ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 512.643

А.В. СЕМЕНОВА

АЛГЕБРЫ НАД ОПЕРАДОЙ КОНЕЧНЫХ ПОМЕЧЕННЫХ ГРАФОВ

Данная работа продолжает исследования, начатые в [1]. В [1] были определены две структуры операды на семействе квадратных матриц с элементами из множества, которое в конкретных примерах чаще всего оказывается моноидом. Одна из этих структур в [1] была изучена более детально. В данной работе будет рассмотрена другая структура. В том случае, когда квадратные матрицы — элементы этой операды определены над двухэлементной булевой алгеброй, некоторые ее подоперады можно интерпретировать как множества матриц смежности некоторых типов графов (неориентированных и ориентированных). При отказе от условия отсутствия петель на получающихся операдах удается ввести структуры Epi-операд в смысле [2]. Это позволяет найти (с точностью до рациональной эквивалентности) многообразия алгебр над этими операдами, а именно, найти системы операций для алгебр данных многообразий и соответствующие им наборы тождеств. Основной результат работы анонсирован в [3].

Будут использоваться некоторые определения и обозначения из [2]. Пусть $G(n)$ — множество симметрических $n\times n$-матриц, компоненты которых принадлежат двухэлементной булевой алгебре $\{0,1\}$. Элементами этого множества являются матрицы смежности графов (возможно, с петлями) без кратных ребер. Определим также компоненту $G(0)$, состоящую из пустой матрицы, которой соответствует граф без вершин (назовем его Λ), а соответствующую матрицу смежности — $A(\Lambda)$. По аналогии с [1] определим операцию композиции $G(m)\times G(n_1)\times\cdots\times G(n_m)\to G(n_1+\cdots+n_m)$ следующим образом:

$$AB_1\dots B_m=\begin{pmatrix} a_{11}+B_1 & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1m}\\ \overline{a}_{21} & a_{22}+B_2 & \dots & \overline{a}_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \dots & a_{mm}+B_m\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\overline{a}_{ij}=a_{ij}J_{n_in_j}$, $J_{n_in_j}$ — матрица размера $n_i\times n_j$, состоящая из единиц; $a_{ii}+B_i$ — матрица, получаемая из B_i прибавлением a_{ii} к каждому элементу B_i.

Определим также семейство $\operatorname{Dir}G=\{\operatorname{Dir}G(n)\mid n\ge 0\}$, где $\operatorname{Dir}G(n)$ — множество не обязательно симметрических $n\times n$-матриц с элементами из двухэлементной булевой алгебры $\{0,1\}$.

Теорема 1. *Относительно введенной операции композиции $G=\{G(n)\mid n\ge 1\}$ и $\operatorname{Dir}G$ являются операдами с единичным элементом — матрицей* (0).

Доказательство проводится непосредственной проверкой, использующей (1), а также лемму 1 и теорему 1 из [1]. □

Замечание 1. $G(0)$ содержит единственный элемент — пустую матрицу, $|G(0)|=1$. Если среди матриц $B_1,\dots,B_m$ встречается $B_i\in G(0)$, то композиция (1) дополняется следующим правилом: из A вычеркиваются блочные i-я строка и i-й столбец, а затем берется композиция с оставшимися B_j. На языке графов подстановка графа $\Gamma_i=\Lambda$ вместо i-й вершины Γ_0 приводит к тому, что удаляется сама эта i-я вершина, и все ребра (а в ориентированном случае — дуги), ей инцидентные.

С помощью доказательства теоремы 2 из [1] получается

Лемма 1. *На языке графов композиция* (1) *описывается следующим образом:*

$$A(\Gamma_0)A(\Gamma_1)\dots A(\Gamma_m) = A(\Gamma_0\Gamma_1\dots\Gamma_m),$$

где $\Gamma = \Gamma_0\Gamma_1\dots\Gamma_m$ *получается из* Γ_0 *подстановкой вместо вершины* i *всех вершин* Γ_i*, при этом происходит перенумерация:* j*-я вершина* Γ_i *соответствует вершине* $n_1+\dots+n_{i-1}+j$ *графа* Γ*; если* k *и* l *были инцидентны в* Γ_0 (*для ориентированного случая — если вершина* k *была смежна к* l)*, то все вершины* Γ_k *и* Γ_l (*после их подстановки*) *соединяются ребрами* (*для ориентированного случая — все вершины графа* Γ_k *становятся смежными ко всем вершинам графа* Γ_l)*; ребра* Γ_k *и* Γ_l *после подстановки остаются теми же самыми, если вершины* k *и* l *в* Γ_0 *не имели петель; если вершина* $i \in V(\Gamma_0)$ *обладала петлей, то каждая вершина* Γ_i *в* $\Gamma_0\Gamma_1\dots\Gamma_m$ *соединяется ребром с каждой другой вершиной* Γ_i (*в том числе с самой собой, т. е. появляются петли в каждой вершине*)*. Для ориентированного случая — если в графе* Γ_0 *имелась дуга вида* (i,i)*, то каждая вершина* Γ_i *в* $\Gamma_0\Gamma_1\dots\Gamma_m$ *становится смежной ко всем вершинам* Γ_i*, в том числе и к себе самой.*

