ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 512.554

Н.А. КОРЕШКОВ, Д.Ю. ХАРИТОНОВ

О НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ЭНГЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

В [1] была доказана нильпотентность конечнопорожденной алгебры Ли над полем характеристики p, удовлетворяющей n-му условию Энгеля, при $n < p$. Это стимулировало решение аналогичной задачи для алгебр Мальцева и бинарно-лиевых алгебр, которые естественным образом обобщают понятие алгебры Ли. В [2] доказан аналог теоремы Энгеля для конечномерных алгебр Мальцева. В [3] этот результат усилен. Показано, что конечнопорожденная алгебра Мальцева, удовлетворяющая n-му условию Энгеля, нильпотентна, если $p \geq n$ либо $p = 0$. Еще раньше в [4] установлена нильпотентность бинарно-лиевых энгелевых алгебр, удовлетворяющих условию максимальности для подалгебр. В данной работе решается вопрос о нильпотентности конечномерных энгелевых алгебр с антикоммутативным умножением.

Определение 1. Алгебру G с антикоммутативным умножением будем называть *энгелевой*, если $\forall x \in G$ оператор $R_x : g \to g \circ x$, $g \in G$, нильпотентен.

Определение 2. Алгебра G называется *нильпотентной*, если существует такое натуральное число n, что произведение любых n элементов алгебры G с любой расстановкой скобок равно нулю.

Определение 3. Алгебра G называется *правонильпотентной*, если существует такое натуральное число n, что $R_{a_1} R_{a_2} \dots R_{a_{n-1}} a_n = 0$ для любых элементов $a_1, \dots, a_n$ из G.

Определим индуктивно в алгебре G ряд подпространств. Положим

$$G^1 = G, \ \ G^n = G^{n-1} \circ G + G^{n-2} \circ G^2 + \dots + G \circ G^{n-1}, \ \ G^{(1)} = G, \ \ G^{(n)} = G^{(n-1)} \circ G.$$

Цепочка подпространств

$$G^1 \supseteq G^2 \supseteq \dots \supseteq G^n \supseteq \cdots$$

есть цепочка идеалов алгебры, а цепочка

$$G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \dots \supseteq G^{(n)} \supseteq \cdots$$

есть цепочка правых идеалов этой алгебры. Если G антикоммутативна, то эта цепочка состоит из идеалов. В терминах этих пространств приведенные выше определения звучат так: алгебра G нильпотентна, если $G^n = 0$ для некоторого n и правонильпотентна, если $G^{(n)} = 0$.

В случае, когда G антикоммутативна, легко проверить (см. [5], с. 102), что $G^{2^n} \subseteq G^{(n)}$. Следовательно, в этом случае понятия нильпотентности и правой нильпотентности совпадают.

Теорема 1. *Пусть G — энгелева алгебра над полем K. Если $\dim_K G \leq 4$, то G нильпотентна.*

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *В энгелевой алгебре G, $\dim_K G \geq 2$, существует подалгебра размерности два с тривиальным умножением.*

Доказательство. Пусть $x \in G$, $x \neq 0$. Так как $x^2 = 0$, то можно определить фактороператор $\overline{R}_x$, действующий в факторпространстве $\overline{G} = G/\langle x\rangle$ по формуле $\overline{R}_x(\overline{y}) = \overline{y \circ x}$, $\overline{y} \in \overline{G}$.

Пусть $\overline{y} \in \overline{G}$, $\overline{y} \neq \overline{0}$. В силу нильпотентности оператора $\overline{R}_x$ существует такое m, что $\overline{R}_x^{m-1}\overline{y} \neq \overline{0}$, но $\overline{R}_x^{m}\overline{y} = \overline{0}$. Обозначая $\overline{R}_x^{m-1}\overline{y}$ через $\overline{z}$, имеем $\overline{R}_x\overline{z} = \overline{0}$. Следовательно, подпространство $H = \langle x, z\rangle$ — подалгебра размерности два, причем $x \circ z = \lambda x$, $\lambda \in K$. Так как R_z — нильпотентный оператор, то $\lambda = 0$ и алгебра H обладает тривиальным умножением. $\square$

