МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по образовательной деятельности

__________ Д.А.Таюрский
«15» марта 2017г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

для поступающих на программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

Направление 01.06.01 – Математика и механика

Направленность (профиль): 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Казань 2017

1. Вопросы программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Раздел 1. Алгебра

Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.

Линейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах, их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

Линейные отображения и преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Ортогональные и самосопряженные преобразования, приведение квадратичной формы к главным осям.

Группы и подгруппы. порядок элемента. Циклические группы.

Фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах.

Классы сопряженных элементов. Центр и коммутант группы.

Разрешимые группы. Теоремы Силова.

Задание группы образующими и определяющими соотношениями.

Теорема Стоуна о представлении булевых алгебр. Критерий Воота. Теоремы об изоморфизме булевых алгебр. Представление булевых алгебр в виде дерева.

Автоморфизмы булевых алгебр. Лемма о транспозициях. Построение неизоморфных булевых алгебр с изоморфными группами автоморфизмов.

Идеал Ершова – Тарского. Построение булевой алгебры по заданной элементарной характеристике. Теорема об элементарной эквивалентности булевых алгебр. Существование модельно полного расширения теории булевых алгебр.

Раздел 2. Теория моделей

Теорема об изоморфизме плотных линейных порядков с одинаковыми концами. Теорема об ультрапроизведениях.

Теорема об элементарной эквивалентности. Теорема Левенгейма – Скулема – Тарского. Теоремы Скулема – Тарского о спуске и подъеме.

Теремы о (конечной) аксиоматизации, ∃-аксиоматизации, ∀-аксиоматизации класса алгебраических систем. Скулемовские функции. Полная скулемизация. Теорема о модельно-полных теориях.

Механизм совместности. Теорема о существовании канонической модели. Теорема о существовании канонической модели. Теорема об опускании типов. Интерполяционная теорема Крейга – Линдона.

Существование счетного однородного расширения. Теорема об изоморфизме счетных однородных моделей. Теоремы о насыщенных моделях (единственность, эквивалентность универсальности и однородности, характеристика в терминах булевых алгебр).

Теорема о полноте категоричных теорий. Характеристика Ω-категоричных теорий в терминах булевых алгебр. Теорема о модельной полноте Ω-категоричных теорий.

Раздел 3. Теория множеств

Аксиомы теории множеств. Аксиома выбора. Теорема об эквивалентности аксиомы выбора принципу полного упорядочения, принципу максимума и утверждению $|A2|=|A|$.

Принцип трансфинитной индукции. Лемма Цорна. Принцип полного упорядочения. Теорема о подобии вполне упорядоченных множеств.

Фильтры булевой алгебры. Необходимое и достаточное условие существования ультрафильтра. Теорема о главном ультрафильтре.

Мощность множества. Ординалы. Теорема Кантора – Бернштейна. Утверждения $|P(A)|>|A|$; $|A2|=|A|$.

Раздел 4. Математическая логика и теория алгоритмов

Аксиомы и правила вывода исчислении высказываний (ИВ) и исчисления предикатов (ИП). Семантика и непротиворечивость. Теоремы о полноте. Характеризация доказуемых формул. Нормальные формы формул ИВ и ИП.

Теорема о существовании модели. Теорема Гёделя о полноте ИП.

Локальная теорема Мальцева.

Вычислимость на машинах Тьюринга. Универсальные маштны Тьюринга. Частично вычислимые функции и их нумерации. Тезис Черча – Тьюринга.

Вычислимые и вычислимо перечислимые множества. Сводимости и степени неразрешимости. Арифметическая иерархия.

Неразрешимые математические проблемы. Неразрешимость проблемы остановки машин Тьюринга. Неразрешимость проблемы равенства слов в полугруппах. Теорема Черча о неразрешимости проблемы распознавания общезначимых формул ИП.

2. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Раздел 1

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 1. – М.: Физматлит, 2003. – 271 с.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 2. – М.: Физматлит, 2003. – 292 с.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру, часть 3. – М.: Физматлит, 2005. – 341 с.
4. Сикорский Р. Булевы алгебры. – М.: Мир, 1969. – 376 с.

Раздел 2

1. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1987. – 364 с.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
3. Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. – М.: Мир, 1977. – 415 с.

Раздел 3

1. Шенфилд Дж. Математическая логика. – М. Наука, 1970. – 418 с.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1987. – 364 с.

Раздел 4

1. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1987. – 364 с.
2. Соар Р. Вычислимо перечислимые множества и степени (пер. с англ. под ред. М.М. Арсланова). – Казань.: Казанское мат. общество, 2000. – 576 с.
3. Шенфилд Дж. Математическая логика. – М.: Наука, 1970. – 418 с.
4. Арсланов М.М., Калимуллин И.Ш. Математическая логика. – Казань: КФУ, 2009. – 68 с.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 01.01.06 – Алгебра, математическая логика и теория чисел