Рассмотрим категорию Epi, введенную в [2]. Напомним, что ее объектами являются множества $[n]=\{0,1,\dots,n\}$, а морфизмами — сюръективные отображения $f:[n]\to[m]$ с условием, что $f(i)=0$ тогда и только тогда, когда $i=0$. Каждому такому отображению сопоставим $m\times n$-матрицу $M(f)=\sum\limits_{j=1}^{n}E^{(mn)}_{f(j),j}$, которая содержит единицу в $f(j)$-й строке и j-м столбце, а все остальные элементы — нулевые. Если дано еще одно отображение $g:[m]\to[k]$, то $M(gf)=M(g)M(f)$. Кроме того, определим действие морфизмов Epi на компонентах G следующим образом: если $A\in G$, $f:[n]\to[m]$, то $fA=M(f)AM(f)^t$, где $fA\in G(m)$, а $M(f)^t$ — матрица, транспонированная к $M(f)$.

Очевидной является

Лемма 2. $(gf)A=g(fA)$*,* $1_{[n]}A=A$*.*

Непосредственно проверяется

Лемма 3. *Если* $B=fA$*, то* $m\times m$*-матрица* B *устроена следующим образом:* $b_{ij}=\sum\limits_{\substack{f(k)=i\\ f(l)=j}}a_{kl}$*, причем* $b_{ij}=0$*, если таких* k *и* l *нет или нет хотя бы одного из них.*

Замечание 2. На языке графов это можно описать так: если $A=A(\Gamma)$, $A(f\Gamma)=fA$, то $f\Gamma$ — граф с вершинами $1,2,\dots,m$, причем вершины i и j в $f\Gamma$ смежны (а в ориентированном случае — i смежна к j в $f\Gamma$) тогда и только тогда, когда $i=f(k)$, $j=f(l)$ для некоторых $k,l\in V(\Gamma)$. Если таких k,l несколько, то ребро (дуга), соединяющее i и j, все равно будет единственным (в силу $1+\dots+1=1$). Если $f(k)=f(l)=i$, то в вершине i будет петля (или дуга вида (i,i) в ориентированном случае).

Теорема 2. *Операды* G *и* $\operatorname{Dir} G$ *являются* Epi*-операдами* (*в смысле* [2])*.*

Доказательство. Проверим свойства Epi-операды. Пусть даны сюръекции $f_i:[n_i]\to[k_i]$, $1\le i\le m$,

$$A(f_1B_1)\dots(f_mB_m)=(f_1\sqcup\dots\sqcup f_m)(AB_1\dots B_m). \tag{2}$$

Левая часть (2) представляет собой матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}+M(f_1)B_1M(f_1)^t & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1m}\\ \overline{a}_{21} & a_{22}+M(f_2)B_2M(f_2)^t & \dots & \overline{a}_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \dots & a_{mm}+M(f_m)B_mM(f_m)^t \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $a_{ii} + M(f_i)B_iM(f_i)^t = a_{ii}J_{k_ik_i} + M(f_i)B_iM(f_i)^t$, $\overline{a}_{ij} = a_{ij}J_{k_ik_i}$. Правая часть (2) с учетом

$$M(f_1 \sqcup \dots \sqcup f_m) = \begin{pmatrix} M(f_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M(f_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M(f_m) \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} M(f_1) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M(f_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} + B_1 & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1m} \\ \overline{a}_{21} & a_{22} + B_2 & \dots & \overline{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \overline{a}_{m2} & \dots & a_{mm} + B_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(f_1)^t & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M(f_m)^t \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} + B_i = a_{ii}J_{n_in_i} + B_i$, $\overline{a}_{ij} = a_{ij}J_{n_in_j}$.

После перемножения получим

$$\begin{pmatrix} M(f_1)(a_{11}J_{n_1n_1}+B_1)M(f_1)^t & M(f_1)a_{12}J_{n_1n_2}M(f_2)^t & \dots & M(f_1)a_{1m}J_{n_1n_m}M(f_m)^t \\ M(f_2)a_{21}J_{n_2n_1}M(f_1)^t & M(f_2)(a_{22}J_{n_2n_2}+B_2)M(f_2)^t & \dots & M(f_2)a_{2m}J_{n_2n_m}M(f_m)^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(f_m)a_{m1}J_{n_mn_1}M(f_1)^t & M(f_m)a_{m2}J_{n_mn_2}M(f_2)^t & \dots & M(f_m)(a_{mm}J_{n_mn_m}+B_m)M(f_m)^t \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Совершив элементарные преобразования, получаем

$$M(f_i)(a_{ii}J_{n_in_i} + B_i)M(f_i)^t = a_{ii}(M(f_i)J_{n_in_i}M(f_i)^t) + M(f_i)B_iM(f_i)^t.$$

Достаточно убедиться, что $M(f_i)J_{n_in_i}M(f_i)^t = J_{k_ik_j}$. Так как f_i — сюръекция, то в каждой строке $M(f_i)$ есть по крайней мере одна единица (и в каждом столбце $M(f_j)^t$ также присутствует хотя бы одна единица). С учетом того, что $1 + 1 = 1$, получим $M(f_i)J_{n_in_j} = J_{k_in_j}$, $J_{k_in_j}M(f_j)^t = J_{k_ik_j}$. Отсюда следует совпадение матриц (3) и (4).