Лемма 2. *Пусть V — линейное пространство над K, $\dim_k V = 2$, M — ненулевое подпространство в $\operatorname{End}_K V$. Если каждый оператор из M нильпотентен, то существует $v \in V$ такой, что $mv = 0$ $\forall m \in M$.*

Доказательство. Пусть $m' \in M$, $m' \neq 0$, — некоторый фиксированный оператор. Так как все собственные значения оператора m' нулевые, т. е. принадлежат полю K, то можно использовать жорданову нормальную форму для m' и выбрать базис $v_1,\ v_2$ в V такой, что $m'v_1 = v_2$, $m'v_2 = 0$. Пусть

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица любого оператора из M в этом базисе. Тогда из условия $\det(m) = \det(m + m') = 0$ получаем $m_{12} = 0$. А в силу нильпотентности $m_{11} = m_{22} = 0$. Итак, вектор v_2 — общий собственный вектор всех операторов из M с нулевым собственным значением. $\square$

Следствие 1. В условиях леммы 2 все операторы из M одновременно приводятся к треугольному виду с нулями на главной диагонали.

Следствие 2. Любая энгелева алгебра размерности четыре имеет подалгебру размерности три.

Доказательство. В силу леммы 1 в энгелевой алгебре G размерности четыре существует подалгебра H_1, $\dim_K H_1 = 2$. В факторпространстве $\overline{G} = G/H_1$ определим операторы $\overline{R}_x$, $x \in H_1$, по правилу $\overline{R}_x(g + H_1) = g \circ x + H_1$. Так как операторы $\overline{R}_x$ нильпотентны, то в силу леммы 2 в $\overline{G}$ существует ненулевой элемент с условием $\overline{R}_x\overline{y} = 0$ $\forall x \in H_1$. Тогда $H = \langle y, H_1\rangle_K$ — искомая подалгебра. $\square$

Лемма 3. *Если H — подалгебра в G, $\operatorname{codim}_G H = 1$, и G энгелева, то H – идеал в G.*

Доказательство. В силу условий леммы $G = Kx + H$, т. е. $\overline{G} = G/H = \langle \overline{x}\rangle$. Для любого $h \in H$ имеем $\overline{R}_h\overline{x} = \lambda\overline{x}$. Так как оператор $\overline{R}_h$ нильпотентен, то $\lambda = 0$. Следовательно, $x \circ H \subseteq H$. $\square$

Следствие 3. Если G энгелева и $\dim_K G = 3$, то G нильпотентна и существует базис в G с одной из следующих таблиц умножения:

1. $e_i \circ e_j = 0$, где $i, j = 1, 2, 3$;
2. $e_2 \circ e_1 = e_3$, $e_i \circ e_j = 0$, где $i, j = 1, 2, 3$, $(i, j) \neq (1, 2), (2, 1)$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что в G существует подалгебра H, $\dim_K H = 2$, с тривиальным умножением. Так как в силу леммы 3 подалгебра H является идеалом в G, то для любого $g \in G$ можно рассмотреть оператор $\widetilde{R}_g = R_g|_H$. Пространство операторов $M = \langle \widetilde{R}_g,\ g \in G\rangle$ удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому в H существует базис $e_2,\ e_3$, в котором все операторы из M приводятся к строго треугольному виду. Так как умножение в H нулевое, то $e_2 \circ e_3 = 0$, а для любого элемента e_1 такого, что $G = Ke_1 + H$, матрица оператора $\widetilde{R}_{e_1}$ (в силу его нильпотентности) в базисе $e_2,\ e_3$, имеет вид либо $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, либо $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Если $\dim G = 2$, то утверждение теоремы вытекает из леммы 1. Если $\dim G = 3$, то утверждение теоремы есть утверждение следствия 3. Пусть $\dim G = 4$. Тогда, используя следствия 2 и 3, получим, что в G существует трехмерная нильпотентная подалгебра G_1, базис в которой можно выбрать так, что будет выполняться один из следующих наборов условий:

1. $e_i \circ e_j = 0$, $i, j = 2, 3, 4$;

2. $e_2 \circ e_3 = e_4$, $e_i \circ e_j = 0$, $i, j = 2, 3, 4$, $(i, j) \neq (2, 3), (3, 2)$.

