ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.988.8

Т.В. АНТОНОВА

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ РАЗРЫВОВ 1 РОДА ПО ЗАШУМЛЕННЫМ ДАННЫМ

Задача восстановления функции по зашумленным данным, как правило, относится к некорректно поставленным проблемам. Она исследовалась многими авторами в различных пространствах (см., напр., [1], с. 192). В данной работе рассматривается задача восстановления неизвестной функции x по заданной функции x_δ, предполагается, что $x, x_\delta \in L_2(-\infty,+\infty)$, $\|x-x_\delta\|_{L_2} \le \delta$, уровень погрешности δ известен. Кроме того, считается, что для искомой функции априори выполняется

Условие $(*)$. Функция x имеет l разрывов 1 рода и вне точек разрыва непрерывно дифференцируема. Сама функция x и ее производная x' имеют в каждой точке разрыва левые и правые конечные пределы и интегрируемы с квадратом на всей числовой оси. Точки разрывов и величины скачков будем обозначать соответственно через s_i и Δ_i $(\Delta_i \ne 0)$, $i = 1,2,\dots,l$. Предполагается, что известны числа $q \le \min\{|\Delta_i|\,,\ i=1,2,\dots,l\}$ и $M \ge \max\{|s_i|\,,\ i=1,2,\dots,l\}$, а число разрывов неизвестно.

В работе предложен метод, который позволяет найти количество точек разрыва, приближенно определить положения разрывов и величины скачков с оценками точности их вычисления. Построено приближение к исходной функции x вне окрестности точек разрыва, дана равномерная оценка близости построенного приближения к искомой функции на множестве $W_\delta \subset R \setminus \cup_{i=1}^{l}\{s_i\}$, которое обладает свойством $W_\delta \to R \setminus \cup_{i=1}^{l}\{s_i\}$ при $\delta \to 0$.

В конце статьи обсуждается вопрос о переносе результатов данной работы на ситуацию, когда функция x является точным решением интегрального уравнения 1 рода с оператором типа свертки.

1. Вспомогательные утверждения

По функции x, удовлетворяющей условию $(*)$, построим функцию, у которой эффекты Гиббса от каждого разрыва локализованы на непересекающихся интервалах. Нахождение приближений к положениям разрыва сведется к нахождению максимумов этой вспомогательной функции.

Исследуем случай, когда $\delta = 0$. Определим прямое и обратное преобразования Фурье функции x формулами

$$\widehat{x}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\exp(-izs)\,ds, \quad x(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(z)\exp(izs)\,dz.$$

Положим

$$x^B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \widehat{x}(z)\exp(izs)\,dz, \quad B > 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 97-01-00520).

Лемма 1. *Пусть функция x удовлетворяет условию $(*)$. Тогда для всех $s \neq s_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, имеет место представление*

$$x^B(s) = x(s) + \sum_{i=1}^{l} \Delta_i \Phi(B, s - s_i) + \alpha_0^B(s),$$

$$\Phi(B, s) = -\frac{\operatorname{sign} s}{\pi} \int_{B|s|}^{\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi, \quad \sup_s \left|\alpha_0^B(s)\right| \leq C_0 / B^\gamma,$$

$\gamma = 0.5$, C_0 — константа.

Замечание. Показатель $\gamma = 0.5$ определяется предположением $x' \in L_2$. Если в условии $(*)$ заменить предположение $x' \in L_2$ на предположение $x' \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, то $\gamma = 1 - 1/p$.

Рассмотрим следующую функцию $\psi^B(s) = x^{2B}(s) - x^B(s)$. Используя лемму 1 и обозначая $\phi^B(s) = \Phi(2B, s) - \Phi(B, s)$, имеем

$$\psi^B(s) = \sum_{i=1}^{l} \Delta_i \phi^B(s - s_i) + \alpha^B(s),$$

где $\phi^B(s) = \dfrac{\operatorname{sign} s}{\pi} \displaystyle\int_{B|s|}^{2B|s|} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$, $\sup\limits_s \left|\alpha^B(s)\right| \leq C / B^\gamma$, C — константа.