Рассмотрим $f : [k] \to [m]$, $A \in G(k)$, $B_i \in G(n_i)$, $1 \le i \le m$. Пусть $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$. Докажем тождество

$$(fA)B_1 \dots B_m = (f * \alpha)AB_{f(1)} \dots B_{f(k)}. \quad (5)$$

Матрица $M(f * \alpha)$ — это блочная $m \times k$-матрица, где блок M_{ij} ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le k$) имеет размеры $n_i \times n_{f(j)}$, $M_{f(j),j} = E_{n_{f(j)}}$, остальные блоки, размеры которых однозначно определяются, нулевые.

Согласно лемме 3 $B = fA = M(f)AM(f)^t$ состоит из элементов $b_{ij} = \sum\limits_{f(s)=i,\ f(t)=j} a_{st}$. Тогда

$$(fA)B_1 \dots B_m = \begin{pmatrix} b_{11} + B_1 & \overline{b}_{12} & \dots & \overline{b}_{1m} \\ \overline{b}_{21} & b_{22} + B_2 & \dots & \overline{b}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{b}_{m1} & \overline{b}_{m2} & \dots & b_{mm} + B_m \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $b_{ii} + B_i = b_{ii}J_{n_in_i} + B_i$, $\overline{b}_{ij} = b_{ij}J_{n_in_j}$.

С другой стороны,

$$C = AB_{f(1)} \dots B_{f(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} + B_{f(1)} & \overline{a}_{12} & \dots & \overline{a}_{1m} \\ \overline{a}_{21} & a_{22} + B_{f(2)} & \dots & \overline{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{k1} & \overline{a}_{k2} & \dots & a_{kk} + B_{f(k)} \end{pmatrix}.$$

Здесь блоки

$$\begin{array}{ll} C_{ij} = \overline{a}_{ij} = a_{ij} J_{n_{f(i)} n_{f(j)}}, & i \neq j; \\ C_{ii} = a_{ii} + B_{f(i)} = a_{ii} J_{n_{f(i)} n_{f(i)}} + B_{f(i)}, & \end{array} \quad 1 \leq i, j \leq k. \tag{7}$$

Обозначим через M' блочную $k \times m$-матрицу M^t, lj-й блок которой — матрица M'_{lj}, причем $M'_{lf(l)} = E_{n_{f(l)}}$, а все остальные M'_{lj} нулевые. Рассмотрим блочную $m \times m$-матрицу

$$D = MCM^t, \tag{8}$$

$$D_{ij} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} M_{iq} C_{ql} M'_{lj} = \sum_{f(q)=i,\ f(l)=j} C_{ql}.$$

Если $i \neq j$, то по (7)

$$D_{ij} = \sum_{\substack{f(q)=i,\ f(l)=j \\ q \neq l}} C_{ql} = \sum_{\substack{f(q)=i,\ f(l)=j \\ q \neq l}} a_{ql} J_{n_{f(q)} n_{f(l)}} =$$

$$= \sum_{\substack{f(q)=i,\ f(l)=j \\ q \neq l}} a_{ql} J_{n_i n_j} = \Bigg(\sum_{\substack{f(q)=i,\ f(l)=j \\ q \neq l}} a_{ql} \Bigg) J_{n_i n_j} = b_{ij} J_{n_i n_j} = \overline{b}_{ij}.$$

Если же $i = j$, то

$$D_{ii} = \sum_{f(q)=i,\ f(l)=i} C_{ql} = \sum_{f(q)=i} C_{qq} + \sum_{\substack{f(q)=i, f(l)=j \\ q \neq l}} C_{ql} =$$

$$= \sum_{f(q)=i} (a_{qq} J_{n_i n_i} + B_i) + \sum_{\substack{f(q)=i,\ f(l)=j \\ q \neq l}} a_{ql} J_{n_i n_i} = \Bigg(\sum_{f(q)=i,\ f(l)=j} a_{qq} \Bigg) J_{n_i n_i} + B_i = b_{ii} + B_i.$$

При переходе к последнему равенству учитывается, что $B_i + B_i = B_i$, т. к. $1+1 = 1$, $0+0 = 0$. Этим доказано, что (6) совпадает с (8), т. е. тождество (5).

Так как нигде в рассуждениях не используется свойство симметричности матриц, то это доказательство применимо и к операде $\mathrm{Dir}\, G$. □

Обозначим через $\Gamma_\times$ граф с двумя вершинами 1, 2, соединенными ребром, а через Γ_+ — граф с вершинами 1, 2, не имеющий ребер, $\Gamma_\times, \Gamma_+ \in G(2)$. Будем говорить, что некоторая Epi-операда R порождается элементами множества $X \subseteq \bigcup_{k \geq 0} R(k)$, если любой элемент $z \in R(n)$ можно представить в виде $z = f(x_0 x_1 \ldots x_m)$, где $x_i \in X$, $0 \leq i \leq n$, $x_0 \in R(m)$, $x_i \in R(k_i)$, $1 \leq i \leq m$, $k = k_1 + \cdots + k_m$, $f : [k] \to [n]$ — сюръективное отображение из $\mathrm{Epi}([k], [n])$.

Теорема 3. 1) *Операда G как* Epi-*операда порождается графами $\Gamma_\times$ и Γ_+.* 2) *Операда* $\mathrm{Dir}\, G$ *как* Epi-*операда порождается графами Γ_+ и ориентированным аналогом графа $\Gamma_\times$, в котором имеется единственная дуга из вершины* 1 *в вершину* 2.

