ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 512.55

И.И. САХАЕВ, Х.И. ХАКМИ

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ МОДУЛЯХ И КОЛЬЦАХ

Работа посвящена изучению строения сильно регулярных модулей и колец, в частности, сильно регулярных проективных и инъективных модулей. Тем самым существенно дополняются исследования, проведенные в [1]–[4]. Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и унитарные модули над ними. Будем обозначать через $J(R)$ и $J(M)$ радикал Джекобсона соответственно кольца R и модуля M.

Напомним определения из [1]–[4]. Правый R-модуль M называется слабо регулярным (соответственно сильно регулярным), если для каждого подмодуля N модуля M, $N \nsubseteq J(M)$, существует подмодуль Q модуля N такой, что $Q \not\subset J(M)$ и $M = Q \oplus Q'$ (соответственно $M = N \oplus Q'$). Кольцо R называется слабо регулярным (сильно регулярным), если оно, рассматриваемое как правый R модуль, является слабо регулярным (сильно регулярным). Правый R-модуль M называется n-регулярным, если каждый его подмодуль N, порожденный n элементами и $N \not\subset J(M)$, является прямым слагаемым модуля M. Правый R-модуль M называется локальным, если радикал $J(M)$ является наибольшим подмодулем модуля M, и полупростым, если он является прямой суммой простых правых R-модулей. Если $M = J(M)$, то правый R-модуль M называется радикальным. Радикальный правый R-модуль M, очевидно, является сильно регулярным, а регулярное (в смысле Неймана) кольцо является n-регулярным для любого целого n. Переходим к изложению результатов.

Теорема 1. *Если правый R-модуль M 2-регулярен, $M \neq 0$, то либо $M = J(M)$, либо $J(M) = 0$, либо M локальный; и наоборот, если M есть 1-регулярный правый R-модуль, удовлетворяющий одному из предыдущих ограничений на модуль M, то M есть 2-регулярный правый R-модуль.*

Доказательство проведем в нескольких пунктах.

1. Пусть $M \neq J(\mathrm{M})$, $J(M) \neq 0$. Покажем, что в этом случае M является локальным правым R-модулем. Предположим, что M — не локальный R-модуль. Так как $M \neq J(M)$, то существует такой $a \in M$, что $aR \not\subset J(\mathrm{M})$.

2.1. Рассмотрим случай $M = aR$. Поскольку aR — не локальный правый R-модуль, то существует $bR \subset aR$, $bR \neq aR$, $bR \not\subset J(aR)$. Покажем, что $J(aR) = J(bR)$. Пусть существует такой $z \in J(aR)$, что $bR+zR \neq bR$. Ввиду 2-регулярности R-модуля aR имеем $aR = (bR+zR)\oplus N$. В силу следствия 9.1.3 (a) [5] подмодуль zR косущественен в aR, поэтому $aR = bR \oplus N$. Отсюда $bR+zR = (bR+zR) \bigcap aR = (bR+zR) \bigcap (bR\oplus N) = bR$, пришли в противоречие с предположением $bR + zR \neq bR$. Значит, $z \in J(aR)$ влечет $z \in bR$, поэтому $J(aR) = J(bR)$ и $aR = bR \oplus N$. Если $N = 0$, то получим $aR = bR$ и приходим в противоречие с предположением $aR \neq bR$.

2.2. Пусть $N \neq 0$. Так как $J(aR) = J(M) \neq 0$, то существует $z \neq 0$, $z \in J(aR)$, $q \in N$, $q \neq 0$, $zR \oplus qR \not\subset J(aR)$. Снова в силу 2-регулярности модуля aR вытекает, что $aR = zR \oplus qR \oplus N^* = N_1 \oplus zR \oplus qR \oplus N_2$, где $N_1 \oplus zR = bR$, $qR \oplus N_2 = N$. Отсюда в силу косущественности подмодуля zR получим $aR = N_1 \oplus qR \oplus N_2$, поэтому $z = 0$ и $J(aR) = 0$, пришли к противоречию, ибо $J(aR) \neq 0$. Следовательно, $M = aR$ — локальный правый R-модуль.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №. 96-01-00717).

2.3. Рассмотрим общий случай: $a \in M$, $aR \not\subset J(M)$, существует $z \in J(M)$, $zR \not\subset aR$, $aR + zR \neq aR$, $aR + zR \not\subset J(M)$. Тогда, как и в п. 2.1, в силу 2-регулярности модуля M имеем $M = (aR + zR) \oplus Q = aR \oplus Q, aR + zR = aR$, пришли к противоречию. Значит, $J(M) = J(aR)$ и в силу следствия 9.1.5 [5] вытекает $J(Q) = 0$. Если $Q = 0$, то приходим к рассмотренному случаю п. 2.1, где $M = aR$.

2.4. Пусть $M = aR \oplus Q$, $Q \neq 0$. Проведя рассуждения, как в п. 2.2, приходим к противоречию, а именно, $J(M) = 0$. Следовательно, предположение, что 2-регулярный правый R-модуль M при условии $M \neq J(M)$, $J(M) \neq 0$, не является локальным, неверно.