Лемма 2. *Пусть $p > 0$, и $B \geq (2/\pi p)^{1/(1-\gamma)}$. Тогда для всех s таких, что $|s| \geq p/2$, справедлива оценка $\left|\phi^B(s)\right| \leq 2/B^\gamma$.*

Пусть $p = \min\limits_{i \neq j} |s_i - s_j|$. Рассмотрим функцию ψ^B на отрезке $[s_1 - p/2, s_1 + p/2]$. По лемме 2, начиная с некоторого значения B, имеем

$$\psi^B(s) = \Delta_1 \phi^B(s - s_1) + \widetilde{\alpha}^B(s), \qquad \sup_{|s - s_1| \leq p/2} \left|\widetilde{\alpha}^B(s)\right| \leq \widetilde{C} / B^\gamma,$$

где $\widetilde{C} = C + 2 \sum\limits_{i=2}^{l} |\Delta_i|$. Функция $\phi^B(s - s_1)$ принимает максимальное значение в точке $s_\phi^{\max} = s_1 + \pi/(3B)$. Функция ψ^B является непрерывной. Обозначим точку, в которой функция ψ^B принимает максимальное значение на отрезке $[s_1 - p/2, s_1 + p/2]$, через $s_\psi^{\max}$.

Лемма 3. *При достаточно большом B имеет место неравенство $\left|s_\psi^{\max} - s_\phi^{\max}\right| \leq C_1 / B^{1+\gamma/2}$, где C_1 — константа.*

Значение функции ϕ^B в точке максимума обозначим через

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi.$$

Лемма 4. *Пусть $\widetilde{\Delta}_1 = \psi^B(s_\phi^{\max})/a$. Тогда для достаточно большого B справедлива оценка $\left|\widetilde{\Delta}_1 - \Delta_1\right| \leq \widehat{C} / B^\gamma$, где $\widehat{C}$ — константа.*

2. Алгоритм аппроксимации разрывов 1 рода и приближение искомой функции

Пусть для функции x выполняется условие $(*)$. Напомним, что известно $\delta > 0$ — уровень погрешности исходных данных и числа $q \leq \min\{|\Delta_i|, \ i = 1, 2, \ldots, l\}$, $M \geq \max\{|s_i|, \ i = 1, 2, \ldots, l\}$. В этих условиях приведенный ниже алгоритм позволяет находить приближения к положениям разрывов и величинам скачков.

Введем функции

$$x_\delta^B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} \widehat{x}_\delta(z) \exp(izs)\, dz, \quad \psi_\delta^B(s) = x_\delta^{2B}(s) - x_\delta^B(s), \quad B > 0.$$

Заметим, что функция ψ_δ^B непрерывна. Следовательно, на любом отрезке она имеет точку глобального максимума.

Алгоритм. $\quad i=1, \quad \psi_{\delta 1}^B(s)=\psi_\delta^B(s)$.

1. Найти $s_\psi^{\max}$ — точку максимума функции $\psi_{\delta i}^B$ на отрезке $[-2M,2M]$. Если есть несколько точек, в которых функция $\psi_{\delta i}^B(s)$ принимает максимальное значение, то можно за $s_\psi^{\max}$ взять любую из них.

2. Найти $s_\psi^{\min}$ — точку минимума функции $\psi_{\delta i}^B(s)$ на отрезке $[s_\psi^{\max}-\pi/B, s_\psi^{\max}+\pi/B]$.

3. Если $s_\psi^{\min}<s_\psi^{\max}$, то полагаем $s_i^\delta=s_\psi^{\max}-\pi/(3B)$. Иначе $s_i^\delta=s_\psi^{\max}+\pi/(3B)$.

4. Вычислить $\Delta_i^\delta=\mathrm{sign}(\psi_{\delta i}^B(s_i^\delta+\Pi/(3B)))\psi_{\delta i}^B(s_\phi^{\max})/a$.