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф Γ с вершинами $1, 2, \ldots, n$. Пусть $e \in E(\Gamma)$, $v_1(e)$ и $v_2(e)$ — концы ребра (дуги) e. Каждому ребру (дуге) $e \in E(\Gamma)$ сопоставим множество из двух элементов $\{v_1(e), v_2(e)\}$, а каждой изолированной вершине $v \in V(\Gamma)$ — элемент v^*.

Рассмотрим объединение непересекающихся множеств

$$\bigcup_{e \in E(\Gamma)} \{v_1(e), v_2(e)\} \cup \bigcup_{\substack{v \text{ — изолированная} \\ \text{вершина } \Gamma}} \{v^*\}$$

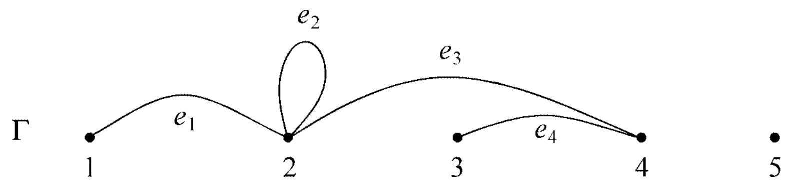
и перенумеруем его элементы числами от 1 до k. Образуем граф Γ^* с множеством вершин $[k] = \{1, \ldots, k\}$, ребра (дуги) которого описываются следующим образом: вершины i и j смежны (дуга (i, j) существует) тогда и только тогда, когда $i = v_1(e)$, $j = v_2(e)$. Отобразим $[k]$ в $[n]$

$(f:[k]\to[n])$, сопоставляя вершине i вершину l, если либо $i=v^*$, $l=v$; либо $i=v_1(e)$ и ребро e инцидентно в Γ вершине l (дуга e выходит из вершины l в Γ); либо $i=v_2(e)$ и ребро e инцидентно в Γ вершине l (дуга e входит в вершину l в Γ).

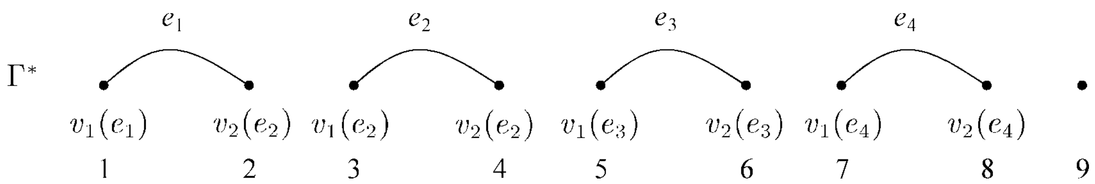
Что касается ребер Γ^*, то $v_1(e)$ и $v_2(e)$ в Γ^* инцидентны для любого $e\in E(\Gamma)$ (для ориентированного случая — вершина $v_1(e)$ смежна к $v_2(e)$). Тогда по построению

$$\Gamma = f\Gamma^*. \tag{9}$$

Пусть, например, неориентированный граф Γ выглядит следующим образом:



Тогда граф Γ^* будет иметь вид



Граф Γ^*, во-первых, не содержит петель (дуг вида (i,i)). Во-вторых, его вершины разбиты на два непересекающихся множества V_1 и V_2. Вершины из множества V_2 являются изолированными. Мощность множества V_1 есть четное число, поскольку оно представляет собой множество пар концов ребер (дуг) Γ. Никакие два ребра (две дуги) не инцидентны одной и той же вершине. Пусть $|V_1|=2r$, $|V_2|=s$, и нумерация в Γ^* такова, что вершины с номерами $2l-1$ и $2l$ $(1\le l\le r)$ инцидентны (для ориентированного случая — для вершин с номерами $2l-1$ и $2l$ существует инцидентная им дуга). Пусть O_{2r+s} — граф без ребер с $2r+s$ вершинами. Легко показать, что O_{2r+s} представляет собой композицию графов вида Γ_+ и E. Очевидно, $\Gamma^* = O_{2r+s}\underbrace{\Gamma_\times\ldots\Gamma_\times}_{r}\underbrace{E\ \ldots E}_{s}$.

Итак,

$$\Gamma = f(O_{2r+s}\underbrace{\Gamma_\times\ldots\Gamma_\times}_{r}\underbrace{E\ \ldots E}_{s}), \tag{10}$$

и в этом смысле утверждение теоремы доказано. $\square$

Положим $a_1+a_2=\Gamma_+a_1a_2=(\overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet})a_1a_2$, $a_1a_2=\Gamma_\times a_1a_2=(\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet})a_1a_2$. При доказательстве следующей теоремы используется категорный вариант определения рациональной эквивалентности многообразий универсальных алгебр [4]. Напомним, что многообразия M_1 и M_2 являются рационально эквивалентными тогда и только тогда, когда существуют функторы $F_1: M_1\to M_2$, $F_2: M_2\to M_1$ такие, что $F_1F_2=\mathrm{Id}$, $F_2F_1=\mathrm{Id}$ и $U_2F_1=U_1$, $U_1F_2=U_2$, где U_i — забывающие функторы из категорий M_i в категорию множеств.

