лемма 3. 1) *Функция* $\triangle_2(z,s)$ *не зависит от* s: $\triangle_2(z,s)=\triangle_2(z,0)\overset{\text{def}}{=}\triangle_2(z)$;
2) $r(\gamma,s)\equiv\text{const}=r$ *и* $r=|z_0|$, *где* z_0 *— наименьший по модулю корень уравнения* $\triangle_2(z)=0$.

Доказательство. 1) Покажем независимость от s сумм интегралов в (16). Для этого выясним, что производная по s от коэффициента при z^{2n+2} равна 0, $n\ge 0$:

$$\begin{aligned}&\Big(\int_s^{s+\omega}a(t_1)dt_1\int_s^{t_1}a(t_2+\omega)dt_2\int_s^{t_2}a(t_3)dt_3\cdots\int_s^{t_{2n-2}}a(t_{2n-1})dt_{2n-1}\int_s^{t_{2n-1}}a(t_{2n}+\omega)dt_{2n}\\
&\qquad\int_s^{t_{2n}}a(t_{2n+1})dt_{2n+1}+\int_s^{s+\omega}a(t_1+\omega)dt_1\int_s^{t_1}a(t_2)dt_2\int_s^{t_2}a(t_3+\omega)dt_3\cdots\\
&\qquad\int_s^{t_{2n-2}}a(t_{2n-1}+\omega)dt_{2n-1}\int_s^{t_{2n-1}}a(t_{2n})dt_{2n}\int_s^{t_{2n}}a(t_{2n+1}+\omega)dt_{2n+1}\Big)'_s=\\
&=a(s+\omega)\int_s^{s+\omega}a(t_1+\omega)dt_1\int_s^{t_1}a(t_2)dt_2\cdots\int_s^{t_{2n-2}}a(t_{2n-1}+\omega)dt_{2n-1}\int_s^{t_{2n-1}}a(t_{2n})dt_{2n}-\\
&\quad-a(s)\int_s^{s+\omega}a(t_1)dt_1\int_s^{t_1}a(t_2+\omega)dt_2\cdots\int_s^{t_{2n-2}}a(t_{2n-1})dt_{2n-1}\int_s^{t_{2n-1}}a(t_{2n}+\omega)dt_{2n}+\\
&+a(s+2\omega)\int_s^{s+\omega}a(t_1)dt_1\int_s^{t_1}a(t_2+\omega)dt_2\cdots\int_s^{t_{2n-2}}a(t_{2n-1})dt_{2n-1}\int_s^{t_{2n-1}}a(t_{2n}+\omega)dt_{2n}-\\
&-a(s+\omega)\int_s^{s+\omega}a(t_1+\omega)dt_1\int_s^{t_1}a(t_2)dt_2\cdots\int_s^{t_{2n-2}}a(t_{2n-1}+\omega)dt_{2n-1}\int_s^{t_{2n-1}}a(t_{2n})dt_{2n}=0.\end{aligned}$$

Если учесть равенства

$$\int_s^{s+\omega}\alpha_{[12]^n1}=\int_s^{s+\omega}\alpha_{1[21]^n},\quad \int_s^{s+\omega}\alpha_{[21]^n2}=\int_s^{s+\omega}\alpha_{2[12]^n},$$

то придем к соотношению

$$\begin{aligned}\Big(\int_s^{s+\omega}\alpha_{[12]^n1}+\int_s^{s+\omega}\alpha_{[21]^n2}\Big)'_s&=\alpha_1(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[21]^n}-\alpha_1(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[12]^n}+\\
&\quad+\alpha_2(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[12]^n}-\alpha_2(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[21]^n}=0,\end{aligned}$$

в котором использовано, что $\alpha_1(s+\omega)=\alpha_2(s)$, $\alpha_2(s+\omega)=a(s+2\omega)=a(s)=\alpha_1(s)$. Утверждение 1) доказано.

В (9) знаменатель $\triangle_m(z,s)$ не зависит от s, поэтому при $m=2$

$$y(z,\gamma,s) = -\frac{Y(z,\gamma,s)B(z,s)\nu}{\triangle_m(z)}, \tag{18}$$

и равенство (13) заменяется равенством $r(\gamma,s)\equiv r(0,s)\equiv r$. Утверждение 2) становится очевидным. $\square$

Другое, более сложное доказательство этих лемм (2 и 3) было приведено нами в [15].