Так как G_1 — идеал в G, то определен оператор $\widetilde{R}_{e_1} = R_{e_1}|_{G_1}$, где e_1 — базисный элемент G с условием $G = Ke_1 + G_1$. Используя жорданову нормальную форму, приведем $\widetilde{R}_{e_1}$ к одному из видов

$$\text{A)} \quad \widetilde{R}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{B)} \quad \widetilde{R}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из тривиальности умножения в G_1 следует, что умножение в новом базисе e'_i, $i = 2, 3, 4$, также тривиально и поэтому в случае A) имеем $G \circ G = G^{(2)} = \langle e_3, e_4 \rangle$, $G^{(3)} = G^{(2)} \circ G = \langle e_4 \rangle$, $G^{(4)} = G^{(3)} \circ G = 0$. В случае B) $G^{(2)} = \langle e_3 \rangle$, $G^{(3)} = 0$. Итак, в случае 1 алгебра G является нильпотентной.

Во втором случае используем тот факт, что у нильпотентного оператора все коэффициенты его характеристического многочлена равны нулю. В частности, равен нулю коэффициент при первой степени λ многочлена $\det(\widetilde{R}_{e_1} - \lambda E)$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

где a_{ij}, $i, j = 2, 3, 4$, — элементы матрицы $\widetilde{R}_{e_1}$ в базисе e_2, e_3, e_4. То же самое имеет место для оператора $\widetilde{R}_{e_1} + \widetilde{R}_{e_2}$, где

$$\widetilde{R}_{e_2} = R_{e_2}|_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} - 1 & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Из этих соотношений получим $a_{34} = 0$. Аналогично, рассматривая оператор $\widetilde{R}_{e_1} + \widetilde{R}_{e_3}$, где

$$\widetilde{R}_{e_3} = R_{e_3}|_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим $a_{24} = 0$. Итак, $e_4 \circ e_1 = a_{44} e_4$. Опять, используя нильпотентность оператора R_{e_1}, получим $a_{44} = 0$. Следовательно, элемент $e_4 \in \operatorname{Ann}(G) = \{x \in G : x \circ g = 0 \ \forall g \in G\}$, т. е. $\operatorname{Ann}(G) \neq 0$. Факторалгебра $\overline{G} = G / \operatorname{Ann}(G)$ имеет размерность меньше четырех и поэтому нильпотентна. Но тогда нильпотентна и G. $\square$

Заметим, что для любого $n \geq 5$ существует энгелева, но не нильпотентная алгебра размерности n.

При $n = 5$ рассмотрим алгебру $A = \langle e_1, \dots, e_5 \rangle$ с таблицей умножения

$$e_i \circ e_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i, j = 4, 5;$$
$$e_1 \circ e_4 = e_2, \quad e_2 \circ e_4 = e_3, \quad e_3 \circ e_4 = 0,$$
$$e_1 \circ e_5 = 0, \quad e_2 \circ e_5 = e_1, \quad e_3 \circ e_5 = -e_2.$$

Если $x = \sum\limits_{i=1}^{5} x_i e_i$, то

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & x_5 & 0 & 0 & -x_2 \\ x_4 & 0 & -x_5 & -x_1 & x_3 \\ 0 & x_4 & 0 & -x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $R_x^4 = 0\ \forall x \in A$.

С другой стороны, $A^{(2)} = A^{(3)} = \dots = A^{(i)} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle\ \forall i \geq 2$. То есть алгебра A энгелева, но не нильпотентна. Более того, A разрешима, т. к. $A_{(2)} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $A_{(3)} = A_{(2)} \circ A_{(2)} = 0$. (Алгебра G разрешима, если для некоторого натурального n выполнено $G_{(n)} = 0$, где $G_{(k)} = G_{(k-1)} \circ G_{(k-1)}$, $k \geq 2$, $G_{(1)} = G$.) Определим алгебру G как прямую сумму пространства A и пространства B любой размерности с условием $A \circ B = B \circ B = 0$. Тогда G — энгелева, разрешимая, но не нильпотентная алгебра размерности не меньше пяти.