Напомним используемое далее определение алгебр над W-операдой R (где W — вербальная категория [2]).

Алгебра над R — это множество A вместе с заданными операциями композиции, имеющими вид $R(n)\times A^n\to A$, $n=0,1,\ldots$ Результат этой операции обозначается так: $(x,a_1,\ldots,a_n)\mapsto xa_1\ldots a_n$, $x\in R(n)$, $a_i\in A$, $i=1,\ldots,n$. Должны выполняться следующие свойства:

1) $(xy_1\ldots y_m)\overline{a}_1\ldots\overline{a}_m = x(y_1\overline{a}_1)\ldots(y_m\overline{a}_m)$, где $x\in R(m)$, $y_i\in R(n_i)$, $\overline{a}_i\in A^{n_i}$, $1\le i\le m$;

2) $\varepsilon a=a$ для любого $a\in A$, $\varepsilon\in R(1)$ — единица операды;

3) $(fx)a_1 \dots a_m = xa_{f(1)} \dots a_{f(k)}$, где $f \in W(k,m)$, $x \in R(k)$, $a_i \in A$.

Последнее свойство введено в [5].

Обычным образом определяются гомоморфизмы алгебр. Категория алгебр над R и их гомоморфизмов, т. е. многообразие универсальных алгебр, обозначается через $\mathrm{Alg}(R)$..

Теорема 4. *Многообразие* $\mathrm{Alg}(G)$ *алгебр над операдой* G *рационально эквивалентно многообразию алгебр с двумя бинарными операциями сложения и умножения и с одной константой* θ*, причем должны выполняться следующие десять тождеств*:

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1, \tag{11}$$

$$a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1, \tag{12}$$

$$a_1 + \theta = a_1, \tag{13}$$

$$a_1 \cdot \theta = a_1, \tag{14}$$

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3), \tag{15}$$

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3), \tag{16}$$

$$a + a = a, \tag{17}$$

$$a \cdot a \cdot a = a \cdot a, \tag{18}$$

$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3, \tag{19}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_3. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $M_1 = \mathrm{Alg}(G)$, M_2 — многообразие, описанное в формулировке теоремы. Построим функторы F_1 и F_2, удовлетворяющие свойствам из определения рациональной эквивалентности.

Пусть A — алгебра над операдой G. Определим на множестве A структуру алгебры из многообразия M_2. Операции сложения и умножения в A будут ограничениями операции композиции $G(2) \times A^2 \longrightarrow A$ на подмножества $\{\Gamma_+\} \times A^2$ и $\{\Gamma_\times\} \times A^2$. Иными словами, $a_1 + a_2 = \Gamma_+ a_1 a_2$, $a_1 a_2 = \Gamma_\times a_1 a_2$, $G(0)$ соответствует константам алгебр из $\mathrm{Alg}(G)$. В частности, если $A \in \mathrm{Alg}(G)$, то задано отображение $G(0) \to A$. Образ Λ при этом отображении обозначим через θ. Покажем, что определенная таким образом алгебра принадлежит многообразию M_2.

При проверке тождеств (11)–(20) в ряде случаев будем записывать проводимые преобразования графически.

Докажем тождество (11). Приводимые ниже преобразования используют свойство

$$(f\Gamma)a_1 \dots a_m = \Gamma a_{f(1)} \dots a_{f(k)}$$

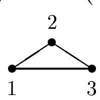
из определения алгебры над Epi-операдой

$$a_2 + a_1 = (\overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet})a_2 a_1 = (\overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet})a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} = \sigma(\overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet})a_1 a_2 = (\overset{\sigma(1)}{\bullet}\quad \overset{\sigma(2)}{\bullet})a_1 a_2 = (\overset{2}{\bullet}\ \ \overset{1}{\bullet})a_1 a_2 = \Gamma_+ a_1 a_2,$$

где $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Epi})$

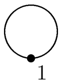
Так как $a_1 a_2 = \Gamma_\times a_1 a_2$ и $a_2 a_1 = \Gamma_\times a_2 a_1 = \Gamma_\times a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} = (\sigma\Gamma_\times)a_1 a_2$, где $\sigma\Gamma_\times = \sigma(\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}) = (\overset{\sigma(1)}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{\sigma(2)}{\bullet}) = (\overset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{1}{\bullet}) = (\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}) = \Gamma_\times$, то (12) доказано; $a_1 + \theta = \Gamma_+(E\Lambda)a_1 = Ea_1 = a_1 \Rightarrow$ (13); $a_1\theta = \Gamma_\times(E\Lambda)a_1 = Ea_1 = a_1 \Rightarrow$ (14).

Тождество (15) верно, т. к., с одной стороны, $(a_1 + a_2) + a_3 = \Gamma_+(\Gamma_+ E)a_1 a_2 a_3$, где $\Gamma_+(\Gamma_+ E) = (\overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet}\ \ \overset{3}{\bullet})$. С другой стороны, $a_1 + (a_2 + a_3) = \Gamma_+(E\Gamma_+)a_1 a_2 a_3 = (\overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet}\ \ \overset{3}{\bullet})a_1 a_2 a_3$.