2. Рассмотрим случай $m=3$: $a(t+3\omega)=a(t)$. Матрица $A(s+\gamma)$ в (6) имеет вид

$$A(s+\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}(s+\gamma), \quad \text{причем } a(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & t\in[0,\omega); \\ \alpha_2(t), & t\in[\omega,2\omega); \\ \alpha_3(t), & t\in[2\omega,3\omega). \end{cases}$$

Фундаментальную матрицу системы (6) представим в виде

$$Y(z,\gamma,s) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}(z,\gamma,s).$$

Явный вид элементов этой матрицы, стоящих вне главной диагонали, можно определить равенствами

$$\begin{aligned}
y_{12} &= z\int_s^{s+\gamma}\alpha_3 + z^4\int_s^{s+\gamma}\alpha_{3213} + \dots + z^{3n+1}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[321]^n3} + \cdots, \\
y_{13} &= z^2\int_s^{s+\gamma}\alpha_{32} + z^5\int_s^{s+\gamma}\alpha_{32132} + \dots + z^{3n+2}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[321]^n32} + \cdots, \\
y_{21} &= z^2\int_s^{s+\gamma}\alpha_{21} + z^5\int_s^{s+\gamma}\alpha_{21321} + \dots + z^{3n+2}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[213]^n21} + \cdots, \\
y_{23} &= z\int_s^{s+\gamma}\alpha_2 + z^4\int_s^{s+\gamma}\alpha_{2132} + \dots + z^{3n+1}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[213]^n2} + \cdots, \\
y_{31} &= z\int_s^{s+\gamma}\alpha_1 + z^4\int_s^{s+\gamma}\alpha_{1321} + \dots + z^{3n+1}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[132]^n1} + \cdots, \\
y_{32} &= z^2\int_s^{s+\gamma}\alpha_{13} + z^5\int_s^{s+\gamma}\alpha_{13213} + \dots + z^{3n+2}\int_s^{s+\gamma}\alpha_{[132]^n13} + \cdots
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь использовано обозначение (15). Символ $[i_1i_2i_3]^n$ означает повторение n раз группы индексов $i_1i_2i_3$.Отметим, что все элементы матрицы $Y(z,\gamma,s)$ являются целыми функциями по z (при всех $\gamma\in[0,\omega]$, $s\in[0,3\omega]$), если $a\in L_\infty[0,3\omega]$.

Лемма 4.

$$\begin{aligned}
\triangle_3(z,s) = -1 + z^3 + z^3\Bigl(\int_s^{s+\omega}\alpha_1 + \int_s^{s+\omega}\alpha_2 + \int_s^{s+\omega}\alpha_3 + \int_s^{s+\omega}\alpha_{13} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{21} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{32}\Bigr) + \\
+ z^6\Bigl(-\int_s^{s+\omega}\alpha_{1231} - \int_s^{s+\omega}\alpha_{2312} - \int_s^{s+\omega}\alpha_{3123} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{13213} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{21321} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{32132}\Bigr) + \cdots \\
+ z^{3n+3}\Bigl((-1)^n\Bigl(\int_s^{s+\omega}\alpha_{[123]^n1} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{[231]^n2} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{[312]^n3}\Bigr) + \\
+ \int_s^{s+\omega}\alpha_{[132]^n13} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{[213]^n21} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{[321]^n32}\Bigr) + \cdots
\end{aligned} \tag{20}$$

Доказательство. Раскрывая определитель

$$\triangle_3(z,s) = \begin{vmatrix} zy_{21}-1 & zy_{22} & zy_{23} \\ zy_{31} & zy_{32}-1 & zy_{33} \\ zy_{11} & zy_{12} & zy_{13}-1 \end{vmatrix} (z,\omega,s)$$

из (8), получим

$$\triangle_3(z,s) = z^3|V|\,|Y(z,\omega,s)| - z^2\left(\begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{21} & y_{23} \\ y_{11} & y_{13}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{32} & y_{33} \\ y_{12} & y_{13}\end{vmatrix}\right)(z,\omega,s) + \\ + z(y_{21}+y_{32}+y_{13})(z,\omega,s) - 1, \quad (21)$$

где $|V| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$ и по формуле Лиувилля $|Y(z,\omega,s)| = 1$. Из (19) следует

$$(y_{21}+y_{32}+y_{13})(z,\omega,s) = z^2\left(\int_s^{s+\omega}\alpha_{21} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{13} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{32}\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} z^{3n+2}\left(\int_s^{s+\omega}\alpha_{[213]^n21} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{[132]^n13} + \int_s^{s+\omega}\alpha_{[321]^n32}\right). \quad (22)$$