Итак, энгелевость — слишком слабое условие для получения нильпотентности соответствующей алгебры. С другой стороны, если G — конечномерная, антикоммутативная алгебра и любой элемент ассоциативной алгебры $A(G)$, порожденной всеми операторами правого умножения нильпотентен, то по теореме Веддерберна конечномерная ассоциативная алгебра $A(G)$ нильпотентна. А тогда нильпотентна и алгебра G. На какой же части пространства $A(G)$ нужно сохранить требование поэлементной нильпотентности, чтобы гарантировать нильпотентность алгебры G? Для формулировки ответа введем пространство

$$A(G)_i = \langle R_{x_1} \dots R_{x_s},\ s \leq i\ \forall x_j \in G \rangle.$$

Теорема 2. *Пусть G — антикоммутативная алгебра размерности n. Если любой элемент из $A(G)_{2n}$ нильпотентен, то G нильпотентна.*

Доказательство. По теореме из [6] в полной матричной алгебре $M_n(K)$ выполняется тождество степени $2n$. А именно, любые $2n$ элементов из $M_n(K)$ обращают в нуль стандартный полином степени $2n$

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)}.$$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис алгебры G. Тогда по теореме Ширшова о высоте [5] любой элемент из $A(G)$ может быть представлен в виде линейной комбинации мономов $a_1^{k_1} \dots a_r^{k_r}$, где $a_j = R_{e_{j_1}} \dots R_{e_{j_t}}$, $t \leq 2n$, $a_i \neq a_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$, а r — некоторое фиксированное число, определяемое данной алгеброй. Если длина монома от образующих R_{e_i} больше $r(2n)^n$, то существует $k_j > n$. Но любой элемент $a_j \in A(G)_{2n}$ нильпотентен и принадлежит $M_n(K)$, поэтому он удовлетворяет уравнению $x^n = 0$. Следовательно, все указанные мономы равны нулю, т. е. $A(G)$ нильпотентна, а значит, нильпотентна и G. □

Как видно из доказательства теоремы, условие поэлементной нильпотентности достаточно накладывать только на мономы

$$R_{e_{i_1}} \dots R_{e_{i_t}}, \quad t \leq 2n.$$

Поэтому теорему 2 можно переформулировать, используя только конечное число условий нильпотентности.

Теорема 2′. *Пусть G — антикоммутативная алгебра с базисом $e_1, \dots, e_n$. Если любой моном из алгебры $A(G)$ от образующих R_{e_i} длины не более $2n$ нильпотентен, то алгебра G нильпотентна.*

Используя [7], теорему 2 можно усилить. Теорема, доказанная в [7], утверждает, что если A — конечнопорожденнная подалгебра в алгебре матриц $M_n(K)$ и любое произведение ее образующих длины не более n нильпотентно, то и сама подалгебра нильпотентна. Тогда для конечномерных антикоммутативных алгебр имеет место

Теорема 3. *Пусть G — антикоммутативная алгебра с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Если любой моном из алгебры $A(G)$ от образующих R_{e_i} длины не более n нильпотентен, то алгебра G нильпотентна.*

Литература

1. Кострикин А.И. *Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – Т. 21. – № 5. – С. 515–540.
2. Жевлаков К.А. *Ниль-радикал алгебры Мальцева* // Алгебра и логика. – 1965. – Т. 4. – № 5. – С. 67–78.
3. Филиппов В.Т. *Об энгелевых алгебрах Мальцева* // Алгебра и логика. – 1976. – Т. 15. – № 1. – С. 89–109.
4. Кузьмин Е.Н. *Об антикоммутативных алгебрах, удовлетворяющих условию Энгеля* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8. – № 5. – С. 1026–1034.
5. Жевлаков К.А., Слинько А.Н., Шестаков И.П., Ширшов А.И. *Кольца, близкие к ассоциативным.* – М.: Наука, 1978. – 431 с.
6. Amitsur S.A., Levitzki J. *Minimal identities for algebras* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 1. – P. 449–463.
7. Уфнаровский В.А. *Теорема о независимости и ее следствия* // Матем. сб. – 1985. – Т. 128. – № 1. – С. 124–132.

Казанский государственный университет

Поступила
21.10.1999