Если выполняется условие $|\Delta_i^\delta|>q/2$, то считаем, что аппроксимация i-й точки разрыва получена, полагаем

$$\psi_{\delta i+1}^B(s)=\psi_{\delta i}^B(s)-\Delta_i^\delta\phi^B(s-s_i^\delta)$$

и переходим к п. 1 алгоритма при i, замененном на $i+1$. Иначе считаем, что на предыдущем шаге найдены все точки разрыва, полагаем $m=i-1$. Процесс завершен.

В результате работы алгоритма найдено число m, относительно которого будет доказано, что это и есть число точек разрыва исходной функции, а также найдены приближения к положениям разрыва и величинам скачков.

Теорема 1. *Пусть функция x удовлетворяет условию $(*)$. Тогда начиная с любого достаточно малого $\delta>0$, выбирая $B=C_2/\delta^{2/(1+2\gamma)}$, где C_2 — константа, и действуя согласно алгоритму, будем иметь*

1) $m=l$;
2) *приближенные значения s_i^δ, $i=1,2,\dots,l$, положений точек разрывов s_i и приближенные значения Δ_i^δ, $i=1,2,\dots,l$, величин скачков Δ_i таковы, что*

$$|s_i-s_i^\delta|\le\overline{C}\delta^{\frac{2+\gamma}{1+2\gamma}},\quad |\Delta_i-\Delta_i^\delta|\le\widehat{C}\delta^{\frac{2\gamma}{1+2\gamma}},$$

где $\overline{C}$, $\widehat{C}$ — константы.

Заметим, что алгоритм может быть модифицирован для случая, когда известно количество разрывов l, но не известно число q. В этом случае для определения приближений к положениям разрывов и величинам скачков п. 1–4 алгоритма выполняются для функций $\psi_{\delta i}^B$, $i=1,2,\dots,l$.

Замечание. Для модифицированного алгоритма, когда для искомой функции известно количество скачков l, но не известно число q, справедлива теорема сходимости, аналогичная теореме 1.

Перейдем к равномерной аппроксимации исходной функции x. Положим

$$x_\delta^\Delta(s)=x_\delta^B(s)-\sum_{i=1}^{l}\Delta_i^\delta\Phi(B,s-s_i^\delta),$$

где Δ_i^δ, s_i^δ, $i=1,\dots,l$, определены с помощью алгоритма. Введем множество $W_\delta=R\setminus(\cup_{i=1}^l(s_i-\delta^{\frac{2-\gamma}{1+2\gamma}}, s_i+\delta^{\frac{2-\gamma}{1+2\gamma}}))$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 на множестве W_δ имеет место оценка $|x(s)-x_\delta^\Delta(s)|\le C_3\delta^{2\gamma/(1+2\gamma)}$, где C_3 — константа.*

Отметим [2], что полученные результаты переносятся на случай, когда функция x является решением интегрального уравнения первого рода типа свертки

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t-s)\,x(s)\,ds=y(t),\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Предполагается, что точное решение данного уравнения удовлетворяет условию $(*)$. Вместо точной правой части известно $y^\delta:\|y-y^\delta\|_{L_2}\le\delta$. При некоторых условиях на ядро оператора исходного уравнения формулируются теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2. Оценки точности определения положений разрыва, величин скачка и равномерная оценка приближения решения в равномерной метрике вне окрестностей точек разрыва имеют тот же порядок по B, что и в теоремах 1, 2. Однако в данном случае меняется зависимость $B = B(\delta)$.

Литература

1. Морозов В.А., Гребенников А.И. *Методы решения некорректно поставленных задач*: *алгоритмический аспект.* – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 320 с.
2. Антонова Т.В. *О решении уравнений* 1 *рода на классах разрывных функций* // Пробл. теорет. и прикл. матем.: Тр. 31-й региональной молодежной конф. – Екатеринбург: УрО РАН, 2000. – С. 30–31.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступили
полный текст 05.06.2000
краткое сообщение 23.10.2000