Чтобы дать явное представление множителя при z^2 в (21) обозначим

$$U_1^{ik}(z,\gamma,s) = \begin{vmatrix} y_{1i} & y_{1k} \\ y_{2i} & y_{2k}\end{vmatrix}(z,\gamma,s), \quad U_2^{ik}(z,\gamma,s) = \begin{vmatrix} y_{1i} & y_{1k} \\ y_{3i} & y_{3k}\end{vmatrix}(z,\gamma,s),$$

$$U_3^{ik}(z,\gamma,s) = \begin{vmatrix} y_{2i} & y_{2k} \\ y_{3i} & y_{3k}\end{vmatrix}(z,\gamma,s), \quad i \neq k.$$

Коэффициент при z^2 в (21) есть $(U_3^{12} - U_1^{13} - U_2^{23})(z,\omega,s)$. Учитывая, что

$$y'_{1i,\gamma} = z\alpha_3(s+\gamma)y_{2i}, \quad y'_{2i,\gamma} = z\alpha_2(s+\gamma)y_{3i}, \quad y'_{3i,\gamma} = z\alpha_1(s+\gamma)y_{1i},$$

и опуская верхние индексы ik, получаем систему для введенных переменных

$$\begin{cases} U'_{1,\gamma} = z\alpha_2(s+\gamma)U_2, \\ U'_{2,\gamma} = z\alpha_3(s+\gamma)U_3, \\ U'_{3,\gamma} = -z\alpha_1(s+\gamma)U_1 \end{cases}$$

или $U'_\gamma = zC(s+\gamma)U$, $U = \mathrm{col}\{U_1,U_2,U_3\}$,

$$C(s+\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}(s+\gamma).$$

Фундаментальная матрица $U(z,\gamma,s) = (U^{12},U^{13},U^{23})(z,\gamma,s)$, где $U(z,0,s) = E$ — единичная матрица 3-го порядка, получается из матрицы $Y(z,\gamma,s)$ заменой в (19) функций $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$ на $\alpha_2,\alpha_3,-\alpha_1$ соответственно. Таким образом,

$$(U_3^{12} - U_1^{13} - U_2^{23})(z,\omega,s) = \left(-z\int_s^{s+\omega}\alpha_1 + z^4\int_s^{s+\omega}\alpha_{1231} - \cdots + (-1)^{n+1}z^{3n+1}\int_s^{s+\omega}\alpha_{[123]^n1} + \cdots\right) - \\ - \left(z\int_s^{s+\omega}\alpha_2 - z^4\int_s^{s+\omega}\alpha_{2312} + \cdots + (-1)^n z^{3n+1}\int_s^{s+\omega}\alpha_{[213]^n2} + \cdots\right) - \\ - \left(z\int_s^{s+\omega}\alpha_3 - z^4\int_s^{s+\omega}\alpha_{3123} + \cdots + (-1)^n z^{3n+1}\int_s^{s+\omega}\alpha_{[312]^n3} + \cdots\right). \quad (23)$$

Подставив (22) и (23) в (21), получаем (20). □

Лемма 5. 1) *Функция* $\triangle_3(z,s)$ *не зависит от* s: $\triangle_3(z,s)=\triangle_3(z,0)\overset{\text{def}}{=}\triangle_3(z)$,
2) $r(\gamma,s)\equiv\mathrm{const}=r=|z_0|$, *где* z_0 *— наименьший по модулю корень уравнения* $\triangle_3(z)=0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3: можно показать, что производная по s от коэффициента при z^{3n+3} равна 0, $n\geq 0$. Покажем, например, что выражение в (22) не зависит от s. Так как справедливы равенства

$$\int_s^{s+\omega}\alpha_{[321]^n32}=\int_s^{s+\omega}\alpha_{3[213]^n2},\quad \int_s^{s+\omega}\alpha_{[213]^n21}=\int_s^{s+\omega}\alpha_{2[132]^n1},\quad \int_s^{s+\omega}\alpha_{[132]^n13}=\int_s^{s+\omega}\alpha_{1[321]^n3},$$

то

$$((y_{21}+y_{32}+y_{13})(z,\omega,s))'_s=z^2\Big(\alpha_2(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_1-\alpha_1(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_2+\alpha_1(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_3-$$
$$-\alpha_3(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_1+\alpha_3(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_2-\alpha_2(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_3\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}z^{3n+2}\Big(\alpha_2(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[132]^n1}-$$
$$-\alpha_1(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[213]^n2}+\alpha_1(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[321]^n3}-\alpha_3(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[132]^n1}+$$
$$+\alpha_3(s+\omega)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[213]^n2}-\alpha_2(s)\int_s^{s+\omega}\alpha_{[321]^n3}\Big)=0.$$

Здесь было учтено также, что

$$\alpha_2(s+\omega)=\alpha_3(s),\quad \alpha_1(s+\omega)=\alpha_2(s),\quad \alpha_3(s+\omega)=a(s+3\omega)=a(s)=\alpha_1(s).$$

Аналогично можно показать, что суммы интегралов в (23) не зависят от s.