Пусть теперь M является 1-регулярным правым R-модулем. Тогда при выполнении одного из условий: $M = J(M)$, $J(M) = 0$ или M локальный — легко устанавливается 2-регулярность модуля M. Действительно, если $M = J(M)$, $J(M) = 0$, то это очевидно. Если же M — локальный модуль и $a_1, a_2 \in M$, тогда подмодуль $a_1R + a_2R$, не содержащийся в $J(M)$, равен M, ибо M — локальный R-модуль. □

Теорема 2. *Правый R-модуль M, $M \neq 0$, $M \neq J(M)$, является сильно регулярным тогда и только тогда, когда он либо полупростой, либо локальный R-модуль.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что фактор модуль $\overline{M} = M/J(M)$ является полупростым модулем. Пусть $\overline{U} \neq 0$ есть произвольный подмодуль модуля $\overline{M}$. Обозначим через N такой подмодуль модуля M, что $J(M) \subset N$, $N/J(M) = \overline{U}$. Поскольку M — сильно регулярный R-модуль и $\overline{U} \neq 0$, то $N \not\subset J(M)$ и $M = N \oplus Q$. Согласно следствию 9.1.5 ([5], с. 213) имеем $J(M) = J(N) \oplus J(Q)$ и поскольку $J(M) \subset N$, $N \bigcap Q = 0$, то $J(Q) \subseteq J(M) \bigcap Q \subseteq N \bigcap Q$. Значит, $J(Q) = 0$ и $J(M) = J(N)$. Тогда $\overline{M} = N/J(N) \oplus Q/J(Q) = \overline{U} \oplus \overline{Q}$. Следовательно, каждый ненулевой подмодуль $\overline{U}$ модуля M выделяется прямым слагаемым в модуле M и согласно теореме 4.2 ([6]) $\overline{M}$ будет полупростым правым R-модулем.

Поскольку по условию теоремы R-модуль M является сильно регулярным, то он является 2-регулярным модулем и согласно теореме 1 M — либо локальный R-модуль, либо $J(M) = 0$. Если $J(M) = 0$, то согласно выше доказанному M — полупростой модуль. Если M — локальный модуль, то необходимость условий теоремы доказана.

Пусть M является полупростым R-модулем, тогда согласно теореме 4.2 [6] M — сильно регулярный правый R-модуль.

Пусть теперь M — локальный правый R-модуль. Тогда по определению локального модуля радикал $J(M)$ является наибольшим собственным подмодулем R-модуля M и поэтому каждый подмодуль N R-модуля M, не содержащийся в радикале $J(M)$, совпадает с модулем M. □

Следствие 1. Проективный правый R-модуль P является сильно регулярным тогда и только тогда, когда он является либо полупростым, либо локальным R-модулем.

В частности, при $P = R$ справедливо

Следствие 2. Кольцо R является сильно регулярным тогда и только тогда, когда оно — либо артиново полупростое, либо локальное кольцо.

Теорема 3. *Пусть P — конечно порожденный проективный правый R-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *R-модуль P сильно регулярен,*
(2) *кольцо R-эндоморфизмов $S = \mathrm{End}_R(P)$ правого R-модуля P является сильно регулярным кольцом.*

Доказательство. Согласно следствию 1 R-модуль P является либо полупростым, либо локальным. Пусть P является локальным R-модулем, тогда согласно теореме 2.5 [7] кольцо $S = \mathrm{End}_R(P)$ будет локальным. Пусть теперь P — полупростой правый R-модуль, тогда в силу упражнения 1 ([5], с. 103) кольцо S является регулярным (в смысле Неймана) кольцом и поэтому $J(S) = 0$.

Положим $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_m$, где P_i — прямая сумма всех простых прямых слагаемых R-модуля P, изоморфных одному простому подмодулю. Согласно следствию c и следствию b ([8], с. 68) кольцо S является артиновым, полупростым кольцом и поэтому S — сильно регулярное кольцо. Теперь докажем импликацию

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $S = \mathrm{End}_R(P)$ — артиново полупростое кольцо. Тогда оно — слабо регулярное кольцо, и поэтому R-модуль P будет слабо регулярным. Пусть $e_1, \dots, e_m$ — множество всех различных, примитивных, попарно ортогональных идемпотентов кольца S таких, что $\sum\limits_{i=1}^{m} e_i = 1$. Положим $U_i = e_i(P)$ $(i = 1, \dots, m)$, тогда, очевидно, $P = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$. Поскольку правый R-модуль P слабо регулярен, то в силу косущественности радикала $J(P)$ R-модуль U_i будет сильно регулярным. Если U_i — не простой правый R-модуль, то он разложим в прямую сумму ненулевых подмодулей, поэтому идемпотент e_i разложим и непримитивен. Пришли к противоречию. Следовательно, U_i является простым правым R-модулем и R-модуль P является прямой суммой простых правых R-модулей U_i. Поэтому P — сильно регулярный правый R-модуль.