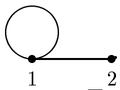
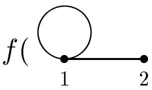
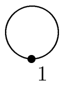
Левая часть тождества (16) есть $(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = \Gamma_\times(\Gamma_\times E)a_1 a_2 a_3$. Правая часть $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = \Gamma_\times(E\Gamma_\times)a_1 a_2 a_3$, где $\Gamma_\times(\Gamma_\times E) =$  $= \Gamma_\times(E\Gamma_\times)$.

Докажем тождество (17). Пусть $a = a_1$, $a_1 + a_1 = \Gamma_+ a_1 a_1 = \Gamma_+ a_{f(1)} a_{f(2)}$, где $f : [2] \to [1]$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$. Согласно определению алгебры над операдой W $\Gamma_+ a_{f(1)} a_{f(2)} = (f\Gamma_+) a_1$. В свою очередь, $(f\Gamma_+) = f(\overset{1}{\bullet}\quad\overset{2}{\bullet}) = (\overset{1}{\bullet}) = E$.

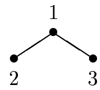
Отсюда $(f\Gamma_+) a_1 = a_1$, что и требовалось доказать.

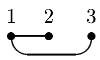
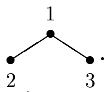
Рассмотрим тождество (18). Пусть снова $a = a_1$, преобразуем правую часть тождества $a_1 \cdot a_1 = \Gamma_\times a_1 a_1 = \Gamma_\times a_{f(1)} a_{f(2)} = (f\Gamma_\times) a_1$, где $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f\Gamma_\times = f(\overset{1}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{2}{\bullet}) =$  $= \Gamma_\diamond$, т. е. получили петлю в вершине 1. Преобразуем левую часть тождества

$$a \cdot a \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = \Gamma_\times(\Gamma_\diamond a_1) a_1 = \Gamma_\times(\Gamma_\diamond E) a_1 a_1 = (\Gamma_\times(\Gamma_\diamond E)) a_{f(1)} a_{f(2)} = (f(\Gamma_\times(\Gamma_\diamond E))) a_1,$$

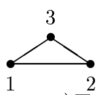
где $\Gamma_\times(\Gamma_\diamond E) =$  Тогда $f($  $) =$  $= \Gamma_\diamond$.

Отсюда $a \cdot a \cdot a = \Gamma_\diamond a = a \cdot a$, что и требовалось доказать.

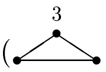
Для левой части (19) имеем $a_1 \cdot (a_2 + a_3) = \Gamma_\times(E\Gamma_+) a_1 a_2 a_3$, где $\Gamma_\times(E\Gamma_+) =$ . Правую часть тождества запишем в виде $a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 = \Gamma_+(\Gamma_\times\Gamma_\times) a_1 a_2 a_1 a_3 = \Gamma_+(\Gamma_\times\Gamma_\times) a_{f(1)} a_{f(2)} a_{f(3)} a_{f(4)}$, где $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$, $f(4) = 3$.

Тогда $\Gamma_+(\Gamma_\times\Gamma_\times) a_{f(1)} a_{f(2)} a_{f(3)} a_{f(4)} = f(\Gamma_+\Gamma_\times\Gamma_\times) a_1 a_2 a_3$. Так как $\Gamma_+\Gamma_\times\Gamma_\times = (\overset{1}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{2}{\bullet}\quad\overset{3}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{4}{\bullet})$, то $f(\overset{1}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{2}{\bullet}\quad\overset{3}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{4}{\bullet}) =$  $=$ .

Отсюда $\Gamma_\times(E\Gamma_+) = f(\Gamma_+\Gamma_\times\Gamma_\times)$, что и требовалось доказать.

Докажем последнее тождество (20). С одной стороны, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = \Gamma_\times(\Gamma_\times E) a_1 a_2 a_3$, где $\Gamma_\times(\Gamma_\times E) =$ . С другой стороны, $(a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3) + a_1 \cdot a_3 = \Gamma_+(a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3)\Gamma_\times(a_1 a_3) = \Gamma_+(\Gamma_+\Gamma_\times\Gamma_\times a_1 a_2 a_2 a_3)\Gamma_\times(a_1 a_3) = (\Gamma_+(\Gamma_+\Gamma_\times\Gamma_\times)\Gamma_\times)(a_1 a_2 a_2 a_3 a_1 a_3)$.

Так как $\Gamma_+\Gamma_\times\Gamma_\times = (\overset{1}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{2}{\bullet}\quad\overset{3}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{4}{\bullet})$, то $\Gamma = \Gamma_+(\Gamma_+\Gamma_\times\Gamma_\times)\Gamma_\times = (\overset{1}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{2}{\bullet}\quad\overset{3}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{4}{\bullet}\quad\overset{5}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{6}{\bullet})$, $a_1 a_2 a_2 a_3 a_1 a_3 = a_{f(1)} a_{f(2)} a_{f(3)} a_{f(4)} a_{f(5)} a_{f(6)}$, где $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, $f(5) = 1$, $f(6) = 3$. Поэтому

$\Gamma a_1 a_2 a_2 a_3 a_1 a_3 = (f\Gamma) a_1 a_2 a_3$, где $f\Gamma = f(\overset{1}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{2}{\bullet}\quad\overset{3}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{4}{\bullet}\quad\overset{5}{\bullet}\!-\!\!-\!\overset{6}{\bullet}) = ($  $) = \Gamma_\times(\Gamma_\times E)$.

Значит, $(\Gamma_\times\Gamma_\times E) a_1 a_2 a_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$, что и требовалось доказать.