Итак, в (9) знаменатель $\triangle_3(z,s)$ не зависит от s, поэтому представление (18) справедливо и при $m=3$. Тождество (13) принимает вид $r(\gamma,s)\equiv r(0,s)\equiv r$, и утверждение 2) леммы становится очевидным. $\square$

3. Критерий устойчивости

В этом параграфе с учетом лемм 2–5 сформулирован критерий устойчивости уравнения (1) при $m=2,3$.

Сформулируем одну из возможных модификаций критерия Малыгиной (доказательство можно провести по схеме самого критерия [3]):

Пусть $r(\gamma,s)$ *— радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_n(\gamma,s)z^n=F(z,\gamma,s)$, $\gamma\in[0,\omega]$, $s\in[0,m\omega]$; $d_n(\gamma,s)=C(s+n\omega+\gamma,s)=C(t,s)$ *— функция Коши уравнения* (1); *пусть* $r(\gamma,s)\equiv\mathrm{const}=r$, *функция* $F(z,\gamma,s)$ *при каждом фиксированном* $\bar r$, $0<\bar r<r$, *ограничена на множестве* $\{(z,\gamma,s):|z|=\bar r,\ \gamma\in[0,\omega]\ s\in[0,m\omega]\}$. *Для того чтобы функция Коши уравнения* (1) *имела экспоненциальную оценку* (3), *необходимо и достаточно, чтобы* $r>1$.

В леммах 2, 3 показано, что

$$\triangle_2(z)=1-z^2-\sum_{n=1}^{\infty}K_nz^{2n},\quad K_1=\int_0^{2\omega}a(t)dt, \tag{24}$$

при $n\geq 2$ имеем

$$K_n=\int_0^{\omega}a(t_1)dt_1\int_0^{t_1}a(t_2+\omega)dt_2\int_0^{t_2}a(t_3)dt_3\cdots\int_0^{t_{2n-3}}a(t_{2n-2}+\omega)dt_{2n-2}\int_0^{t_{2n-2}}+a(t_{2n-1})dt_{2n-1}$$
$$+\int_0^{\omega}a(t_1+\omega)dt_1\int_0^{t_1}a(t_2)dt_2\int_0^{t_2}a(t_3+\omega)dt_3\cdots\int_0^{t_{2n-3}}a(t_{2n-2})dt_{2n-2}\int_0^{t_{2n-2}}a(t_{2n-1}+\omega)dt_{2n-1}.$$

В леммах 4, 5 показано, что

$$\triangle_3(z) = -1 + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n z^{3n}, \tag{25}$$

$$K_1 = \int_0^{3\omega} a(t)dt + \int_0^{\omega} a(t_1)dt_1 \int_0^{t_1} a(t_2+2\omega)dt_2 + \\ + \int_0^{\omega} a(t_1+\omega)dt_1 \int_0^{t_1} a(t_2)dt_2 + \int_0^{\omega} a(t_1+2\omega)dt_1 \int_0^{t_1} a(t_2+\omega)dt_2,$$

при $n \geq 2$ имеем

$$K_n = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{2} \int_0^{\omega} a(t_1+i\omega)dt_1 \int_0^{t_1} a(t_2+(i+1)\omega)dt_2 \int_0^{t_2} a(t_3+(i+2)\omega)dt_3 \cdots \\ \int_0^{t_{3n-6}} a(t_{3n-5}+i\omega)dt_{3n-5} \int_0^{t_{3n-5}} a(t_{3n-4}+(i+1)\omega)dt_{3n-4} \int_0^{t_{3n-4}} a(t_{3n-3}+(i+2)\omega)dt_{3n-3} \\ \int_0^{t_{3n-3}} a(t_{3n-2}+i\omega)dt_{3n-2} + \sum_{i=0}^{2} \int_0^{\omega} a(t_1+i\omega)dt_1 \int_0^{t_1} a(t_2+(i+2)\omega)dt_2 \int_0^{t_2} a(t_3+(i+1)\omega)dt_3 \cdots \\ \int_0^{t_{3n-6}} a(t_{3n-5}+i\omega)dt_{3n-5} \int_0^{t_{3n-5}} a(t_{3n-4}+(i+2)\omega)dt_{3n-4} \int_0^{t_{3n-4}} a(t_{3n-3}+(i+1)\omega)dt_{3n-3} \\ \int_0^{t_{3n-3}} a(t_{3n-2}+i\omega)dt_{3n-2} \int_0^{t_{3n-2}} a(t_{3n-1}+(i+2)\omega)dt_{3n-1}.$$