Пусть теперь $S = \mathrm{End}_R(P)$ является локальным кольцом, тогда согласно теореме 2.5 [7] R-модуль P является локальным правым R-модулем. Импликация (2) $\Longrightarrow$ (1), а следовательно, и теорема доказаны.

Теорема 4. *Пусть R — кольцо, $I(R)$ — инъективная оболочка R как правого R-модуля. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *кольцо R содержится в радикале $J(I(R))$,*
(2) *каждый инъективный правый R-модуль является радикальным.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть Q — произвольный инъективный правый R-модуль, $q \in Q$. Определим R-гомоморфизм $\varphi_q : R \longrightarrow Q$, полагая $\varphi(1) = q$. Рассмотрим точную последовательность правых R-модулей

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow^{\varepsilon} J(I(R)),$$

где ε обозначает данное вложение R в $J(I(R))$. В силу инъективности правого R-модуля Q существует такое $h : J(I(R)) \longrightarrow Q$, что $\varphi = h \cdot \varepsilon$. Поскольку согласно теореме 9.1.4 [5] $h(J(I(R))) \subset J(Q)$, то $\varphi(q) \in J(Q)$ для любого элемента q из Q. Следовательно, $Q \subseteq J(Q)$ и поэтому $Q = J(Q)$.

Импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидна, т.к. $I(R) = J(I(R))$. □

О том, что кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы 4, существует, говорит

Пример. Пусть Z — кольцо целых чисел. Согласно ([5], гл. 9.1, пример 1) поле рациональных чисел Q является радикальным инъективным Z-модулем и инъективной оболочкой кольца Z.

Следствие 3. Если инъективная оболочка $I(R)$ кольца R нерадикальна и сильно регулярна, то R — либо артиново полупростое, либо самоинъективное локальное кольцо.

Доказательство. Поскольку по условию $I(R) \neq J(I(R))$, то согласно теореме 4 $R \not\subset J(I(R))$, поэтому из-за сильной регулярности R-модуля $I(R)$ кольцо R является прямым слагаемым инъективного правого R-модуля $I(R)$. Тогда кольцо R будет самоинъективным и сильно регулярным. Согласно следствию 2 кольцо R либо локальное, либо артиново полупростое. □

Следующая теорема позволяет охарактеризовать артиново полупростые кольца в терминах сильно регулярных модулей.

Теорема 5. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) *R — артиново полупростое кольцо,*
(2) *существует сильно регулярный свободный правый R-модуль ранга 2,*
(3) *существует нерадикальный инъективный правый R-модуль, и прямая сумма инъективной оболочки $I(R)$ кольца R сильно регулярна,*

(4) *все инъективные и все проективные правые R-модули сильно регулярны.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $F = \langle x_1, x_2 \rangle$ — сильно регулярный свободный правый R-модуль ранга 2 с базой x_1, x_2. Тогда $J(F) = x_1 J(R) \oplus x_2 J(R)$. Из сильной регулярности модуля F следует, что подмодуль $x_1 J(R) \oplus x_2 R$ выделяется прямым слагаемым в модуле F, т.е. $F = (x_1 J(R) \oplus x_2 R) \oplus Q$. Отсюда $x_1 R = x_1 J(R) \oplus N$ и $J(N) = 0$, $J(x_1 J(R)) = J(x_1 R) = x_1 J(R)$. Поэтому $x_1 J(R)$ будет проективным R-модулем и согласно теореме 9.6.3 [5] $x_1 J(R) = 0$. Отсюда в силу свободности базисного элемента x_1 получим $J(R) = 0$. Следовательно, R как сильно регулярное кольцо с нулевым радикалом $J(R)$ будет артиновым полупростым кольцом.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Согласно условию (3) существует нерадикальный инъективный правый R-модуль Q. Тогда в силу теоремы 3 $R \not\subset J(I(R))$, поэтому согласно следствию 3 кольцо R — самоинъективное, локальное кольцо. Поскольку прямая сумма кольца R является инъективной и сильно регулярной в силу условия (3), то, как и выше, радикал $J(R) = 0$. Поэтому R — артиново полупростое кольцо.

(1) $\Longrightarrow$ (3) и остальные импликации очевидны. □

Литература

1. Nickolson W.K. *I-rings* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 207. – P. 361–373.
2. Хакми Х.И. *О некоторых свойствах I-подобных колец.* – 1991. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.10.91, № 2920-В91.
3. Хакми Х.И. *I-подобные модули* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 9. – С. 65–70.
4. Хакми Х.И. *Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 5. – С. 60–65.
5. Каш Ф. *Модули и кольца.* – М.: Мир, 1981. – 368 с.
6. Картан А., Эйленберг С. *Гомологическая алгебра.* – М.: Ин. лит., 1960. – 510 с.
7. Azumaya G. *F-semi-perfect modules* // J. Algebra. – 1991. – V. 136. – P. 73–85.
8. Пирс Р.С. *Ассоциативные алгебры.* – М.: Мир, 1986. – 541 с.

Казанский государственный университет
Дамасский университет, Сирия

Поступили
первый вариант 25.10.1993
окончательный вариант 06.02.1997