Теперь можно определить функтор $F_1 : M_1 \to M_2$, полагая $F_1(A)$ равным определенной выше алгебре из многообразия M_2. Из построения ясно, что если $h : A_1 \to A_2$ — гомоморфизм алгебр из $M_1 = \mathrm{Alg}(G)$, то отображение h останется гомоморфизмом между $F_1(A_1)$ и $F_1(A_2)$ как алгебрами из M_2. Это означает, что F_1 — функтор. Свойство $U_2 F_1 = U_1$ выполнено по построению.

Выразим произвольную операцию $\Gamma a_1 \dots a_m$ (где $\Gamma \in G(m)$) через операции сложения и умножения. По (9) $\Gamma = f\Gamma^*$, $\Gamma^* \in G(k)$, $f : [k] \to [m]$ — сюръекция. Следовательно,

$$(f\Gamma^*) a_1 \dots a_m = \Gamma^* a_{f(1)} \dots a_{f(k)}.$$

По определению Γ^* получаем

$$\Gamma a_1 \dots a_m = \Gamma^* a_{f(1)} \dots a_{f(k)} = \sum_{\{f(i), f(j)\} \text{ — ребро } \Gamma} a_{f(i)} a_{f(j)} + \sum_{\substack{f(l) \text{ не инцидентна в } \Gamma \\ \text{никакому ребру}}} a_{f(l)}.$$

В первом из слагаемых в правой части полученного тождества суммирование ведется также и по индексам $f(i) = f(j)$. Преобразуем его, избавившись от f. Учитывая тождество (17), окончательно получим

$$\Gamma a_1 \dots a_m = \sum_{\{s,t\} \text{ — ребро } \Gamma} a_s a_t + \sum_{\substack{r \text{ не инцидентна} \\ \text{никакому ребру } \Gamma}} a_r \quad (1 \le s, t, r \le m). \tag{21}$$

Пусть теперь A — алгебра с тождествами (11)–(20). Определим отображение $G(m) \times A^m \longrightarrow A$ по формуле (21). Определим также отображение $G(0) \to A$, полагая $\Lambda \mapsto \theta$.

Проверим выполнение свойств алгебры над операдой.

$Ea = a$, т.к. первая сумма в (21) отсутствует, поскольку в E нет ребер, а вторая сумма сводится к одному слагаемому a ($m = 1$, $a = a_1$, вершина 1 не инцидентна никакому ребру).

Пусть $\Gamma \in G(k)$, $f : [k] \to [m]$ — сюръекция. Для проверки тождества $(f\Gamma)a_1 \dots a_m = \Gamma a_{f(1)} \dots a_{f(k)}$ преобразуем его левую часть:

$$(f\Gamma)a_1 \dots a_m = \sum_{\substack{1 \le i = f(r),\ j = f(t) \le m \\ \{r,t\} \text{ — ребро } \Gamma}} a_i a_j + \sum_{\substack{l \text{ не инцидентна никакому} \{f(r), f(t)\} \\ \{r,t\} \text{ — ребро}}} a_l, \quad 1 \le l \le m.$$

Можно продолжить преобразование, учитывая $l = f(s)$, т.к. f — сюръекция. Поэтому суммирование во второй сумме в правой части полученного равенства происходит по всем тем вершинам s, которые не инцидентны в Γ никакому ребру $\{r, s\} \in E(\Gamma)$. Тогда придем к выражению

$$\sum_{\{r,t\} \text{ — ребро } \Gamma} a_{f(r)} a_{f(t)} + \sum_{\substack{s \text{ не инцидентна никакому} \\ \text{ребру } \Gamma}} a_{f(s)}.$$

В первой сумме могут быть повторяющиеся слагаемые, если, например, $f(r_1) = f(r_2)$, $f(t_1) = f(t_2)$, $\{r_1, t_1\}$, $\{r_2, t_2\}$ — ребра Γ. Ввиду (17) от повторяемости можно избавиться. Для правой части имеем

$$\Gamma a_{f(1)} \dots a_{f(k)} = \sum_{\substack{1 \le r,\ t \le k \\ \{r,t\} \text{ — ребро } \Gamma}} a_{f(r)} a_{f(t)} + \sum_{\substack{1 \le s \le k \\ s \text{ не инцидентна никакому ребру } \Gamma}} a_{f(s)}.$$

Пусть $\overline{a}_i = (a_{i1} \dots a_{in_i})$, $1 \le i \le m$, $\Gamma = \Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_m$. Для проверки ассоциативности докажем равенство

$$(\Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_m)\overline{a}_1 \dots \overline{a}_m = \Gamma_0(\Gamma_1 \overline{a}_1) \dots (\Gamma_m \overline{a}_m) \tag{22}$$