Теорема. *Пусть $a \in L_\infty[0, m\omega]$, $a(t+m\omega) = a(t)$, $m = 2, 3$. Функция Коши $C(t,s)$ уравнения* (1) *имеет экспоненциальную оценку* (3) *тогда и только тогда, когда наименьший по модулю корень z_0 уравнения $\triangle_m(z) = 0$ лежит вне единичного круга*: $|z_0| > 1$.

Доказательство теоремы осуществляется ссылкой на сформулированную выше модификацию критерия Малыгиной: здесь $r(\gamma, s) \equiv r = |z_0|$, где z_0 — наименьший по модулю корень уравнения $\triangle_m(z) = 0$, вид $\triangle_m(z)$ при $m = 2$ в (24), при $m = 3$ в (25). Функция $F(z,\gamma,s)$ при каждом $\bar r$, $0 < \bar r < r$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\{(z,\gamma,s) : |z| = \bar r,\ \gamma \in [0,\omega]\ s \in [0, m\omega]\}$, что следует из (12), (18) и непрерывности фундаментальной матрицы $Y(z,\gamma,s)$ (10), если $a \in L_\infty[0, m\omega]$.

Отметим, что случай $m = 2$ в предположении, что $a(t)$ — непрерывная на $[0, 2\omega]$, 2ω-периодическая функция, $a(t) \leq 0$, $t \in [0, 2\omega]$, $a(t) \not\equiv 0$, $a(t+\omega) \not\equiv 0$, $t \in [0,\omega]$, рассматривался Ю.Ф. Долгим в [8], [9]. Случай $m = 2$ был рассмотрен нами в [15] без использования краевой задачи (6), (7). Случай $m = 3$ автором был опубликован в [16] без доказательства.

Литература

1. Рехлицкий З.И. *Об устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами* // Изв. АН СССР. – 1966. – Т. 30. – Вып. 5. – С. 971–974.
2. Малыгина В.В. *Оценки оператор-функции Коши и устойчивость дифференциально-разностных уравнений.* – Пермь, 1985. – 40 с. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 01.08.85, № 6128-85.
3. Малыгина В.В. *Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений* // Автореферат канд. дисс. – Пермь, 1983. – 15 с.
4. Пинни Э. *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Ин. Лит., 1961. – 248 с.
5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.

6. Тонков Е.Л., Юткин Г.И. *Периодические решения и устойчивость линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 11. – С. 1990–2001.
7. Зверкин А.М. *К теории дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием, соизмеримым с периодом коэффициентов* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 9. – С. 1481–1492.
8. Долгий Ю.Ф. *Устойчивость периодических дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* // Автореферат докт. дисс. – Екатеринбург, 1994. – 30 с.
9. Долгий Ю.Ф., Шиманов С.Н. *О существовании зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием* // Устойчивость и нелинейные колебания. – Свердловск, 1988. – С. 11–18.
10. Максимов В.П. *Линейное функционально-дифференциальное уравнение* // Автореферат канд. дисс. – Тамбов, 1974. – 15 с.
11. Тышкевич В.А. *Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.* – Киев: Наукова думка, 1981. – 80 с.
12. *Математическая энциклопедия.* – М.: Советская энциклопедия, 1984. – Т. 4. – 691 с.
13. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
14. Бибиков Ю.Н. *Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1981. – 232 с.
15. Седова С.М. *Об экспоненциальной оценке функции Коши уравнений с постоянным запаздыванием.* – Пермь, 1986. – 57 с. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 09.12.86, № 8393-В86.
16. Седова С.М. *Об устойчивости одного скалярного уравнения с постоянным запаздыванием и периодическим коэффициентом* // Тез. III Международн. конф. женщин-математиков. – Воронеж, 1995. – С. 39.

Пермский государственный
технический университет

Поступила
27.04.1996