с левой частью

$$\Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_m \overline{a}_1 \dots \overline{a}_m = \sum_{\{(i,j),(k,l)\} \text{ — ребро } \Gamma} a_{ij} a_{kl} + \sum_{\substack{(r,s) \text{ — не инцидентна} \\ \text{ребру } \Gamma}} a_{rs} =$$

$$= \sum_{\substack{i \\ (i,i) \text{ — не петля } \Gamma_0}} \sum_{\{(i,j),(i,l)\} \text{ — ребро } \Gamma_i} a_{ij} a_{il} + \sum_{\substack{i \\ \{i\} \text{ — петля } \Gamma_0}} \sum_{1 \le j,l \le n_i} a_{ij} a_{il} +$$

$$+ \sum_{\substack{i \ne k \\ (i,k) \text{ — ребро } \Gamma_0}} \sum_{\substack{1 \le j \le n_i \\ 1 \le l \le n_k}} a_{ij} a_{kl} + \sum_{\substack{r \text{ не инцидентна ребру } \Gamma_0 \\ s \text{ не инцидентна ребру } \Gamma_r}} a_{rs}.$$

Рассмотрим правую часть доказываемого равенства

$$\Gamma_0 x_1 \dots x_m = \sum_{\substack{(i,k) \text{ — ребро } \Gamma_0 \\ i \ne k}} x_i x_k + \sum_{\{i\} \text{ — петля } \Gamma_0} x_i x_i + \sum_{\substack{r \text{ не инцидентна} \\ \text{ребру } \Gamma_0}} x_r,$$

где

$$x_i = \Gamma_i \overline{a}_i = \sum_{\{j_1, j_2\} \text{ — ребро } \Gamma_i} a_{ij_1} a_{ij_2} + \sum_{\substack{s \text{ не инцидентна} \\ \text{ребру } \Gamma_i}} a_{is}.$$

Подставив x_i в $\Gamma_0 x_1 \dots x_m$ и проделав преобразования, пользуясь тождествами (11)–(20), убеждаемся, что свойство ассоциативности (22) выполняется.

Теперь по аналогии можно определить функтор $F_2 : M_2 \to M_1$, полагая $F_2(A) = \mathrm{Alg}(G)$ из многообразия M_1. Из построения ясно, что F_2 — функтор. Свойство $U_1F_2 = U_2$ также выполнено. $\square$

Аналог этой теоремы существует и для ориентированного случая.

Теорема 5. *Многообразие* $\mathrm{Alg}(\mathrm{Dir}\, G)$ *алгебр над операдой* $\mathrm{Dir}\, G$ *рационально эквивалентно многообразию алгебр с двумя бинарными операциями сложения и умножения и с одной константой* θ*, причем должны выполняться тождества* (11), (13)–(20).

Доказательство. Тождества (11), (13)–(20) для алгебр над $\mathrm{Dir}\, G$ проверяются практически так же, как для алгебр над G. Для $\Gamma_\times$, состоящего из двух вершин и стрелки между ними, равенство $a_1 \cdot a_2 = \Gamma_\times a_1 a_2 = a_2 \cdot a_1$ не имеет места, т. к. $\sigma\Gamma_\times \neq \Gamma_\times$.

Таким образом, строится функтор $F_1 : M_1 \to M_2$, где $M_1 = \mathrm{Alg}(\mathrm{Dir}\, G)$, а M_2 — многообразие, определенное в формулировке теоремы.

По аналогии с неориентированным случаем выразим произвольную операцию $\Gamma a_1 \dots a_m$ (где $\Gamma \in G(m)$) через операции сложения и умножения. По (9) $\Gamma = f\Gamma^*$, $\Gamma^* \in G(k)$, $f : [k] \to [m]$ — сюръекция,

$$\Gamma a_1 \dots a_m = \Gamma^* a_{f(1)} \dots a_{f(k)} = \sum_{(f(i),f(j)) \text{ — дуга } \Gamma} a_{f(i)} a_{f(j)} + \sum_{\substack{f(l) \text{ не инцидентна в } \Gamma \\ \text{никакой дуге}}} a_{f(l)}.$$

В первом из слагаемых в правой части полученного тождества суммирование ведется также и по индексам $f(i) = f(j)$. Преобразуем его, избавившись от f, и, учитывая тождество (17), окончательно получим

$$\Gamma a_1 \dots a_m = \sum_{(s,t) \text{ — дуга } \Gamma} a_s a_t + \sum_{\substack{r \text{ не инцидентна} \\ \text{никакой дуге } \Gamma}} a_r \quad (1 \le s,t,r \le m). \tag{23}$$

Пусть теперь A — алгебра с тождествами (11), (13)–(20). Определим отображение $G(m) \times A^m \longrightarrow A$ по формуле (23) и отображение $G(0) \to A$, полагая $\Lambda \mapsto \theta$.

Выполнение свойств алгебры над операдой проверяется аналогично неориентированному случаю, причем вместо ребер рассматриваются дуги. $\square$

Литература

1. Тронин С.Н., Семенова А.В. *Операды конечных помеченных графов* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4. – С. 50–60.
2. Тронин С.Н. *Абстрактные клоны и операды* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 4. – С. 924–936.
3. Семенова А.В. *Алгебры над операдой графов* // Алгебра и анализ-2004. Материалы междунар. конфер., посвящ. 200-летию Казанского государ. ун-та (Казань, 2–9 июля 2004 г.). Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 23. – Казань, Казанск. матем. об-во, 2004. – С. 68–69.
4. Пинус А.Г. *Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений.* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 239 с.
5. Тронин С.Н. *О характеризации многообразий алгебр над W-операдами* // Междунар. алгебр. конфер., посвящ. 250-летию Московск. ун-та и 75-летию каф. высш. алгебры. Тез. докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – С. 127–128.

Казанский государственный университет

Поступила 14.06.2005